Estratégia
CONCURSOS

Aul

NÃO ATIVAR Estatística p/ ISS-Curitiba (Auditor Fiscal) Com Videoaulas - Pós-Edital

Professor: Guilherme Neves

Apresentação do curso 2
Metodologia do Curso *3*
Conteúdo programático e cronograma *4*
1. Notação Somatório 6
1.1 Propriedades do somatório *8*
2. Média Aritmética 10
2.1. Propriedades da Média Aritmética *13*
3. Média Ponderada 17
4. Média para Dados Agrupados por Valor 20
5. Média para Dados Agrupados por Classe 22
6. Cálculo da Média por Mudança de Variável 25
7. Média Geométrica 34
8. Média Harmônica 36
9. Desigualdade das médias 41
Lista de Questões de Concursos Anteriores sem Comentários 43
Gabarito sem comentário 61
Lista de Questões de Concursos com Comentários 63
Considerações Finais 104



APRESENTAÇÃO DO CURSO

Olá, queridos alunos!!!

Sejam bem vindos ao curso de Estatística para o concurso do ISS-Curitiba. Este curso já consta o novo conteúdo programático de acordo com a retificação do edital.

Para quem não me conhece, meu nome é Guilherme Neves e a minha predileção é ensinar matérias de exatas como Matemática, Matemática Financeira, Raciocínio Lógico, Raciocínio Crítico, Estatística e Física.

Comecei a ensinar em cursos preparatórios para concursos há mais de 10 anos, mesmo antes de começar o meu curso de Bacharelado em Matemática na UFPE. No biênio 2007-2008, fui bolsista pela FACEPE/UFPE com o trabalho "Análise Matemática e Equações Diferenciais Parciais". Em 2009, publiquei meu livro chamado "Raciocínio Lógico Essencial" pela editora Campus. Tenho o prazer de ensinar Matemática na internet desde 2009 e desde 2014, moro nos Estados Unidos, onde estou me graduando em Engenharia Civil pela University of Central Florida.

Neste curso, você terá acesso a 14 aulas em PDF com teoria minuciosamente explicada e centenas de exercícios resolvidos.

Você também terá acesso às aulas em vídeo também com teoria completa e exercícios resolvidos.

Ademais, você poderá fazer perguntas sobre as aulas em nosso fórum de dúvidas. Estarei sempre atento para responder rapidamente as suas perguntas.



Para **tirar dúvidas** e ter **acesso a dicas e conteúdos gratuitos**, acesse nossas redes sociais:

Instagram - @profguilhermeneves

https://www.instagram.com/profguilhermeneves

Canal do YouTube – Prof. Guilherme Neves

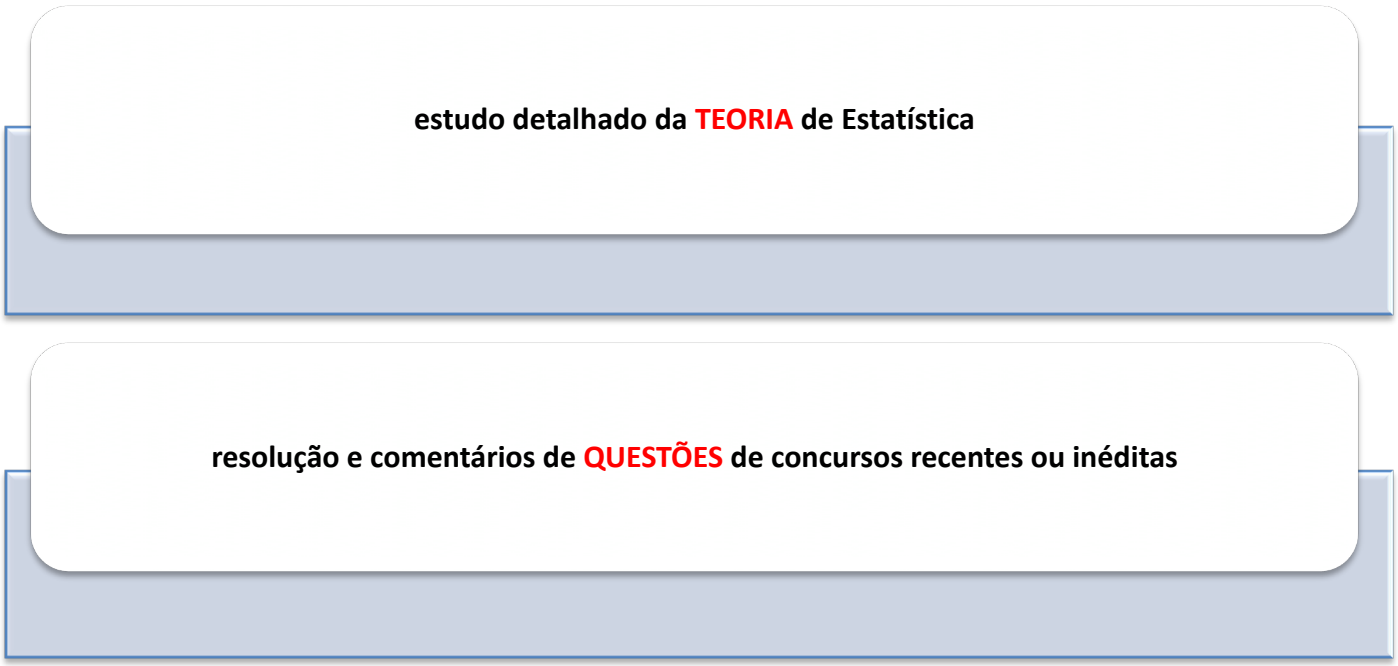
https://youtu.be/gqab047D9l4

E-mail: profguilhermeneves@gmail.com

METODOLOGIA DO CURSO

Aqui, parto do pressuposto de que o aluno não gosta de Estatística ou que não tem uma boa base matemática. Portanto, não se preocupe. Tudo está sendo produzido com muito carinho para que você possa fechar a prova.

Nosso curso terá a seguinte estrutura:



Este curso está sendo preparado para que seja a sua única fonte de estudos. A teoria será minuciosamente explicada sempre com atenção à forma como o assunto é cobrado. Os exercícios são criteriosamente selecionados seguindo uma ordem crescente de dificuldade para a sua melhor compreensão.

Tenho certeza absoluta que na hora da prova você vai dar um sorrisinho e pensar: “bem que o professor Guilherme falou...”.

A partir de hoje, Estatística será a sua aliada na sua caminhada à aprovação!!!

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO E CRONOGRAMA

CRONOGRAMA DE AULAS

DISPONÍVEL	CONTEÚDO
Aula Demo Disponível	Média aritmética
Aula 01 Disponível	Estatística Descritiva. População, amostra, tabelas, gráficos, distribuição de frequência.
Aula 02 Disponível	Mediana
Aula 03 Disponível em 01/03/2019	Moda
Aula 04 Disponível em 05/03/2019	Medidas de dispersão (variância, desvio padrão)
Aula 05 Disponível em 09/03/2019	Noções de Análise Combinatória para Estatística
Aula 06 Disponível em 13/03/2019	Probabilidade
Aula 07 Disponível em 17/03/2019	Variáveis Aleatórias – Parte 1
Aula 08 Disponível em 21/03/2019	Variáveis Aleatórias – Parte 2
Aula 09 Disponível em 25/03/2019	Principais Distribuições de Probabilidade – Parte 1
Aula 10 Disponível em 29/03/2019	Principais Distribuições de Probabilidade – Parte 2
Aula 11 Disponível em 02/04/2019	Amostragem
Aula 12 Disponível em 06/04/2019	Intervalos de confiança
Aula 13 Disponível em 10/04/2019	Teste de Hipóteses
Aula 14 Disponível em 14/04/2019	Análise de Regressão

Antes de iniciarmos o nosso curso, vamos a alguns AVISOS IMPORTANTES:

1) Com o objetivo de *otimizar os seus estudos*, você encontrará, em *nossa plataforma (Área do aluno)*, alguns recursos que irão auxiliar bastante a sua aprendizagem, tais como *"Resumos"*, *"Slides"* e *"Mapas Mentais"* dos conteúdos mais importantes desse curso. Essas ferramentas de aprendizagem irão te auxiliar a perceber aqueles tópicos da matéria que você precisa dominar, que você não pode ir para a prova sem ler.

2) Em nossa Plataforma, procure pela *Trilha Estratégica e Monitoria* da sua respectiva área/concurso alvo. A Trilha Estratégica é elaborada pela nossa equipe do *Coaching*. Ela irá te indicar qual é exatamente o *melhor caminho* a ser seguido em seus estudos e vai te ajudar a *responder as seguintes perguntas*:

- Qual a melhor ordem para estudar as aulas? Quais são os assuntos mais importantes?

- Qual a melhor ordem de estudo das diferentes matérias? Por onde eu começo?

- *"Estou sem tempo e o concurso está próximo!"* Posso estudar apenas algumas partes do curso? O que priorizar?

- O que fazer a cada sessão de estudo? Quais assuntos revisar e quando devo revisá-los?

- A quais questões deve ser dada prioridade? Quais simulados devo resolver?

- Quais são os trechos mais importantes da legislação?

3) Procure, nas instruções iniciais da "Monitoria", pelo *Link* da nossa *"Comunidade de Alunos"* no Telegram da sua área / concurso alvo. Essa comunidade é *exclusiva* para os nossos assinantes e será utilizada para orientá-los melhor sobre a utilização da nossa Trilha Estratégica. As melhores dúvidas apresentadas nas transmissões da "*Monitoria*" também serão respondidas na nossa *Comunidade de Alunos* do Telegram.

(*) O Telegram foi escolhido por ser a única plataforma que preserva a intimidade dos assinantes e que, além disso, tem recursos tecnológicos compatíveis com os objetivos da nossa Comunidade de Alunos.

1. NOTAÇÃO SOMATÓRIO

Consideremos a sequência (1, 2, 2, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7).

Nesta sequência, por exemplo, o quinto termo é 4. Denotamos assim:

$$a_5 = 4$$

De uma forma geral, o termo a_n representa um termo de posição n em uma sequência. Poderíamos indiferentemente utilizar x_i, por exemplo,

Vamos agora apresentar uma ferramenta muito importante em Estatística: o SOMATÓRIO.

O símbolo de somatório é a letra grega maiúscula sigma Σ.

Vamos representar os termos da sequência acima por a_n. Assim, por exemplo, a_3 é o terceiro termo da sequência, ou seja, $a_3 = 2$.

Imagine que precisamos somar os 10 termos da sequência acima.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 40$$

Os matemáticos acham muito trabalhoso escrever a expressão acima. Desta forma, foi criada a notação somatório com o intuito de escrever adições de uma forma mais compacta.

Os termos que estamos somando são números da forma a_i em que i varia de 1 a 10, ou seja, $1 \leq i \leq 10$ com $i \in \mathbb{N}$.

Começamos com o símbolo adotado.

$$\sum_{\square}^{\square} \square$$

No quadradinho da direita, vamos colocar a fórmula geral do termo que estamos somando. No caso, estamos somando os termos da forma a_i.

$$\sum_{\square}^{\square} a_i$$

O índice i varia de 1 a 10. Indicamos este fato nos outros quadradinhos. No quadradinho inferior escrevemos i = 1 e no quadradinho superior escrevemos 10 (não precisa escrever i = 10, pois já sabemos que o índice é dado pela letra i).

$$\sum_{i=1}^{10} a_i$$

Agora é só substituir i por 1,2,3,4,...10 e somar.

A expressão acima significa $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{10} a_i = 40$$

Vejamos um outro exemplo com a sequência (1, 2, 2, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7).

Imagine, por exemplo, que precisamos somar os quadrados dos 5 primeiros termos.

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 4^2 = 41$$

Neste caso, o índice i varia de 1 a 5. As parcelas são da forma a_i^2. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{5} a_i^2 = 41$$

Observe que a expressão acima indica a **soma dos quadrados** dos cinco primeiros termos.

O **quadrado da soma** dos cinco primeiros termos seria indicado da seguinte forma:

$$\left(\sum_{i=1}^{5} a_i\right)^2 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{5} a_i\right)^2 = (1 + 2 + 2 + 4 + 4)^2 = 13^2 = 169$$

Observe, portanto, que

$$\sum a_i^2 \neq \left(\sum a_i\right)^2$$

É muito comum também a utilização do símbolo de somatório sem o índice. Podemos fazer isso sempre que não houver dúvidas qual o intervalo de variação do índice ou quando você quiser somar todos os termos da sequência.

1.1 PROPRIEDADES DO SOMATÓRIO

$$i)\ \sum (a_i + b_i) = \sum a_i + \sum b_i$$

Tome, por exemplo, as seguintes sequências:

$$(1,3,8,10,11)$$

$$(1,4,7,10,13)$$

Considere que $\{a_n\}$ seja a primeira sequência e que $\{b_n\}$ seja a segunda sequência.

Assim, a sequência $\{a_n + b_n\}$ é dada por:

$$(1+1, \quad 3+4, \quad 8+7, \quad 10+10, \quad 11+13) = (2, 7, 15, 20, 24)$$

Assim, temos:

$$\sum a_i = 1 + 3 + 8 + 10 + 11 = 33$$

$$\sum b_i = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35$$

$$\sum a_i + \sum b_i = 33 + 35 = 68$$

$\sum(a_i + b_i)$ representa o somatório dos termos da sequência $\{a_n + b_n\}$.

$$\sum(a_i + b_i) = 2 + 7 + 15 + 20 + 24 = 68$$

$ii) \sum(ka_i) = k \cdot \sum(a_i)$, *sendo k uma constante real.*

Tome, novamente, por exemplo, a seguinte sequência.

$$(1,3,8,10,11)$$

A soma dos termos desta sequência é dada por

$$\sum a_i = 1 + 3 + 8 + 10 + 11 = 33$$

Vamos multiplicar esta sequência por 3, obtendo a sequência $\{3a_n\}$.

$$(3,9,24,30,33)$$

Assim, temos:

$$\sum(3a_i) = 3 + 9 + 24 + 30 + 33 = 99$$

Poderíamos simplesmente ter feito:

$$\sum(3a_i) = 3 \cdot \sum(a_i) = 3 \cdot 33 = 99$$

2. MÉDIA ARITMÉTICA

Muita gente sabe as fórmulas das médias, sabe as propriedades, mas não entende o conceito e qual a função de cada tipo de média.

Considere uma lista formada por 3 números: (2, 5, 14). Observe que a soma destes três números é 2 + 5 + 14 = 21.

Imagine agora que precisamos substituir os três números da lista (2, 5, 14) por um único número, de tal forma que a soma continue sendo 21. Em outras palavras, queremos formar uma lista de três números iguais $(\overline{x}, \overline{x}, \overline{x})$ de tal forma que a soma dos seus elementos seja igual a 21.

$$\overline{x} + \overline{x} + \overline{x} = 21$$

$$3 \cdot \overline{x} = 21$$

$$\overline{x} = \frac{21}{3}$$

$$\overline{x} = 7$$

Observe que, se substituirmos os três números por 7, a soma continuará sendo igual a 21.

Este número que acabamos de calcular é chamado de média aritmética.

Desta maneira, a média aritmética é um valor que pode substituir todos os elementos de uma lista sem alterar a soma dos elementos da lista.

Vamos generalizar. Considere que temos uma lista de n números $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. A soma dos termos desta lista é igual a $\underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}_{n\ parcelas}$.

A média aritmética desta lista é um número $\overline{x}$ tal que se ele substituir todos os elementos da lista, a soma total será exatamente a mesma.

A nossa nova lista de números após a substituição será $(\underbrace{\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}}_{n\ elementos})$.

A soma dos termos desta nova lista é $\underbrace{\overline{x} + \overline{x} + \cdots + \overline{x}}_{n\ parcelas} = n \cdot \overline{x}$.

Como as somas das duas listas são iguais, temos:

$$n \cdot \overline{x} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}$$

Esta é a famosa fórmula da média aritmética. Para calcular a média aritmética de uma lista de números, basta somar todos os elementos e dividir pela quantidade de elementos.

Exemplo: Calcular a média aritmética dos números 4, 7, 8, 29.

Resolução

Basta somar os 4 números e dividir o resultado por 4.

$$\overline{x} = \frac{4 + 7 + 8 + 29}{4} = \frac{48}{4} = 12$$

A média aritmética é igual a 12.

"Ah, Guilherme. Não gostei deste lero-lero. Muita complicação para aprender uma fórmula simples."

Realmente, você não precisa ficar preocupado em saber de onde surgiu a fórmula da média aritmética, mas isso ajudará a entender o conceito, por exemplo, da média geométrica.



I – A média aritmética preserva a soma dos elementos da lista de números.
II – Para calcular a média aritmética, basta somar todos os elementos e dividir pela quantidade de elementos.

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}$$



Se um problema simplesmente pedir para calcular a média sem especificar qual o tipo de média, você deverá calcular a média aritmética.



Se é dada a média de um conjunto, basta multiplicar a média pela quantidade de termos para calcular a soma total. Por exemplo, se a média salarial de 8 pessoas é de 1.500 reais, então, juntos, eles recebem 8 x 1.500 = 12.000 reais.

Isto é decorrente da própria definição de média aritmética.

$$\overline{x} = \frac{Soma}{n} \Leftrightarrow Soma = n \cdot \overline{x}$$



(VUNESP 2018/CM INDAIATUBA)

A tabela a seguir mostra o número de funcionários que faltaram ao trabalho nos cinco dias de uma semana em determinada empresa.

Dias da Semana	Número de Funcionários Faltantes
2ª feira	13
3ª feira	9
4ª feira	6
5ª feira	18
6ª feira	23

A média diária do número de funcionários que faltaram ao trabalho na 2a e 6a feiras, desta semana, supera a média diária do número de funcionários que faltaram na 3a, 4a e 5a feiras, da mesma semana, em

(A) 7.

(B) 8.

(C) 9.

(D) 10.

(E) 11.

Resolução

Vamos calcular a média do número de funcionários faltantes na 2ª e 6ª feiras. Basta somar os valores e dividir por 2 (porque são 2 dias).

$$\overline{x_{2,6}} = \frac{13 + 23}{2} = 18$$

Vamos agora calcular a média dos outros dias (terça, quarta e quinta). Como agora são 3 dias, devemos somar e dividir por 3.

$$\overline{x_{3,4,5}} = \frac{9 + 6 + 18}{3} = 11$$

A primeira média supera a segunda em 18 – 11 = 7.

Gabarito: A

2.1. PROPRIEDADES DA MÉDIA ARITMÉTICA

Vamos estudar algumas propriedades importantes sobre a média aritmética.

i) A média aritmética sempre existe e é única.

Esta propriedade é bem simples de ser entendida. Dada uma lista qualquer de números, é sempre possível calcular a média aritmética e o seu resultado é sempre único.

Parece ser bastante óbvia esta propriedade. Entretanto, aprenderemos que nem sempre a média geométrica existe, por exemplo.

ii) Somando-se (ou subtraindo-se) uma constante **c** de todos os valores de uma lista de números, a média da lista fica aumentada (ou diminuída) desta constante.

Vejamos um exemplo para entender a propriedade. Já vimos que a média da lista (4, 7, 8, 29) é 12.

Vamos somar o número 3 a cada um dos números desta lista. A nova lista obtida será (7, 10, 11, 32).

A nova média é igual a:

$$\frac{7 + 10 + 11 + 32}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

Observe que como acrescentamos 3 a cada um dos números da lista, a média também aumentou 3 unidades (de 12 foi para 15).

iii) Multiplicando-se (ou dividindo-se) uma constante **c** de todos os valores de uma lista de números, a média da lista fica multiplicada (ou dividida) por esta constante.

O raciocínio é análogo e agora já fica bem mais fácil de entender. Por exemplo, se multiplicarmos todos os elementos de uma lista por 4, a média também será multiplicada por 4.

Tomemos como exemplo novamente a lista (4, 7, 8, 29) cuja média é 12.

Vamos multiplicar todos os termos por 4 e obter a seguinte lista: (16, 28, 32, 116).

A nova média é igual a:

$$\frac{16+28+32+116}{4}=\frac{192}{4}=48$$

Como era de se esperar, a nova média é igual a $4\times 12=48$.

iv) A soma algébrica dos desvios tomados em relação à média é nula.

Para explicar essa propriedade, vamos tomar como exemplo a sequência $(2,4,6,8,10,10,12,12)$.

Vamos calcular a média:

$$\overline{x}=\frac{2+4+6+8+10+10+12+12}{8}$$

$$\overline{x}=8$$

Denominamos **desvio em relação à média** a diferença entre cada elemento da sequência e a média aritmética.

A sequência possui 8 elementos. Portanto, há 8 desvios para calcular. Basta calcular a diferença entre cada elemento e a média.

O primeiro número da sequência é 2. A média é 8. Portanto, o primeiro desvio é

$$d_1=x_1-\overline{x}=2-8=-6$$

Vamos fazer o mesmo cálculo para todos os outros números.

$$d_1=x_1-\overline{x}=2-8=-6$$
$$d_2=x_2-\overline{x}=4-8=-4$$
$$d_3=x_3-\overline{x}=6-8=-2$$
$$d_4=x_4-\overline{x}=8-8=0$$
$$d_5=x_5-\overline{x}=10-8=2$$
$$d_6=x_6-\overline{x}=10-8=2$$
$$d_7=x_7-\overline{x}=12-8=4$$
$$d_8=x_8-\overline{x}=12-8=4$$

Vamos agora somar todos esses desvios.

$$\sum_{i=1}^{8}d_i=d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6+d_7+d_8$$

$$\sum_{i=1}^{8}d_i=(-6)+(-4)+(-2)+0+2+2+4+4$$

$$\sum_{i=1}^{8} d_i = 0$$

É justamente isso que diz a propriedade que acabamos de enunciar. Não importa qual a sequência de números: a soma dos desvios em relação à média é sempre igual a zero.

Poderíamos definir desvio em relação a um número a como a diferença entre cada termo e o número a.

v) A soma dos quadrados dos desvios da sequência de números x_i em relação a um número a é mínima se a for a média aritmética dos números.

Vamos mais uma vez colocar um exemplo numérico para entender essa propriedade.

Vamos novamente utilizar a sequência $(2,4,6,8,10,10,12,12)$. Já sabemos que a média é 8.

Também já calculamos os desvios desses números em relação à média.

$$d_1 = x_1 - \overline{x} = 2 - 8 = -6$$
$$d_2 = x_2 - \overline{x} = 4 - 8 = -4$$
$$d_3 = x_3 - \overline{x} = 6 - 8 = -2$$
$$d_4 = x_4 - \overline{x} = 8 - 8 = 0$$
$$d_5 = x_5 - \overline{x} = 10 - 8 = 2$$
$$d_6 = x_6 - \overline{x} = 10 - 8 = 2$$
$$d_7 = x_7 - \overline{x} = 12 - 8 = 4$$
$$d_8 = x_8 - \overline{x} = 12 - 8 = 4$$

Na propriedade passada, vimos que a soma desses desvios é sempre igual a 0. Alguns desvios são negativos, outros são positivos, alguns podem ser zero, mas a soma deles é sempre igual a 0.

Pois bem. Vamos agora calcular a soma dos quadrados desses desvios. Em outras palavras, vamos elevar cada um desses desvios ao quadrado e somar todos os resultados.

$$\sum_{i=1}^{8} d_i^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2 + d_7^2 + d_8^2$$

$$\sum_{i=1}^{8} d_i^2 = (-6)^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + 0^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 4^2$$

$$\sum_{i=1}^{8} d_i^2 = 96$$

A propriedade nos diz que, para essa sequência numérica, o valor 96 é um valor mínimo. O que isso quer dizer?

Isso quer dizer que se calcularmos os desvios em relação a outro número qualquer diferente de 8 (diferente da média) e, em seguida, calcularmos a soma dos quadrados dos desvios, obteremos um valor maior que 96.

Olhe novamente a sequência que estamos trabalhando: $(2{,}4, 6, 8, 10, 10, 12, 12)$. Vamos calcular a soma dos quadrados dos desvios em relação a 3. Por que 3? Porque eu quis. Kkkkk... É apenas um exemplo.

Ah, Guilherme. Eu não gosto do número 3. Eu gostaria de verificar com o número 5, que é o aniversário da minha mãe.

Ok. Vamos lá. Eis os desvios em relação a 5.

$$d_1' = x_1 - 5 = 2 - 5 = -3$$
$$d_2' = x_2 - 5 = 4 - 5 = -1$$
$$d_3' = x_3 - 5 = 6 - 5 = 1$$
$$d_4' = x_4 - 5 = 8 - 5 = 3$$
$$d_5' = x_5 - 5 = 10 - 5 = 5$$
$$d_6' = x_6 - 5 = 10 - 5 = 5$$
$$d_7' = x_7 - 5 = 12 - 5 = 7$$
$$d_8' = x_8 - 5 = 12 - 5 = 7$$

Vamos agora calcular a soma dos quadrados desses números. Pela nossa propriedade, obrigatoriamente o resultado será maior do que 96.

$$\sum_{i=1}^{8} d_i'^2 = (-3)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + 3^2 + 5^2 + 5^2 + 7^2 + 7^2$$

$$\sum_{i=1}^{8} d_i'^2 = 168$$

Como era de se esperar, o resultado é maior do que 96.

3. MÉDIA PONDERADA

Imagine que um estudante realizou 4 provas e obteve as seguintes notas: 8; 9,5; 7,5 e 9. A sua média é

$$\overline{x} = \frac{8 + 9{,}5 + 7{,}5 + 9}{4} = \frac{34}{4} = 8{,}5$$

Até aí tudo ok. Usamos a média aritmética simples quando todos os valores da lista têm a mesma "importância".

Vamos supor agora que o estudante prestou vestibular para Engenharia e realizou provas de Matemática, Física, Química, História e Biologia.

Ora, como o estudante está concorrendo a uma vaga no curso de Engenharia, é esperado que matérias de exatas tenham um **peso** maior (uma importância maior). É aqui que entra o conceito da média ponderada.

Vamos assumir que o peso de Matemática seja 4, de Física seja 5, de Química seja 3, de História seja 1 e de Biologia seja 2. Suponha ainda que o estudante obteve as seguintes notas:

Matéria	Nota (x_i)	Peso (p_i)
Matemática	9,5	4
Física	8,5	5
Química	7	3
História	5	1
Biologia	4	2

Para calcular a média aritmética ponderada (em que levamos em consideração os pesos de cada matéria), devemos multiplicar cada nota pelo seu respectivo peso, somar tudo e dividir pela soma dos pesos.

Matéria	Nota (x_i)	Peso (p_i)	Nota x Peso
Matemática	9,5	4	9,5 x 4 = 38
Física	8,5	5	8,5 x 5 = 42,5
Química	7	3	7 x 3 = 21
História	5	1	5 x 1 = 5
Biologia	4	2	4 x 2 = 8

$$\overline{x} = \frac{38 + 42{,}5 + 21 + 5 + 8}{4 + 5 + 3 + 1 + 2} = \frac{114{,}5}{15} \cong 7{,}63$$

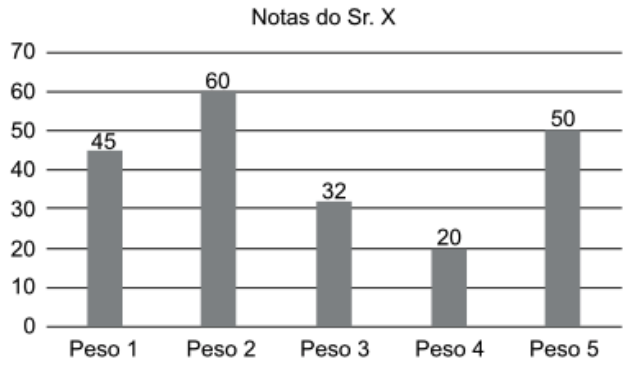
Vamos generalizar. Se temos uma lista de números $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ com pesos respectivos $(p_1, p_2, \dots, p_n)$, então a média aritmética ponderada é dada por:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}}$$

HORA DE PRATICAR!

(VUNESP 2018/CM de Indaiatuba/Controlador Interno)

O gráfico a seguir mostra as cinco notas do Sr. X e os respectivos pesos atribuídos a cada uma das provas.



Para ser aprovado, o Sr. X precisava que sua média aritmética ponderada por esses pesos fosse maior ou igual a 48 pontos. Com essas notas, o Sr. X não foi aprovado e sua média ficou abaixo de 48, em uma quantidade de pontos igual a

(A) 6,6.
(B) 7,9.
(C) 8,6.
(D) 9,5.
(E) 10,8.

Resolução

Para calcular a média aritmética ponderada, devemos multiplicar cada valor pelo seu respectivo peso, somar os resultados e dividir pela soma dos pesos.

$$\overline{x} = \frac{45 \times 1 + 60 \times 2 + 32 \times 3 + 20 \times 4 + 50 \times 5}{1 + 2 + 3 + 4 + 5}$$

$$\overline{x} = \frac{591}{15} = 39{,}4$$

Sua média ficou abaixo de 48 em 48 – 39,4 = 8,6 pontos.

Gabarito: C

4. MÉDIA PARA DADOS AGRUPADOS POR VALOR

Vamos agora aprender a calcular a média aritmética para quando os dados estão agrupados por valor. A ideia é praticamente a mesma da média ponderada.

Imagine que fizemos uma pesquisa sobre as idades de alguns alunos do Estratégia. Os dados foram resumidos na tabela a seguir.

Idade (x_i)	Frequência (f_i)
25	21
30	47
34	54
38	41
41	37

Esta tabela quer dizer que 21 alunos possuem 25 anos, 47 alunos possuem 30 anos, e assim por diante.

A frequência tem aqui exatamente o mesmo papel do peso na média ponderada. Para calcular a média, vamos multiplicar cada valor pela sua respectiva frequência, somar tudo e dividir pela soma das frequências, que é o total de pessoas entrevistadas.

Idade (x_i)	Frequência (f_i)	$x_i f_i$
25	21	25 x 21 = 525
30	47	30 x 47 = 1.410
34	54	34 x 54 = 1.836
38	41	38 x 41 = 1.558
41	37	41 x 37 = 1.517
Total	200	6.846

$$\overline{x} = \frac{6.846}{200} = 34{,}23\ anos$$

HORA DE PRATICAR!

(VUNESP 2018/IPSM – São José dos Campos/Analista de Gestão Municipal)

A tabela mostra grupos de funcionários de uma empresa e os respectivos salários individuais dos componentes de cada grupo.

DISTRIBUIÇÃO SALARIAL POR GRUPO		
GRUPO	NÚMERO DE FUNCIONÁRIOS	SALÁRIO (R$)
A	8	800,00
B	10	1.100,00
C	12	1.200,00

A diferença de salário de cada funcionário do grupo A e a média aritmética ponderada de todos os salários é de aproximadamente

(A) 15%

(B) 18%

(C) 22%

(D) 25%

(E) 27%

Resolução

O procedimento para calcular a média de dados agrupados por valor é idêntico ao da média ponderada. Neste caso, vamos multiplicar cada salário pela quantidade de funcionários e dividir pela quantidade total de funcionários.

$$\overline{x} = \frac{800 \times 8 + 1.100 \times 10 + 1.200 \times 12}{8 + 10 + 12}$$

$$\overline{x} = \frac{800 \times 8 + 1.100 \times 10 + 1.200 \times 12}{30} = \frac{31.800}{30} = 1.060$$

No grupo A, cada funcionário recebe R$ 800,00. A diferença entre a média de todos os salários (R$ 1.060,00) e o salário de cada funcionário do grupo A é 1.060 – 800 = 260.

Queremos calcular esta diferença em termos percentuais. Basta dividir o valor encontrado pela média.

$$\frac{260}{1.060} = 0{,}2452 = 24{,}52\%$$

Gabarito: D

5. MÉDIA PARA DADOS AGRUPADOS POR CLASSE

Uma pesquisa sobre estaturas foi realizada com 40 alunos do Estratégia. Os dados da pesquisa foram resumidos na tabela a seguir.

Estaturas (cm)	Frequência (f_i)
150 – 154	4
154 – 158	9
158 – 162	11
162 – 166	8
166 – 170	5
170 – 174	3
Total	40

Ao agruparmos os valores da variável em classes, ganhamos em simplicidade, mas perdemos em pormenores. Não sabemos qual a altura exata de cada um dos alunos.

Denominamos “classes” cada um dos grupos ou intervalos obtidos a partir do agrupamento.

A terceira classe, por exemplo, indica que há 11 alunos com estatura entre 158 e 162 cm.

Para calcular a média para dados em classes, devemos encontrar o ponto médio de cada classe e efetuar o mesmo cálculo para dados agrupados por valor.

Para calcular o ponto médio de cada classe, basta calcular a média dos extremos da classe. Por exemplo, o ponto médio da quarta classe é:

$$x_4 = \frac{162 + 166}{2} = 164$$

Estaturas (cm)	Frequência (f_i)	Ponto Médio (x_i)
150 – 154	4	152
154 – 158	9	156
158 – 162	11	160
162 – 166	8	164
166 – 170	5	168
170 – 174	3	172
Total	40	

Vamos agora multiplicar cada ponto médio pela sua respectiva frequência, somar os resultados e dividir pelo total de alunos consultados.

Estaturas (cm)	Frequência (f_i)	Ponto Médio (x_i)	$x_i f_i$
150 – 154	4	152	4 x 152 = 608
154 – 158	9	156	9 x 156 = 1.404
158 – 162	11	160	11 x 160 = 1.760
162 – 166	8	164	8 x 164 = 1.312
166 – 170	5	168	5 x 168 = 840
170 – 174	3	172	3 x 172 = 516
Total	40		6.440

$$\overline{x} = \frac{6.440}{40} = 161\ cm$$

HORA DE PRATICAR!

(VUNESP 2014/TJ-PA/Analista Judiciário)

A Universidade Alfa quer ter informações sobre a situação sócio-financeira dos alunos que vêm de fora da cidade onde está instalada e o aluguel residencial é uma das variáveis estudadas. Para informações sobre isso, colheu-se uma amostra de 32 alunos, cujos resultados são mostrados na tabela de distribuição de frequência que segue:

Distribuição de frequência para uma amostra de alunos da universidade ALFA

Aluguel mensal (R$)	**Frequência**
De 700 a menos de 900	3
De 900 a menos de 1 100	10
De 1 100 a menos de 1 300	10
De 1 300 a menos de 1 500	8
De 1 500 a menos de 1 700	1
Total	**32**

De acordo com os resultados da amostra,

O valor médio dos aluguéis está:

(A) abaixo de 1 000 reais.
(B) entre 1 000 e 1 200 reais.
(C) entre 1 200 e 1 500 reais.
(D) entre 1 500 e 1 600 reais.
(E) acima de 1 600 reais.

Resolução

O primeiro passo é calcular os pontos médios de cada classe. Para tanto, basta somar e dividir por 2. Por exemplo, o ponto médio da primeira classe é

$$x_1 = \frac{700 + 900}{2} = 800$$

Você também poderia ter raciocinado da seguinte forma: de 700 para 900, temos 200. Para chegar no meio, vamos acrescentar 100, que é a metade: 700 + 100 = 800.

Vamos reconstruir a tabela utilizando os pontos médios.

Aluguel Mensal (R$) - Ponto Médio	Frequência
800	3
1.000	10
1.200	10
1.400	8
1.600	1
Total	32

Vamos agora multiplicar cada ponto médio pela frequência.

Aluguel Mensal (R$) - Ponto Médio	Frequência	Ponto Médio x Frequência
800	3	800 x 3 = 2.400
1.000	10	1.000 x 10 = 10.000
1.200	10	1.200 x 10 = 12.000
1.400	8	1.400 x 8 = 11.200
1.600	1	1.600 x 1 = 1.600
Total	32	37.200

Agora é só dividir.

$$\overline{x} = \frac{37.200}{32} = 1.162{,}50$$

Gabarito: B

6. Cálculo da Média por Mudança de Variável

Imagine que vamos calcular a média salarial de algumas pessoas. Seus salários são R$ 3.000,00, R$ 4.000,00 e R$ 11.000,00.

Como todos os números são múltiplos de 1.000, uma boa ideia seria dividir todos esses números por 1.000 para facilitar o cálculo da média.

Vamos calcular a média dos números 3, 4 e 11.

$$\overline{y} = \frac{3+4+11}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

Como os números foram divididos por 1.000, eu preciso multiplicar a média por 1.000 para obter a média do conjunto original. Portanto, a média procurada é

$$\overline{x} = 6 \times 1.000 = 6.000$$

Bem intuitivo, não?

Guilherme, por que eu posso fazer isso?

Por causa das propriedades da média aritmética. Quando dividimos todos os números por 1.000, a média também será dividida por 1.000. Assim, para calcular a média original, devemos multiplicar a média calculada por 1.000.

O que acabamos de fazer foi uma mudança de variável. Nós podemos fazer isso não apenas com divisão (fizemos uma divisão por 1.000), mas também com multiplicação, adição ou subtração.

Lembre-se que, no final, devemos realizar as operações inversas com a média.

Vejamos outro exemplo. Vamos calcular a média dos números 10.003, 10.004 e 10.011.

Eu poderia simplesmente somar os 3 números e dividir o resultado por 3. Vamos, entretanto, utilizar uma mudança de variável.

Que tal subtrair 10.000 de todos os números?

Se fizermos isso, ficamos com $3, 4\ e\ 11$.

Vamos calcular a média dos números 3, 4 e 11.

$$\overline{y} = \frac{3 + 4 + 11}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

Mas essa não é a média que eu quero. Como eu subtraí 10.000 de todos os números, eu preciso somar 10.000 à média para obter o valor correto. A média pedida é

$$\overline{x} = 6 + 10.000 = 10.006$$

Se você não acredita, é só conferir:

$$\overline{x} = \frac{10.003 + 10.004 + 10.011}{3} = \frac{30.018}{3} = 10.006$$

Vamos fazer mais um exemplo. Vamos agora obter a média dos números 20.006, 20.024, 20.030 e 20.060.

Uma boa sugestão é subtrair 20.000 de todos os números. Ficamos com 6, 24, 30 e 60.

Perceba que todos os números são múltiplos de 6. Que tal dividi-los por 6?

Ficamos com 1, 4, 5 e 10. Vamos agora calcular a média.

$$\overline{y} = \frac{1+4+5+10}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

Mas essa não é a média que eu quero. Essa é a média da variável transformada.

Lembre-se do passo a passo que fizemos para chegar a essa média. Primeiro, nós subtraímos 20.000 de cada número e, em seguida, nós dividimos cada um deles por 6.

O mesmo ocorre com a média.

$$\boxed{Média\ Original} \xrightarrow{-20.000} \boxed{\quad} \xrightarrow{\div 6} \boxed{5}$$

Para calcular a média original, devemos voltar com as operações inversas. Vamos multiplicar por 6 e depois adicionar 20.000.

$$\boxed{Média\ Original} \xrightarrow{-20.000} \boxed{30} \xrightarrow{\div 6} \boxed{5}$$

$$\boxed{20.030} \xrightarrow{-20.000} \boxed{\quad} \xrightarrow{\div 6} \boxed{5}$$

Assim, a média pedida é 20.030.

Vamos conferir?

$$\overline{x} = \frac{20.006 + 20.024 + 20.030 + 20.060}{4} = \frac{80.120}{4} = 20.030$$

Guilherme, tenho medo de me confundir na hora de fazer as operações de trás pra frente.

Sem problemas.

Vamos chamar de x a variável original e y a variável transformada.

No último exemplo, estávamos trabalhando com os números 20.006, 20.024, 20.030 e 20.060. Os números originais compõem a variável x.

Quais operações nós realizamos com a variável original? Subtraímos 20.000 e, em seguida, dividimos por 6.

$$\frac{x - 20.000}{6}$$

Essa é justamente a variável transformada, que eu chamei de y.

$$y = \frac{x - 20.000}{6}$$

De acordo com a propriedade das médias, o que ocorre com todos os números (adição, multiplicação, divisão ou subtração de constantes) também ocorre com a média.

Assim, se subtraímos 20.000 e dividimos por 6 todos os números, o mesmo ocorrerá com a média.

$$\overline{y} = \frac{\overline{x} - 20.000}{6}$$

Agora é só isolar $\overline{x}$, que é a média original.

$$6 \cdot \overline{y} = \overline{x} - 20.000$$

$$\overline{x} = 6 \cdot \overline{y} + 20.000$$

Foi por isso que no final nós multiplicamos por 6 e adicionamos 20.000.

Esse procedimento pode também ser feito com dados agrupados com ou sem intervalos de classe.

Vejamos novamente um exemplo que vimos ao longo da teoria.

Estaturas (cm)	Frequência (f_i)
150 – 154	4
154 – 158	9
158 – 162	11
162 – 166	8
166 – 170	5
170 – 174	3
Total	40

Vimos que a média desses valores é $\overline{x} = 161\ cm$. Vamos agora calcular de uma maneira um pouco mais rápida.

Para calcular a média, precisamos calcular os pontos médios de cada classe. Já aprendemos esse processo.

Estaturas (cm)	Frequência (f_i)	Ponto Médio (x_i)
150 – 154	4	152
154 – 158	9	156
158 – 162	11	160
162 – 166	8	164
166 – 170	5	168
170 – 174	3	172
Total	40	

Os números são bem chatos.

Poderíamos subtrair 152 de cada ponto médio. Por que 152? Porque eu quis. Kkkk...

Brincadeira. Eu gosto sempre de subtrair o primeiro ponto médio.

Assim, os novos valores serão:

$$152 - 152 = 0$$
$$156 - 152 = 4$$
$$160 - 152 = 8$$
$$164 - 152 = 12$$
$$168 - 152 = 16$$
$$172 - 152 = 20$$

Observe que os números são todos múltiplos de 4. Vamos dividir todos por 4. Assim, obtemos os números $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Essa é a nossa variável transformada y. Observe que para chegar em y, nós subtraímos 152 da variável original e depois dividimos todos os valores por 4, ou seja:

$$y = \frac{x - 152}{4}$$

Estaturas (cm)	Frequência (f_i)	Ponto Médio (x_i)	y
150 – 154	4	152	0
154 – 158	9	156	1
158 – 162	11	160	2
162 – 166	8	164	3
166 – 170	5	168	4
170 – 174	3	172	5
Total	40		

Veja que é bem mais fácil trabalhar com essa variável y do que com a variável x.

Para calcular a média de y, vamos multiplicar cada valor pela frequência, somar tudo, e dividir o resultado pelo total de observações, que é 40.

Estaturas (cm)	Frequência (f_i)	Ponto Médio (x_i)	y	$y \cdot f_i$
150 – 154	4	152	0	0 x 4 = 0
154 – 158	9	156	1	1 x 9 = 9
158 – 162	11	160	2	2 x 11 = 22
162 – 166	8	164	3	3 x 8 = 24
166 – 170	5	168	4	4 x 5 = 20
170 – 174	3	172	5	3 x 5 = 15
Total	40			

A média é:

$$\overline{y} = \frac{0 + 9 + 22 + 24 + 20 + 15}{40} = \frac{90}{40} = 2{,}25$$

Mas essa é a média da variável transformada. Queremos calcular a média da variável original. Eis a relação entre as variáveis.

$$y = \frac{x - 152}{4}$$

Agora é só substituir as variáveis por suas médias.

$$2{,}25 = \frac{\overline{x} - 152}{4}$$

$$2{,}25 \times 4 = \overline{x} - 152$$

$$\overline{x} - 152 = 9$$

$$\overline{x} = 161$$

Obtivemos exatamente o mesmo valor.

Amplitude de uma classe é a diferença entre os limites da classe. Por exemplo, na classe 154-158, a amplitude é $158 - 154 = 4$.

Quando todas as classes possuem a mesma amplitude (observe que todas as classes têm amplitude igual a 4), vale muito a pena fazer exatamente a mesma mudança de variável que fizemos no último exemplo.

Qual foi a mudança de variável? Eu subtraí o primeiro ponto médio (152) e depois dividi todos os valores pela amplitude das classes (4). Quando você faz isso, você SEMPRE vai obter a sequência dos números naturais.

Em outras palavras, se as amplitudes forem todas iguais, você pode aplicar a seguinte mudança de variável:

$$y = \frac{x - x_1}{h}$$

Em que x_1 é o primeiro ponto médio e h é a amplitude das classes. Se você utilizar essa variável, você sempre obterá os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... (números naturais) na coluna da nova variável.

Vou mostrar outro exemplo. Observe a tabela a seguir.

Classes	Frequências
40 – 50	2
50 – 60	5
60 – 70	7
70 – 80	8
80 – 90	3

Uma maneira de calcular a média desses valores é através dos pontos médios das classes.

Primeiro, calculamos os pontos médios. Depois multiplicamos cada ponto médio pela sua respectiva frequência. Depois somamos todos os valores e dividimos pela soma das frequências. Observe.

Classes	Frequências	x_i	$x_i \cdot f_i$
40 – 50	2	45	2 x 45 = 90
50 – 60	5	55	5 x 55 = 275
60 – 70	7	65	7 x 65 = 455
70 – 80	8	75	8 x 75 = 600
80 – 90	3	85	3 x 85 = 255

Basta-nos somar os valores da última coluna e dividir pela soma das frequências.

$$\overline{x} = \frac{90 + 275 + 455 + 600 + 255}{2 + 5 + 7 + 8 + 3}$$

$$\overline{x} = \frac{1.675}{25}$$

$$\overline{x} = 67$$

Vamos agora calcular a média com a variável transformada. Perceba que todas as amplitudes são iguais a 10, ou seja, $h = 10$. Observe também que o primeiro ponto médio é $x_1 = 45$.

A nossa variável transformada será:

$$y = \frac{x - x_1}{h}$$

$$y = \frac{x - 45}{10}$$

Ao utilizar essa variável que sugeri, obteremos os números 0, 1, 2, 3, 4.

Classes	Frequências	y
40 – 50	2	0
50 – 60	5	1
60 – 70	7	2
70 – 80	8	3
80 – 90	3	4

Guilherme, estou com medo. Certeza que sempre vai aparecer 0, 1, 2, 3, 4, ...?

É claro! Você acha que eu iria te ensinar um negócio que dá certo às vezes? A única preocupação que você precisa ter é verificar se todas as amplitudes são iguais.

Se não forem, você não pode ir de cara colocando os números 0, 1, 2, 3, 4... . Quando as amplitudes não são todas iguais, eu sugiro que você apenas utilize adição ou subtração na mudança de variável, ou simplesmente não utilize mudança de variável. Vá direto calcular a média utilizando os pontos médios.

Vamos agora calcular a média dessa variável y.

Classes	Frequências	y	$y \cdot f_i$
40 – 50	2	0	2 x 0 = 0
50 – 60	5	1	5 x 1 = 5
60 – 70	7	2	7 x 2 = 14
70 – 80	8	3	8 x 3 = 24
80 – 90	3	4	3 x 4 = 12

A média de y é:

$$\overline{y} = \frac{0 + 5 + 14 + 24 + 12}{2 + 5 + 7 + 8 + 3} = \frac{55}{25} = 2{,}2$$

Agora voltamos à relação entre as variáveis para calcular a média original.

$$y = \frac{x - 45}{10}$$

$$2{,}2 = \frac{\overline{x} - 45}{10}$$

$$22 = \overline{x} - 45$$

$$\overline{x} = 67$$

7. MÉDIA GEOMÉTRICA

Vimos que a média aritmética é um número que pode substituir todos os elementos de uma lista de números preservando a soma dos números.

Se, em vez da soma, quisermos preservar o produto dos números, teremos a média geométrica.

Considere, por exemplo, os números 1, 3, 3 e 9. O produto destes números é $1 \times 3 \times 3 \times 9 = 81$.

Observe que se substituirmos todos os números por 3, o produto continuará sendo 81.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

Dizemos, portanto, que 3 é a média geométrica dos números 1, 3, 3 e 9.

O raciocínio para chegar à fórmula da média geométrica é análogo ao raciocínio da média aritmética.

Considere que temos uma lista de n números $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. O produto dos termos desta lista é igual a $\underbrace{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}_{n\ fatores}$.

A média geométrica desta lista é um número G tal que se ele substituir todos os elementos da lista, o produto total será exatamente o mesmo.

A nossa nova lista de números após a substituição será $(\underbrace{G, G, \dots, G}_{n\ elementos})$.

O produto dos termos desta nova lista é $\underbrace{G \cdot G \cdot \dots \cdot G}_{n\ fatores} = G^n$.

Como os produtos das duas listas são iguais, temos:

$$G^n = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

$$\boxed{G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}}$$

Assim, se forem 2 números apenas, calcularemos a raiz quadrada do produto dos números para calcular a média geométrica. Se forem 3 números, calcularemos a raiz cúbica, e assim por diante.

Exemplo: Calcular a média geométrica dos números 6, 8 e 36.

Resolução

Como são três números, devemos calcular a raiz cúbica do produto dos três números.

$$G = \sqrt[3]{6 \cdot 8 \cdot 36}$$

A melhor maneira para calcular a raiz cúbica é fatorar os números.

6	2	8	2	36	2
3	3	4	2	18	2
1		2	2	9	3
		1		3	3
				1	

Deixe-me explicar o processo de fatoração. Tomemos, por exemplo, o número 36. Perceba que 36 é divisível por 2. O primeiro passo, portanto, é dividir 36 por 2. O resultado é 18.

Então, você percebe que 18 também é divisível por 2 e o resultado da divisão é 9. O número 9 não é divisível por 2, mas é divisível por 3. Você efetua então a divisão de 9 por 3 e chega ao número 3. Finalmente, 3 é divisível por 3 e acaba a fatoração.

Desta forma, temos que $6 = 2^1 \cdot 3^1$, $8 = 2^3$ e $36 = 2^2 \cdot 3^2$.

Ficamos com:

$$G = \sqrt[3]{6 \cdot 8 \cdot 36}$$

$$G = \sqrt[3]{2^1 \cdot 3^1 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2}$$

Para multiplicar potências de mesma base, repetimos base e somamos os expoentes. Assim, $2^1 \cdot 2^3 \cdot 2^2 = 2^{1+3+2} = 2^6$ e $3^1 \cdot 3^2 = 3^{1+2} = 3^3$. Ficamos com:

$$G = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3}$$

Como a raiz é cúbica, devemos dividir cada expoente por 3. Se a raiz fosse quadrada, bastaria dividir cada expoente por 2, e assim por diante.

$$G = 2^{6/3} \cdot 3^{3/3}$$

$$G = 2^2 \cdot 3^1 = 4 \cdot 3 = 12$$

A média geométrica dos números 6, 8 e 36 é 12.

Observe que o produto dos números da lista é $6 \times 8 \times 36 = 1.728$. Se substituirmos os três números por 12, o produto será $12 \times 12 \times 12 = 1.728$.



> Observe que só definimos a média geométrica para números não-negativos. Desta forma, não caímos em casos em que a média geométrica não existe.
>
> Por exemplo, é impossível calcular a média geométrica entre 2 e -8, porque não existe no campo dos número reais a raiz quadrada de -16.

8. MÉDIA HARMÔNICA

Sabemos que a média aritmética é um número que pode substituir todos os elementos de uma lista de números preservando a soma dos números.

Sabemos também que a média geométrica é um número que pode substituir todos os elementos e uma lista de números preservando o produto dos números.

Se, em vez da soma ou do produto, quisermos preservar A SOMA DOS INVERSOS dos números, teremos a média harmônica.

Considere, por exemplo, os números 20 e 30. Vamos calcular a soma dos inversos desses números.

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=$$

$$=\frac{3+2}{60}=\frac{5}{60}$$

$$=\frac{1}{12}$$

Observe que se substituirmos todos os números por 24, a soma dos inversos continuará sendo 1/12.

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{2}{24}=$$

$$=\frac{1}{12}$$

Dizemos, portanto, que 24 é a média harmônica dos números 20 e 30.

O raciocínio para chegar à fórmula da média harmônica é análogo ao raciocínio da média aritmética ou da média geométrica.

Considere que temos uma lista de n números $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. A soma dos inversos dos termos desta lista é igual a

$$\underbrace{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}_{n\ fatores}$$

A média harmônica desta lista é um número H tal que se ele substituir todos os elementos da lista, a soma dos inversos continuará sendo a mesma..

A nossa nova lista de números após a substituição será $(\underbrace{H, H, \dots, H}_{n\ elementos})$.

A soma dos inversos dos termos desta nova lista é

$$\underbrace{\frac{1}{H}+\frac{1}{H}+\cdots+\frac{1}{H}}_{n\ fatores}=\frac{n}{H}$$

Como as somas dos inversos das duas listas são iguais, temos:

$$\frac{n}{H}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}$$

$$n = H \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

$$\boxed{H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}}$$

Matemáticos adoram frases de efeito para descrever suas propriedades, fórmulas e teoremas. Assim, muitos descrevem a média harmônica como o inverso da média aritmética dos inversos.

Como assim?

Vamos lá. Inverso da média dos inversos. Comecemos por "inverso". Inverso quer dizer 1 sobre alguma coisa.

$$\frac{1}{\quad}$$

Essa "alguma coisa" é a média dos inversos.

Para calcular a média dos inversos, devemos somar todos os inversos e dividir por n.

$$\frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}}$$

Para efetuar essa divisão, devemos repetir o numerador 1 e multiplicar pelo inverso do denominador.

$$1 \times \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} =$$

$$= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Esse blá-blá-blá foi apenas para você entender casos alguém te diga que a média harmônica é o inverso da média aritmética dos inversos. O que interessa mesmo é a fórmula e o passo a passo.

Observe o passo a passo para calcular a média harmônica.

O primeiro passo é calcular a soma dos inversos destes números.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}$$

Em seguida, é só dividir n (o número de termos) pela soma obtida.

$$\boxed{H=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}}$$

Exemplo: Calcular a média harmônica dos números 6 e 9.

Resolução

O primeiro passo é calcular a soma dos inversos destes números.

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{3+2}{18}=\frac{5}{18}$$

Agora é só dividir o número de termos (2) por esta soma obtida.

$$H=\frac{2}{5/18}=2\times\frac{18}{5}=7{,}2$$

Exemplo: Calcular a média harmônica dos números 20 e 30.

Resolução

O primeiro passo é calcular a soma dos inversos destes números.

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{3+2}{60}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$$

Agora é só dividir o número de termos (2) por esta soma obtida.

$$H = \frac{2}{1/12} = 2 \times \frac{12}{1} = 24$$

No caso particular em que o número de termos é igual a 2, podemos obter a média harmônica pela seguinte fórmula:

$$H = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}$$

Esta fórmula só pode ser usada se forem DOIS números, beleza?

Em outras palavras, a média harmônica de DOIS números é o dobro do produto dividido pela soma dos números.

Nos nossos exemplos, temos:

$$H = \frac{2 \times 6 \times 9}{6 + 9} = \frac{108}{15} = 7{,}2$$

$$H = \frac{2 \times 20 \times 30}{20 + 30} = \frac{1.200}{50} = 24$$



Observe que só definimos a média harmônica para números positivos. Desta forma, não caímos em casos em que a média harmônica não existe.

Por exemplo, é impossível calcular a média harmônica entre 2 e -2, porque cairíamos em uma divisão por 0, o que é impossível.

9. DESIGUALDADE DAS MÉDIAS

Considere uma lista de números positivos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Se $\overline{x}$ é a média aritmética, G é a média geométrica, e H é a média harmônica então $\overline{x} \geq G \geq H$. A igualdade ocorre quando todos os números da lista são iguais.

Em outras palavras, se pelo menos um número da lista é diferente dos demais, a média aritmética será SEMPRE maior que a média geométrica e esta será maior do que a média harmônica. Se todos os números forem iguais, então as médias serão iguais.

Tomemos como exemplo os números 2 e 18.

A média aritmética é

$$\overline{x} = \frac{2 + 18}{2} = 10$$

A média geométrica é

$$G = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$$

A média harmônica é

$$H = \frac{2 \times 2 \times 18}{2 + 18} = 3{,}6$$

Como era de se esperar, a média aritmética é maior que a média geométrica e a média geométrica é maior do que a média harmônica.

Observe ainda que a média aritmética, a média geométrica e a média harmônica dos números 4, 4 e 4 são iguais a 4.

$$\overline{x} = \frac{4 + 4 + 4}{3} = 4$$

$$G = \sqrt[3]{4 \cdot 4 \cdot 4} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

$$H = \frac{3}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{3}{3/4} = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

HORA DE PRATICAR!

(CESPE 2012/ANAC)

nota	contagem
0	27
1	6
2	5
3	7
4	2
5	3

Considerando que uma pesquisa de satisfação referente a um novo terminal de passageiros tenha sido realizada com 50 pessoas e o resultado em uma amostra de notas conforme apresentado na tabela acima, julgue os itens seguintes.

A média geométrica da distribuição das notas foi superior à média aritmética.

Comentários:

A tabela mostra que 27 pessoas deram nota 0, 6 pessoas deram nota 1, e assim por diante.

Se você fosse calcular a média geométrica, deveria multiplicar os 50 números e calcular a raiz de índice 50.

Mas essa média geométrica é muito fácil de calcular. Como zero é um dos fatores, o produto é zero e, consequentemente, a média geométrica é zero.

$$G = \sqrt[50]{\underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 5}_{50\ fatores}} = \sqrt[50]{0} = 0$$

A média aritmética seria dada por:

$$\overline{x} = \frac{0 + 0 + 0 + \cdots + 1 + 1 + \cdots + 5 + 5}{50}$$

A média aritmética é claramente maior que zero e, portanto, o item está errado.

Mas na verdade você não precisaria perder nem um segundo sequer pensando nisso. A desigualdade das médias afirma que se pelo menos um número for diferente dos demais, a média aritmética SEMPRE será MAIOR que a média geométrica.

Gabarito: Errado

LISTA DE QUESTÕES DE CONCURSOS ANTERIORES SEM COMENTÁRIOS

01. (NC-UFPR 2018/Câmara Municipal de Quitandinha)

Pedro obteve média 6,7 nas quatro provas que fez. Que nota ele deverá obter na quinta prova, para que sua média seja 7,0?

a) 6,9.
b) 7,3.
c) 7,9.
d) 8,2.
e) 8,8.

02. (UFPR 2018/UFPR)

Considere a sequência de números cujo primeiro elemento é $x_1 = 1$ e os demais são calculados como a média entre 1/3 e o elemento anterior. Assim, o segundo e terceiro elementos, respectivamente x_2 e x_3, são dados por

$$x_2 = \frac{x_1 + 1/3}{2} = \frac{1 + 1/3}{2} = 2/3,$$

$$x_3 = \frac{x_2 + 1/3}{2} = \frac{2/3 + 1/3}{2} = 1/2\,.$$

Sendo assim, o quinto elemento dessa sequência é:

a) 3/2.
b) 5/6.
c) 4/5.
d) 3/4.
e) 3/8.

03. (FCC 2018/SABESP)

Para que a média aritmética dos números: 8, 8, 1, 10, 11, 12, 7, 2, 10, 6, x e 5 seja 7, o valor de x deverá ser

a) 2

b) 4

c) 8

d) 5

e) 3

04. (FCC 2018/TRT 15ª Região)

Os funcionários de um Tribunal estão alocados em 21 equipes de trabalho distintas, cada uma delas com pelo menos um funcionário. A média da quantidade de funcionários de cada uma dessas equipes é 13. Assim, a quantidade de funcionários da maior equipe de trabalho desse Tribunal é,

a) no mínimo, 18.

b) no máximo, 13.

c) no mínimo, 14.

d) no máximo, 26.

e) no mínimo, 13.

05. (FCC 2018/TRT 15ª Região)

Um Tribunal Regional do Trabalho celebrou acordos conciliatórios no valor de R$ 1,210 milhão. Em 55 audiências independentes umas das outras, o percentual de audiências com acordo foi de 40%.

(Adaptado de: **http://portal.trt15.jus.br/** Acessado em: 30/03/18)

Considerando apenas as audiências em que houve acordo, o valor médio dos acordos por audiência foi de

a) R$ 5.500,00.

b) R$ 55.000,00.

c) R$ 88.000,00.

d) R$ 8.800,00.

e) R$ 36.600,00.

06. (FCC 2017/SABESP)

A média aritmética de três números **a**, **b** e **c** é 20. A média aritmética de a e b é 16. O valor de c é igual a

a) 24.

b) 26.

c) 30.

d) 28.

e) 32.

07. (CESPE 2018/ABIN)

	evolução da quantidade de docentes por etapa de ensino Brasil 2013 – 2017			
ano	educação infantil	anos iniciais do ensino fundamental	anos finais do ensino fundamental	ensino médio
2013	478.811	750.366	802.902	507.617
2014	502.445	757.950	797.577	522.426
2015	518.308	758.840	786.140	522.826
2016	540.567	763.927	778.561	519.883
2017	557.541	761.737	764.731	509.814
soma total das quantidades de docentes no período	2.597.672	3.792.820	3.929.911	2.582.566

Com base nos dados da tabela anterior, extraídos do Relatório das Notas Estatísticas do Censo Escolar de 2017, do INEP, julgue os itens a seguir.

A média do quantitativo de docentes do ensino médio entre os anos de 2013 e 2017 foi superior à média do quantitativo de docentes da educação infantil para o mesmo período.

08. (CESPE 2017/SEE-DF)

Iniciado em 2007, o processo gradativo de substituição do sinal de TV analógico pelo digital no Brasil começou a concretizar-se em 2016. Nesse período, intensificou-se o uso da TV por assinatura, segundo dados do IBGE. A tabela a seguir mostra o percentual aproximado de domicílios brasileiros que dispunham de diferentes modalidades de acesso a TV em 2014.

zona	sinal digital de TV aberta	TV por assinatura	antena parabólica
urbana	44%	36%	32%
rural	16%	8%	79%

IBGE (com adaptações).

Considerando essas informações e o fato de que, em 2014, 86% dos domicílios brasileiros situavam-se na zona urbana, julgue os itens subsequentes.

Mais de 10% dos domicílios urbanos brasileiros tinham acesso a programação de TV por meio de mais de uma das modalidades que constam da tabela.

09. (CESPE 2017/SEE-DF)

Iniciado em 2007, o processo gradativo de substituição do sinal de TV analógico pelo digital no Brasil começou a concretizar-se em 2016. Nesse período, intensificou-se o uso da TV por assinatura, segundo dados do IBGE. A tabela a seguir mostra o percentual aproximado de domicílios brasileiros que dispunham de diferentes modalidades de acesso a TV em 2014.

zona	sinal digital de TV aberta	TV por assinatura	antena parabólica
urbana	44%	36%	32%
rural	16%	8%	79%

IBGE (com adaptações).

Considerando essas informações e o fato de que, em 2014, 86% dos domicílios brasileiros situavam-se na zona urbana, julgue os itens subsequentes.

Em 2014, havia acesso ao sinal digital de TV aberta em mais de 50% dos domicílios brasileiros.

10. (CESPE 2017/PM-AL)

Em um tanque A, há uma mistura homogênea de 240 L de gasolina e 60 L de álcool; em outro tanque B, 150 L de gasolina estão misturados homogeneamente com 50 L de álcool.

A respeito dessas misturas, julgue os itens subsequentes.

Considere que em um tanque C, inicialmente vazio, tenham sido despejadas certas quantidades das misturas dos tanques A e B totalizando 100 L. Considere também que, depois de homogeneizada essa mistura no tanque C, a separação de álcool e gasolina por um processo químico tenha mostrado que nesses 100 L, 22 L eram de álcool. Nessa situação, para formar essa mistura no tanque C foram usados mais de 55 L da mistura do tanque A.

11. (CESPE 2012/TCE-RS)

Uma instituição possui 15 empregados: 2 da referência A, 4 da B e 9 da referência C. O salário mensal de cada empregado da referência C é igual a R$ 2.000,00; o de cada empregado da referência B, R$ 3.500,00; e o salário mensal de cada empregado da referência A é igual a R$ 5.000,00.

Se 6 empregados dessa instituição são do sexo masculino, então o salário médio dos homens que nela trabalham está entre R$ 2.000,00 e R$ 4.000,00.

12. (CESPE 2011/CBM-DF)

Uma cidade, localizada em uma região plana, foi planejada de modo que suas ruas fossem todas retilíneas e os quarteirões, quadrados com 500 m de lado. Representada a cidade em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, o eixo positivo Ox aponta para o leste e o eixo positivo Oy, para o norte, com distâncias medidas em quilômetros; as ruas de maior trânsito, Monteiro Lobato e Olavo Bilac, são expressas pelas equações 3x + 4y = 10 e 3x + 4y = 30, respectivamente. O quartel do corpo de bombeiros localiza-se na esquina da rua Monteiro Lobato com a rua Rui Barbosa, perpendiculares entre si, tendo saída para essas duas ruas. A fim de otimizar o atendimento às ocorrências de acidentes, uma viatura fica estacionada na esquina da Olavo Bilac com a Rui Barbosa. A tabela a seguir apresenta a média mensal de acidentes de trânsito em ruas da cidade, nos últimos 12 meses.

rua	acidentes por mês (média)
Monteiro Lobato	14
Olavo Bilac	10
todas as outras ruas paralelas à Monteiro Lobato	6

Infere-se das informações apresentadas que, nos últimos 12 meses, ocorreram menos de 350 acidentes de trânsito na cidade em questão.

13. (CESPE 2011/CBM-DF)

Uma cidade, localizada em uma região plana, foi planejada de modo que suas ruas fossem todas retilíneas e os quarteirões, quadrados com 500 m de lado. Representada a cidade em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, o eixo positivo Ox aponta para o leste e o eixo positivo Oy, para o norte, com distâncias medidas em quilômetros; as ruas de maior trânsito, Monteiro Lobato e Olavo Bilac, são expressas pelas equações $3x + 4y = 10$ e $3x + 4y = 30$, respectivamente. O quartel do corpo de bombeiros localiza-se na esquina da rua Monteiro Lobato com a rua Rui Barbosa, perpendiculares entre si, tendo saída para essas duas ruas. A fim de otimizar o atendimento às ocorrências de acidentes, uma viatura fica estacionada na esquina da Olavo Bilac com a Rui Barbosa. A tabela a seguir apresenta a média mensal de acidentes de trânsito em ruas da cidade, nos últimos 12 meses.

rua	acidentes por mês (média)
Monteiro Lobato	14
Olavo Bilac	10
todas as outras ruas paralelas à Monteiro Lobato	6

Sabendo-se que a cidade tem pelo menos 10 ruas paralelas à rua Monteiro Lobato, é correto afirmar que, em média, ocorreram menos de 4 acidentes de trânsito nessas ruas nos últimos 12 meses.

14. (CESPE 2011/CBM-DF)

O governador do estado do Rio de Janeiro, Sérgio Cabral, voltou a defender a política de reajuste salarial oferecida pelo governo ao corpo de bombeiros, que prevê ganhos de 1% a cada mês em relação ao salário do mês imediatamente anterior até 2014. O governador afirmou que o efetivo de bombeiros do Rio é proporcionalmente muito superior ao de todos os estados. "O Rio de Janeiro tem 16.500 bombeiros militares, com 16 milhões de habitantes. São Paulo, com 40 milhões de habitantes, tem 8.500 bombeiros. Minas Gerais tem 20 milhões de habitantes e 5 mil bombeiros militares. Sergipe, referência de excelente salário, tem 630 bombeiros. De maneira que nós temos de ter responsabilidade. Esta política tem de seguir uma estratégia, que não é a ideal, mas é a possível." Segundo números apresentados pelo governo fluminense, o efetivo de bombeiros do Rio de Janeiro corresponde a 25% do total de bombeiros em todo o país.

Internet: <www.correiobraziliense.com.br> (com adaptações).

Com referência ao texto apresentado acima, julgue os itens:

Segundo as informações do texto, entre os estados citados a quantidade média de bombeiros é superior a 7.600.

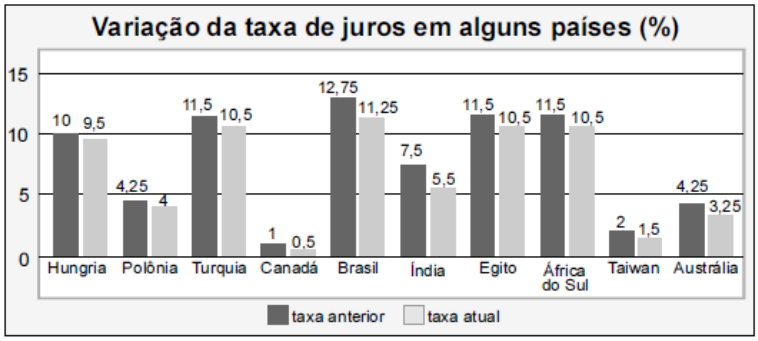
15. (CESPE 2010/SEFAZ-ES)

órgão	despesa total com salários de pessoal (× R$ 10.000)	quantidade de cargos comissionados	quantidade de cargos efetivos
A	100	40	180
B	120	40	182
C	150	50	220
D	180	100	230

Considere que, a fim de avaliar despesas com salários do pessoal lotado em órgãos do Poder Executivo, determinada secretaria de fazenda decidiu fazer um levantamento em quatro órgãos em relação ao mês de agosto de 2009. Os dados observados estão apresentados na tabela acima. Com base nessas informações, julgue os próximos itens.

Em agosto de 2009, os salários médios do pessoal nesses órgãos foram superiores a R$ 4.500,00.

16. (CESPE 2009/BB)



Tendo como referência a figura acima, que mostra os valores das taxas de juros anuais, em dois anos consecutivos, denominados anterior e atual, em 10 países, julgue os itens seguintes.

O valor médio das taxas atuais dos 10 países em questão é inferior a 5%.

17. (CESPE 2009/ANTAC)

	variável	2003	2004	2005	2006	2007
exportação	X	40	46	50	52	54
importação	Y	20	21	22	24	27
total	X + Y	60	67	72	76	81

Internet: <www.portodesantos.com> (com adaptações).

Considerando a tabela acima, que apresenta a movimentação anual de cargas no porto de Santos de 2003 a 2007, em milhões de toneladas/ano e associa as quantidades de carga movimentadas para exportação e importação às variáveis X e Y, respectivamente, julgue os itens subsequentes.

A média das diferenças X - Y no período mostrado foi superior a 25,5 milhões de toneladas/ano.

18. (CESPE 2008/PRF)

Ficou pior para quem bebe

O governo ainda espera a consolidação dos dados do primeiro mês de aplicação da Lei Seca para avaliar seu impacto sobre a cassação de CNHs. As primeiras projeções indicam, porém, que as apreensões subirão, no mínimo, 10%. Antes da vigência da Lei Seca, eram suspensas ou cassadas, em média, aproximadamente 155.000 CNHs por ano. Se as previsões estiverem corretas, a média anual deve subir para próximo de 170.000. A tabela a seguir mostra esses resultados nos últimos anos (fonte: DENATRAN).

ano	CNHs	
	concedidas (em milhões)	suspensas ou cassadas
2003	1,8	148.500
2004	3,4	314.200
2005	3,2	115.700
2006	2,2	98.800
2007	2,8	112.100
2008	1,5*	64.500*
total	14,9	853.900

* dados de janeiro a junho

Veja, ed. 2.072, 6/8/2008, p. 51 (com adaptações).

Para que a média de CNHs suspensas ou cassadas, de 2003 a 2008, atinja o valor previsto de 170.000, será necessário que, em 2008, a quantidade de CNHs suspensas ou cassadas seja um número

A) inferior a 180.000.

B) superior a 180.000 e inferior a 200.000.

C) superior a 200.000 e inferior a 220.000.

D) superior a 220.000 e inferior a 240.000.

E) superior a 240.000.

19. (CESPE 2008/PRF)

O gráfico a seguir, que ilustra a previsão das reservas monetárias de alguns países, em 2008, deve ser considerado para o julgamento dos itens.



Com base nas informações do gráfico apresentado acima, julgue os seguintes itens.

Entre as reservas apresentadas no gráfico, apenas as da Rússia e da China superam a média aritmética das reservas de todos eles.

20. (CESPE 2016/FUNPRESP)

adesão ao plano	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
salário (em R$)	5.000	8.000	4.000	6.000	2.000	3.000	4.000	4.000	4.500	7.000

Considerando que os dados na tabela mostram salários de diferentes servidores que aderiram (1) ou não aderiram (0) a determinado plano de previdência complementar, julgue o item subsecutivo.

A média dos salários do grupo que aderiu ao plano de previdência complementar é menor que a do que não aderiu ao plano.

21. (CESPE 2015/TELEBRAS/Técnico em Gestão de Telecomunicações)

A equipe de atendentes de um serviço de telemarketing é constituída por 30 empregados, divididos em 3 grupos, que trabalham de acordo com a seguinte escala.

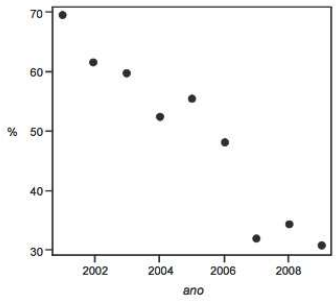
- Grupo I: 7 homens e 3 mulheres, que trabalham das 6 h às 12 h.

- Grupo II: 4 homens e 6 mulheres, que trabalham das 9 h às 15 h.

- Grupo III: 1 homem e 9 mulheres, que trabalham das 12 h às 18 h. A respeito dessa equipe, julgue o item que se segue.

Se, nesse serviço de telemarketing, a média das idades das atendentes for de 21 anos e a média das idades dos atendentes for de 31 anos, então a média das idades de todos os 30 atendentes será de 26 anos.

22. (CESPE 2015/DEPEN/Agente Penitenciário)



Dado que a participação dos presidiários em cursos de qualificação profissional é um aspecto importante para a reintegração do egresso do sistema prisional à sociedade, foram realizados levantamentos estatísticos, nos anos de 2001 a 2009, a respeito do valor da educação e do trabalho em ambientes prisionais. Cada um desses levantamentos, cujos resultados são apresentados no gráfico, produziu uma estimativa anual do percentual P de indivíduos que participaram de um curso de qualificação profissional de curta duração, mas que não receberam o diploma por motivos diversos. Em 2001, 69,4% dos presidiários que participaram de um curso de qualificação profissional não receberam o diploma. No ano seguinte, 2002, esse percentual foi reduzido para 61,5%, caindo, em 2009, para 30,9%.

A partir das informações e do gráfico apresentados, julgue os itens que se seguem.

Caso a quantidade total de presidiários participantes de um curso de qualificação profissional em 2001 seja igual a N, e esse total em 2002 seja igual a 2N, a estimativa do percentual P de indivíduos que participaram de um curso de qualificação profissional de curta duração e que não receberam o diploma por motivos diversos nos anos de 2001 e 2002 é inferior a 65%.

23. (CESPE 2015/DEPEN)

idade (x)	percentual
$18 \leq x < 25$	30%
$25 \leq x < 30$	25%
$30 \leq x < 35$	20%
$35 \leq x < 45$	15%
$45 \leq x < 60$	10%
total	100%

Felipe M. Monteiro, Gabriela R. Cardoso e Rafael da Silva. **A seletividade do sistema prisional brasileiro e as políticas de segurança pública**. *In*: **XV Congresso Brasileiro de Sociologia**, 26 a 29 de julho de 2011, Curitiba (PR). Grupo de Trabalho – Violência e Sociedade (com adaptações).

A tabela precedente apresenta a distribuição percentual de presos no Brasil por faixa etária em 2010, segundo levantamento feito por Monteiro et al. (2011), indicando que a população prisional brasileira nesse ano era predominantemente jovem. Com base nos dados dessa tabela, julgue os itens a seguir.

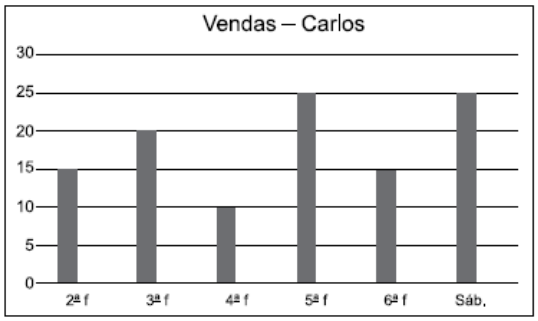
A maior parte da população prisional brasileira em 2010 era formada por pessoas com idades inferiores a 30 anos. Porém, a média da distribuição das idades dos presos no Brasil nesse ano foi superior a 30 anos.

24. (CESPE 2018/BNB)

Em uma faculdade, para avaliar o aprendizado dos alunos em determinada disciplina, o professor aplica as provas A, B e C e a nota final do aluno é a média ponderada das notas obtidas em cada prova. Na prova A, o peso é 1; na prova B, o peso é 10% maior que o peso na prova A; na prova C, o peso é 20% maior que o peso na prova B. Nesse caso, se P_A, P_B *e* P_C forem as notas obtidas por um aluno nas provas A, B e C, respectivamente, então a nota final desse aluno é expressa por $\frac{P_A+1,2P_B+1,32P_C}{3,52}$.

25. (VUNESP 2017/UNESP)

Utilize os dados do gráfico a seguir, que mostra o número de rascunho vendas realizadas pelo vendedor Carlos em seis dias de uma semana, para responder às questões.



A média diária de vendas de Carlos, nessa semana, é, aproximadamente, igual a

(A) 12.
(B) 15.
(C) 18.
(D) 20.
(E) 21.

26. (VUNESP 2018/CM Indaiatuba/Controlador Interno)

A tabela mostra o tempo gasto por um funcionário para ir e voltar no trajeto casa e trabalho em 5 dias da semana.

Funcionário	Casa-Trabalho	Trabalho-Casa
2ª feira	1h 12min	55min
3ª feira	58min	52min
4ª feira	1h 8min	1h 6min
5ª feira	1h 14min	1h 10min
6ª feira	1h 22min	1h 8min

Nessa semana, a diferença entre o tempo médio diário no sentido Casa-Trabalho e o tempo médio diário no sentido Trabalho-Casa é igual a

(A) 8min36s
(B) 8min42s
(C) 8min6s
(D) 8min18s
(E) 8min54s

27. (VUNESP 2018/IPSM São José dos Campos)

A média aritmética diária de vendas realizadas em seis dias por um estabelecimento comercial foi de R$ 6.700,00. Na tabela, constam os valores das vendas de alguns desses dias:

Dia da semana	Valor em vendas
Segunda-feira	R$ 4.800,00
Terça-feira	R$ 6.900,00
Quarta-feira	R$ 8.200,00
Quinta-feira	*x*
Sexta-feira	*y*
Sábado	*z*

Com base nas informações, é correto afirmar que a média aritmética diária dos três últimos dias de vendas é maior que a média aritmética diária dos seis dias em, aproximadamente,

(A) R$ 65,00.
(B) R$ 67,00.
(C) R$ 69,00.
(D) R$ 71,00.
(E) R$ 73,00.

28. (VUNESP 2018/PAULIPREV)

A média aritmética simples dos salários de 30 funcionários de uma empresa era R$ 1.610,00. Esses funcionários tiveram um aumento em seus salários de maneira que os que recebiam R$ 1.500,00 ou mais tiveram um acréscimo de R$ 20,00, e os que recebiam menos de R$ 1.500,00 tiveram um acréscimo de R$ 50,00. Após esse reajuste, a média dos salários dos 30 funcionários passou a ser R$ 1.641,00; logo o número de funcionários que tiveram um aumento de R$ 50,00 é um número entre

(A) 25 e 30.
(B) 19 e 24.
(C) 13 e 18.
(D) 7 e 12.
(E) 1 e 6.

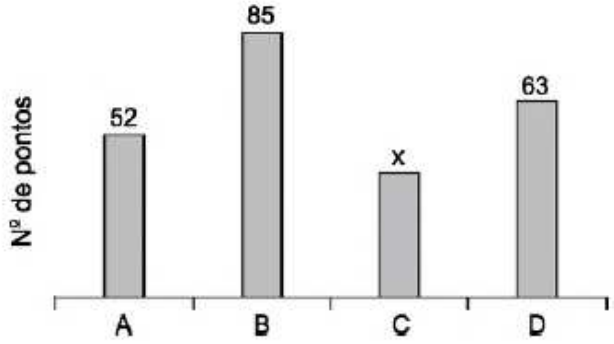
29. (VUNESP 2018/CM de São José dos Campos)

Em um grupo de 10 pessoas, duas têm 40 anos, quatro têm 21 anos, uma tem 25 anos e três têm a mesma idade. Sabendo-se que a média aritmética das idades dessas 10 pessoas é 22,5 anos, a soma das idades desconhecidas corresponde, da soma de todas as idades, a

(A) 12%
(B) 14%
(C) 16%
(D) 18%
(E) 20%

30. (VUNESP 2018/PM-SP)

O gráfico apresenta o número de pontos obtidos pelos grupos A, B, C e D, que participaram de uma atividade recreativa.



Sabendo que o número de pontos obtidos pelo grupo A foi 30% maior que o número de pontos obtidos pelo grupo C, então, na média, o número de pontos obtidos por um grupo foi

(A) 55.
(B) 60.
(C) 70.
(D) 65.
(E) 50.

31. (VUNESP 2017/PM-SP)

A média aritmética das idades dos cinco jogadores titulares de um time de basquete é 22 anos. Um dos jogadores titulares desse time, que tem 20 anos de idade, sofreu uma lesão e foi substituído por outro jogador, o que fez com que a nova média das idades dos cinco jogadores do time titular passasse a ser de 23 anos. Então, a idade do jogador que substituiu o jogador lesionado é

(A) 25 anos.
(B) 24 anos.
(C) 22 anos.
(D) 21 anos.
(E) 23 anos.

32. (VUNESP 2017/CM COTIA)

Em uma turma de alunos que pratica basquete, a menor altura é 1,67 m e a maior altura é 2,02 m. Um time formado por 5 alunos dessa turma foi sorteado, sendo a média aritmética das alturas desses 5 alunos igual a 1,89 m. Dentre os alunos sorteados, é correto afirmar, em relação a suas alturas, que

(A) pelo menos 3 têm 1,89 m ou mais.
(B) nenhum tem 1,67 m.
(C) no máximo 3 têm 2,02 m.
(D) algum tem menos de 1,89 m.
(E) no mínimo 2 têm 1,94 ou mais.

33. (VUNESP 2017/IPRESB)

A tabela mostra o número de horas extras de determinada semana, trabalhadas pelos funcionários de uma empresa.

Número de funcionários	Número de horas extras
3	5
2	4
4	6
?	3

Considerando-se o número total de funcionários que fizeram horas extras nessa semana, o número de horas extras por funcionário foi, na média, 4,25. O número de funcionários que fizeram 3 horas extras nessa semana foi

(A) 7.
(B) 6.
(C) 5.

(D) 4.
(E) 3.

34. (VUNESP 2018/CM de São José dos Campos)

Em um concurso, a nota final de cada candidato é calculada pela média aritmética ponderada das notas das três fases de avaliação previstas, com pesos 2, 3 e 5, para as primeira, segunda e terceira fases, respectivamente. Para ser classificado no concurso, o candidato tem que atingir nota final maior ou igual a 6. Sendo assim, um candidato que tirou notas 5 e 6 nas primeira e segunda fases, respectivamente, para ser classificado no concurso, precisa tirar, na terceira fase, uma nota mínima igual a

(A) 6,2.
(B) 6,4.
(C) 6,6.
(D) 6,8.
(E) 7,0.

35. (FCC 2013/DPE-RS)

A média geométrica dos números 4, 8 e 16 é

(A) maior que a respectiva média aritmética.
(B) inferior a 6.
(C) igual a 8.
(D) igual a 4.
(E) superior a 9.

36. (FGV 2011/SEFAZ-RJ)

Em uma repartição, foi tomada uma amostra do número de filhos de 4 funcionários. O resultado foi {2, 1, 4, 2}. A média geométrica simples dessa amostra é

a) 2,25
b) 1,75
c) 2
d) 2,4
e) 2,5

37. (FCC 2018/SEFAZ-GO)

Os matemáticos definem diferentes tipos de médias entre dois números positivos e, para cada aplicação, escolhem qual o tipo mais adequado a ser utilizado. A média harmônica H entre os números positivos a e b, por exemplo, é definida como o inverso da média aritmética dos inversos desses números, ou seja,

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}}$$

A média aritmética dos números 5 e 20 supera a média harmônica desses mesmos números em

a) 4,75 unidades.

b) 5 unidades.

c) 4 unidades.

d) 4,25 unidades.

e) 4,5 unidades.

38. (FCC 2017/ARTESP)

Considere as seguintes informações

I. (A) = média harmônica dos números 4, 6 e 12.

II. (B) = média geométrica dos números 4, 6 e 12.

A média aritmética entre (A) e (B) é igual a

a) 6,81.

b) 5,68.

c) 6,30.

d) 5,41.

e) 6,93.

39. (CESPE 2018/SEFAZ-RS)

Para a, b e c, números reais, positivos e distintos, são verdadeiras as seguintes propriedades:

- $a < c$
- $b < \frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}$

A partir dessas propriedades, é correto concluir que

a) $\frac{a+c}{2} < \frac{a+b+c}{3}$

b) $a > b$

c) $c < \frac{a+b}{2}$

d) $a < b < c$

e) $b > c$

40. (CESPE 2008/TST)

Considere que, em um ambiente de trabalho industrial, as seguintes medições acerca da poluição do ar tenham sido observadas: 1, 6, 4, 3, 2, 3, 1, 5, 1, 4. Nessa situação, julgue o item que se segue.

As médias harmônica e geométrica são ambas inferiores a 3.

GABARITO SEM COMENTÁRIO

GABARITO

01. D
02. E
03. B
04. E
05. B
06. D
07. Errado
08. Certo
09. Errado
10. Certo
11. Certo
12. Errado
13. Errado
14. Certo
15. Certo
16. Errado
17. Certo
18. D
19. Errado
20. Errado
21. Errado
22. Certo
23. Certo
24. Errado
25. C
26. A
27. B
28. D
29. C
30. B
31. A
32. C
33. A
34. B
35. C
36. C

37. E
38. C
39. D
40. Certo

LISTA DE QUESTÕES DE CONCURSOS COM COMENTÁRIOS



01. (NC-UFPR 2018/Câmara Municipal de Quitandinha)

Pedro obteve média 6,7 nas quatro provas que fez. Que nota ele deverá obter na quinta prova, para que sua média seja 7,0?

a) 6,9.
b) 7,3.
c) 7,9.
d) 8,2.
e) 8,8.

Resolução

Pedro obteve média 6,7 nas 4 provas que fez. Para calcular a soma total dos seus pontos, basta multiplicar a média pela quantidade de provas.

$$\boldsymbol{Soma = Média \times quantidade\ de\ termos}$$

Isso vem da própria definição de média. Observe:

$$\boldsymbol{Média = \frac{Soma}{Quantidade\ de\ termos}}$$

Assim, a soma dos pontos das 4 primeiras provas é:

$$\boldsymbol{Soma = 6,7 \times 4 = 26,8}$$

Queremos que a média suba para 7 após a realização da quinta prova. Assim, após as 5 provas, a soma total dos pontos será:

$$\boldsymbol{Soma = 7 \times 5 = 35}$$

Portanto, a nota que Pedro precisa tirar na quinta prova é justamente a diferença entre os totais de pontos.

$$35 - 26,8 = 8,2$$

A resposta está na alternativa D.

Observe que, até a 4ª prova, Pedro tinha 26,8 pontos somados. Se ele tirar 8,2 na quinta prova, ele terá 26,8 + 8,2 = 35 pontos em 5 provas e sua média será 35/5 = 7.

Gabarito: D

---

02. (UFPR 2018/UFPR)

Considere a sequência de números cujo primeiro elemento é $x_1 = 1$ e os demais são calculados como a média entre 1/3 e o elemento anterior. Assim, o segundo e terceiro elementos, respectivamente x_2 e x_3, são dados por

$$x_2 = \frac{x_1 + 1/3}{2} = \frac{1 + 1/3}{2} = 2/3,$$

$$x_3 = \frac{x_2 + 1/3}{2} = \frac{2/3 + 1/3}{2} = 1/2\,.$$

Sendo assim, o quinto elemento dessa sequência é:

a) 3/2.
b) 5/6.
c) 4/5.
d) 3/4.
e) 3/8.

Resolução

Vamos continuar a sequência. O quarto termo será dado pela média entre 1/2 e 1/3.

$$x_4 = \frac{x_3 + 1/3}{2} = \frac{1/2 + 1/3}{2} = \frac{5}{12}$$

O quinto termo será dado pela média entre 5/12 e 1/3.

$$x_5 = \frac{x_4 + 1/3}{2} = \frac{5/12 + 1/3}{2} = \frac{9/12}{2} = \frac{9}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

Observe que no numerador eu efetuei a soma de 5/12 com 1/3.

$$\frac{5}{12}+\frac{1}{3}=\frac{5+4}{12}=\frac{9}{12}$$

Gabarito: E

---

03. (FCC 2018/SABESP)

Para que a média aritmética dos números: 8, 8, 1, 10, 11, 12, 7, 2, 10, 6, x e 5 seja 7, o valor de x deverá ser

a) 2

b) 4

c) 8

d) 5

e) 3

Resolução

São 12 números. Para calcular a média deles, basta somar todos e dividir o resultado por 12. O resultado da média é igual a 7.

$$\frac{8+8+1+10+11+12+7+2+10+6+x+5}{12}=7$$

$$\frac{80+x}{12}=7$$

$$80+x=7\times 12$$

$$80+x=84$$

$$x=4$$

Gabarito: B

---

04. (FCC 2018/TRT 15ª Região)

Os funcionários de um Tribunal estão alocados em 21 equipes de trabalho distintas, cada uma delas com pelo menos um funcionário. A média da quantidade de funcionários de cada uma dessas equipes é 13. Assim, a quantidade de funcionários da maior equipe de trabalho desse Tribunal é,

a) no mínimo, 18.

b) no máximo, 13.

c) no mínimo, 14.

d) no máximo, 26.

e) no mínimo, 13.

Resolução

A média é de 13 funcionários por equipe.

Se a maior equipe tiver 12 funcionários, todas as outras equipes terão 12 funcionários ou menos. Dessa forma, é impossível que a média aritmética seja igual a 12.

Se a maior equipe tiver 13 funcionários, todas as outras equipes necessariamente também terão 13 funcionários, pois se alguma equipe tiver menos de 13 funcionários, a média será menor que 13.

Se a maior equipe tiver mais de 13 funcionários, necessariamente precisaremos ter equipes com menos de 13 funcionários de tal modo que a média seja igual a 13.

Portanto, a maior equipe precisa ter no mínimo 13 funcionários.

Gabarito: E

---

05. (FCC 2018/TRT 15ª Região)

Um Tribunal Regional do Trabalho celebrou acordos conciliatórios no valor de R$ 1,210 milhão. Em 55 audiências independentes umas das outras, o percentual de audiências com acordo foi de 40%.

(Adaptado de: **http://portal.trt15.jus.br/** Acessado em: 30/03/18)

Considerando apenas as audiências em que houve acordo, o valor médio dos acordos por audiência foi de

a) R$ 5.500,00.

b) R$ 55.000,00.

c) R$ 88.000,00.

d) R$ 8.800,00.

e) R$ 36.600,00.

Resolução

Houve acordo em 40% das audiências.

$$40\%\ de\ 55 = \frac{40}{100} \times 55 = 22\ acordos$$

Para calcular a média dos acordos, vamos dividir o total de R$ 1.210.000,00 pelos 22 acordos.

$$\frac{1.210.000}{22} = 55.000\ por\ acordo$$

Gabarito: B

---

06. (FCC 2017/SABESP)

A média aritmética de três números **a**, **b** e **c** é 20. A média aritmética de a e b é 16. O valor de c é igual a

a) 24.

b) 26.

c) 30.

d) 28.

e) 32.

Resolução

A média dos números a, b e c é 20.

$$\frac{a+b+c}{3} = 20$$

$$a+b+c = 60$$

A média dos números a e b é 16.

$$\frac{a+b}{2} = 16$$

$$a+b = 32$$

Vamos voltar à primeira equação obtida.

$$\underbrace{a+b}_{32} + c = 60$$

$$32 + c = 60$$

$$c = 28$$

Gabarito: D

---

07. (CESPE 2018/ABIN)

	evolução da quantidade de docentes por etapa de ensino Brasil 2013 – 2017			
ano	educação infantil	anos iniciais do ensino fundamental	anos finais do ensino fundamental	ensino médio
2013	478.811	750.366	802.902	507.617
2014	502.445	757.950	797.577	522.426
2015	518.308	758.840	786.140	522.826
2016	540.567	763.927	778.561	519.883
2017	557.541	761.737	764.731	509.814
soma total das quantidades de docentes no período	2.597.672	3.792.820	3.929.911	2.582.566

Com base nos dados da tabela anterior, extraídos do Relatório das Notas Estatísticas do Censo Escolar de 2017, do INEP, julgue os itens a seguir.

A média do quantitativo de docentes do ensino médio entre os anos de 2013 e 2017 foi superior à média do quantitativo de docentes da educação infantil para o mesmo período.

Resolução

Não precisamos calcular as médias propriamente ditas. Basta perceber que o total de docentes da educação infantil é superior ao total de docentes do ensino médio. Assim, a média do quantitativo de docentes da educação infantil é maior que a média do quantitativo de docentes do ensino médio. O item está errado.

Para treinar um pouco, vamos calcular as médias.

Nos 5 anos em questão, o total de docentes do ensino médio foi de 2.582.566. A média é

$$\overline{x_{EM}} = \frac{2.582.566}{5} = 516.513{,}2$$

Nos 5 anos, o total de docentes da educação infantil foi de 2.597.672. A média anual é de:

$$\overline{x_{EI}} = \frac{2.597.672}{5} = 519.534{,}4$$

Portanto, $\overline{x_{EM}} < \overline{x_{EI}}$.

Gabarito: Errado

---

08. (CESPE 2017/SEE-DF)

Iniciado em 2007, o processo gradativo de substituição do sinal de TV analógico pelo digital no Brasil começou a concretizar-se em 2016. Nesse período, intensificou-se o uso da TV por assinatura, segundo dados do IBGE. A tabela a seguir mostra o percentual aproximado de domicílios brasileiros que dispunham de diferentes modalidades de acesso a TV em 2014.

zona	sinal digital de TV aberta	TV por assinatura	antena parabólica
urbana	44%	36%	32%
rural	16%	8%	79%

IBGE (com adaptações).

Considerando essas informações e o fato de que, em 2014, 86% dos domicílios brasileiros situavam-se na zona urbana, julgue os itens subsequentes.

Mais de 10% dos domicílios urbanos brasileiros tinham acesso a programação de TV por meio de mais de uma das modalidades que constam da tabela.

Resolução

Somando os percentuais referentes à zona urbana, temos 44% + 36% + 32% = 112%. Isto quer dizer que 112% - 100% = 12% têm acesso a mais de uma modalidade.

Como 12% > 10%, já podemos dizer que o item está certo.

Vamos aproveitar a situação da questão para treinar o cálculo e aprender um pouco da utilidade da média ponderada.

Imagine que a questão pergunte: qual o percentual dos municípios brasileiros (englobando zona urbana e zona rural) que tem acesso a programação de TV pode meio de mais de uma das modalidades que constam da tabela?

Ora, já sabemos que 12% dos municípios da zona urbana tem acesso a mais de uma modalidade.

Somando os percentuais referentes à zona rural, temos 16% + 8% + 79% = 103%. Isto indica que 103% - 100% = 3% possuem acesso a mais de uma modalidade.

Em suma:

I) 12% dos domicílios situados na zona urbana têm acesso a mais de uma modalidade. A zona urbana comporta 86% dos domicílios.

II) 3% dos domicílios situados na zona rural têm acesso a mais de uma modalidade. A zona rural comporta 100% - 86% = 14% dos domicílios.

Assim, a média geral dos domicílios com acesso a mais de uma modalidade é a média ponderada em que os pesos de ponderação são o percentual de domicílios em cada zona.

$$\overline{x} = \frac{12\% \cdot 86\% + 3\% \cdot 14\%}{86\% + 14\%}$$

$$\overline{x} = \frac{12\% \cdot 86 + 3\% \cdot 14}{100}$$

$$\overline{x} = \frac{1.074\%}{100} = 10{,}74\%$$

Assim, 10,74% dos municípios brasileiros (englobando a zona rural e a zona urbana) têm acesso a mais de uma modalidade.

O item está certo porque 12% dos municípios da zona urbana têm acesso a mais de uma modalidade.

Gabarito: Certo

---

09. (CESPE 2017/SEE-DF)

Iniciado em 2007, o processo gradativo de substituição do sinal de TV analógico pelo digital no Brasil começou a concretizar-se em 2016. Nesse período, intensificou-se o uso da TV por assinatura, segundo dados do IBGE. A tabela a seguir mostra o percentual aproximado de domicílios brasileiros que dispunham de diferentes modalidades de acesso a TV em 2014.

zona	sinal digital de TV aberta	TV por assinatura	antena parabólica
urbana	44%	36%	32%
rural	16%	8%	79%

IBGE (com adaptações).

Considerando essas informações e o fato de que, em 2014, 86% dos domicílios brasileiros situavam-se na zona urbana, julgue os itens subsequentes.

Em 2014, havia acesso ao sinal digital de TV aberta em mais de 50% dos domicílios brasileiros.

Resolução

A zona urbana comporta 86% dos municípios brasileiros. Destes, 44% têm sinal digital de TV aberta.

A zona rural comporta 14% dos municípios brasileiros. Destes, 16% têm sinal digital de TV aberta.

A média geral será a média ponderada em que os pesos de ponderação são os percentuais de municípios em cada área.

$$\overline{x} = \frac{44\% \cdot 86\% + 16\% \cdot 14\%}{86\% + 14\%}$$

$$\overline{x} = \frac{44\% \cdot 86 + 16\% \cdot 14}{100}$$

$$\overline{x} = \frac{4.008\%}{100} = 40{,}08\%$$

Vamos resolver de outra maneira.

Suponha que há 10.000 domicílios. Desta forma, temos 8600 na zona urbana e 1400 na rural.

Dos domicílios na zona urbana, temos 44% com sinal digital de TV aberta. Isso corresponde a 44% de 8600 = 3.784 domicílios com sinal digital de TV aberta na zona urbana.

Dos domicílios na zona rural, temos 16% com sinal digital de TV aberta. Isso corresponde a 16% de 1.400 = 224 domicílios com sinal digital de TV aberta na zona rural.

O total de domicílios com sinal digital de TV aberta é 3.784 + 224 = 4.008.

Como o total de domicílios é 10.000, então isso corresponde a 4.008/10.000 = 40,08%.

Gabarito: Errado

---

10. (CESPE 2017/PM-AL)

Em um tanque A, há uma mistura homogênea de 240 L de gasolina e 60 L de álcool; em outro tanque B, 150 L de gasolina estão misturados homogeneamente com 50 L de álcool.

A respeito dessas misturas, julgue os itens subsequentes.

Considere que em um tanque C, inicialmente vazio, tenham sido despejadas certas quantidades das misturas dos tanques A e B totalizando 100 L. Considere também que, depois de homogeneizada essa mistura no tanque C, a separação de álcool e gasolina por um processo químico tenha mostrado que nesses 100 L, 22 L eram de álcool. Nessa situação, para formar essa mistura no tanque C foram usados mais de 55 L da mistura do tanque A.

Resolução

O tanque A possui 240 + 60 = 300 litros. Assim, o álcool representa 60/300 = 1/5 = 0,20 = 20% da mistura.

O tanque B possui 150 + 50 = 200 litros. O álcool representa 50/200 = 1/4 = 0,25 = 25% da mistura.

O tanque C possui 22/100 = 22% de álcool.

O percentual de álcool em C é uma média ponderada dos percentuais de álcool nos tanques A e B.

Os pesos de ponderação é justamente o que precisamos calcular.

Seja A o percentual do tanque C que foi retirado do tanque A e B o percentual do tanque C que foi retirado do tanque B. Temos que A + B = 100% = 1. Portanto, B = 1 – A.

$$22\% = \frac{20\% \cdot A + 25\% \cdot B}{A + B}$$

$$22\% = \frac{20\% \cdot A + 25\% \cdot B}{1}$$

$$22\% = 20\% \cdot A + 25\% \cdot B$$

Substituindo B por 1 – A, temos:

$$22 = 20 \cdot A + 25 \cdot (1 - A)$$

$$22 = 20A + 25 - 25A$$

$$5A = 3$$

$$A = \frac{3}{5} = 0{,}60 = 60\%$$

Isto quer dizer que 60% do volume de C foi retirado do tanque A. Como o tanque C possui 100 litros, então 60 litros de C vieram do tanque A.

Gabarito: Certo

---

11. (CESPE 2012/TCE-RS)

Uma instituição possui 15 empregados: 2 da referência A, 4 da B e 9 da referência C. O salário mensal de cada empregado da referência C é igual a R$ 2.000,00; o de cada empregado da referência B, R$ 3.500,00; e o salário mensal de cada empregado da referência A é igual a R$ 5.000,00.

Se 6 empregados dessa instituição são do sexo masculino, então o salário médio dos homens que nela trabalham está entre R$ 2.000,00 e R$ 4.000,00.

Resolução

Se os 6 empregados forem da referência C, eles formarão a menor média possível. Neste caso, como todos ganham R$ 2.000,00, então a média será igual a R$ 2.000,00.

Para calcular a maior média possível, devemos distribuir os 6 empregados nas referências A e B. Neste caso, vamos colocar 2 empregados na referência A (ganhando R$ 5.000,00) e 4 empregados na referência B (ganhando R$ 3.500,00). Neste caso, a média será:

$$\overline{x} = \frac{5.000 \cdot 2 + 3.500 \cdot 4}{6} = 4.000$$

Desta forma, a menor média possível é 2.000 e a maior média possível é 4.000.

Gabarito: Certo

---

12. (CESPE 2011/CBM-DF)

Uma cidade, localizada em uma região plana, foi planejada de modo que suas ruas fossem todas retilíneas e os quarteirões, quadrados com 500 m de lado. Representada a cidade em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, o eixo positivo Ox aponta para o leste e o eixo positivo Oy, para o norte, com distâncias medidas em quilômetros; as ruas de maior trânsito, Monteiro Lobato e Olavo Bilac, são expressas pelas equações 3x + 4y = 10 e 3x + 4y = 30, respectivamente. O quartel do corpo de bombeiros localiza-se na esquina da rua Monteiro Lobato com a rua Rui Barbosa, perpendiculares entre si, tendo saída para essas duas ruas. A fim de otimizar o atendimento às ocorrências de acidentes, uma viatura fica estacionada na esquina da Olavo Bilac com a Rui Barbosa. A tabela a seguir apresenta a média mensal de acidentes de trânsito em ruas da cidade, nos últimos 12 meses.

rua	acidentes por mês (média)
Monteiro Lobato	14
Olavo Bilac	10
todas as outras ruas paralelas à Monteiro Lobato	6

Infere-se das informações apresentadas que, nos últimos 12 meses, ocorreram menos de 350 acidentes de trânsito na cidade em questão.

Resolução

Somando os valores dados, temos que a média global de acidentes por mês é 14 + 10 + 6 = 30.

Desta forma, em 12 meses, ocorreram 30 x 12 = 360 acidentes.

Gabarito: Errado

---

13. (CESPE 2011/CBM-DF)

Uma cidade, localizada em uma região plana, foi planejada de modo que suas ruas fossem todas retilíneas e os quarteirões, quadrados com 500 m de lado. Representada a cidade em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, o eixo positivo Ox aponta para o leste e o eixo positivo Oy, para o norte, com distâncias medidas em quilômetros; as ruas de maior trânsito, Monteiro

Lobato e Olavo Bilac, são expressas pelas equações 3x + 4y = 10 e 3x + 4y = 30, respectivamente. O quartel do corpo de bombeiros localiza-se na esquina da rua Monteiro Lobato com a rua Rui Barbosa, perpendiculares entre si, tendo saída para essas duas ruas. A fim de otimizar o atendimento às ocorrências de acidentes, uma viatura fica estacionada na esquina da Olavo Bilac com a Rui Barbosa. A tabela a seguir apresenta a média mensal de acidentes de trânsito em ruas da cidade, nos últimos 12 meses.

rua	acidentes por mês (média)
Monteiro Lobato	14
Olavo Bilac	10
todas as outras ruas paralelas à Monteiro Lobato	6

Sabendo-se que a cidade tem pelo menos 10 ruas paralelas à rua Monteiro Lobato, é correto afirmar que, em média, ocorreram menos de 4 acidentes de trânsito nessas ruas nos últimos 12 meses.

Resolução

As ruas Monteiro Lobato e Olavo Bilac são paralelas. Assim, em média, temos 10 + 6 = 16 acidentes nas ruas paralelas à rua Monteiro Lobato por mês. Em um ano, são 16 x 12 = 192 acidentes.

Gabarito: Errado

---

14. (CESPE 2011/CBM-DF)

O governador do estado do Rio de Janeiro, Sérgio Cabral, voltou a defender a política de reajuste salarial oferecida pelo governo ao corpo de bombeiros, que prevê ganhos de 1% a cada mês em relação ao salário do mês imediatamente anterior até 2014. O governador afirmou que o efetivo de bombeiros do Rio é proporcionalmente muito superior ao de todos os estados. “O Rio de Janeiro tem 16.500 bombeiros militares, com 16 milhões de habitantes. São Paulo, com 40 milhões de habitantes, tem 8.500 bombeiros. Minas Gerais tem 20 milhões de habitantes e 5 mil bombeiros militares. Sergipe, referência de excelente salário, tem 630 bombeiros. De maneira que nós temos de ter responsabilidade. Esta política tem de seguir uma estratégia, que não é a ideal, mas é a possível.” Segundo números apresentados pelo governo fluminense, o efetivo de bombeiros do Rio de Janeiro corresponde a 25% do total de bombeiros em todo o país.

Internet: <www.correiobraziliense.com.br> (com adaptações).

Com referência ao texto apresentado acima, julgue os itens:

Segundo as informações do texto, entre os estados citados a quantidade média de bombeiros é superior a 7.600.

Resolução

Para calcular a média, basta somar os valores e dividir pela quantidade de estados considerados.

$$\overline{x} = \frac{8.500 + 16.500 + 5.000 + 630}{4} = 7.657,5$$

Gabarito: Certo

---

15. (CESPE 2010/SEFAZ-ES)

órgão	despesa total com salários de pessoal (× R$ 10.000)	quantidade de cargos comissionados	quantidade de cargos efetivos
A	100	40	180
B	120	40	182
C	150	50	220
D	180	100	230

Considere que, a fim de avaliar despesas com salários do pessoal lotado em órgãos do Poder Executivo, determinada secretaria de fazenda decidiu fazer um levantamento em quatro órgãos em relação ao mês de agosto de 2009. Os dados observados estão apresentados na tabela acima. Com base nessas informações, julgue os próximos itens.

Em agosto de 2009, os salários médios do pessoal nesses órgãos foram superiores a R$ 4.500,00.

Resolução

A despesa total no órgão A foi de 100 x 10.000 = 1.000.000 reais. Como são 220 cargos, a média é:

$$\overline{x_A} = \frac{1.000.000}{220} \cong 4.545,45 > 4.500$$

Observe que a despesa do órgão B foi maior que a despesa do órgão A e a quantidade de cargos é praticamente a mesma. Desta forma, já podemos afirmar que a média de B também é superior a 4.500.

A despesa total do órgão C foi de 150 x 10.000 = 1.500.000 reais e devemos dividir por 270 funcionários.

$$\overline{x_C} = \frac{1.500.000}{270} \cong 5.555,55 > 4.500$$

Finalmente, a despesa do órgão D foi de 180 x 10.000 = 1.800.000 reais para dividir por 330 funcionários.

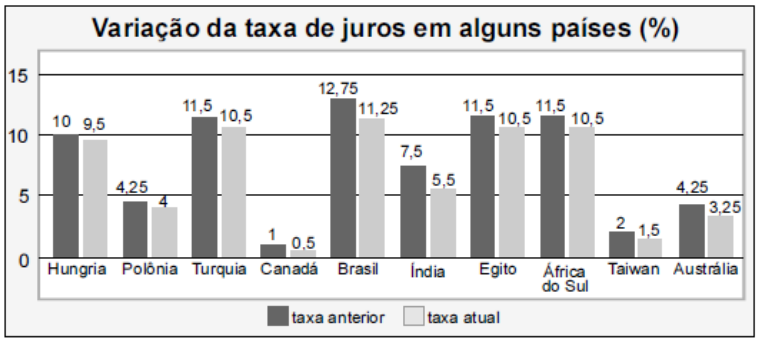
$$\overline{x_D} = \frac{1.800.000}{330} \cong 5.454{,}54 > 4.500$$

Todas as médias são superiores a R$ 4.500,00.

Gabarito: Certo

---

16. (CESPE 2009/BB)



Tendo como referência a figura acima, que mostra os valores das taxas de juros anuais, em dois anos consecutivos, denominados anterior e atual, em 10 países, julgue os itens seguintes.

O valor médio das taxas atuais dos 10 países em questão é inferior a 5%.

Resolução

Para calcular a média das 10 taxas atuais, devemos somar os 10 valores e dividir o resultado por 10.

$$\overline{x} = \frac{9{,}5 + 4 + 10{,}5 + 0{,}5 + 11{,}25 + 5{,}5 + 10{,}5 + 10{,}5 + 1{,}5 + 3{,}25}{10} = 6{,}7$$

Gabarito: Errado

---

17. (CESPE 2009/ANTAC)

	variável	2003	2004	2005	2006	2007
exportação	X	40	46	50	52	54
importação	Y	20	21	22	24	27
total	X + Y	60	67	72	76	81

Internet: <www.portodesantos.com> (com adaptações).

Considerando a tabela acima, que apresenta a movimentação anual de cargas no porto de Santos de 2003 a 2007, em milhões de toneladas/ano e associa as quantidades de carga movimentadas para exportação e importação às variáveis X e Y, respectivamente, julgue os itens subsequentes.

A média das diferenças X - Y no período mostrado foi superior a 25,5 milhões de toneladas/ano.

Resolução

Vamos calcular as diferenças entre os respectivos valores de X e Y.

Variável	2003	2004	2005	2006	2007
X	40	46	50	52	54
Y	20	21	22	24	27
X - Y	20	25	28	28	27

Vamos calcular a média dessas diferenças.

$$\overline{X-Y} = \frac{20+25+28+28+27}{5} = 25{,}6\ milhões\ de\ toneladas/ano$$

Gabarito: Certo

---

18. (CESPE 2008/PRF)

Ficou pior para quem bebe

O governo ainda espera a consolidação dos dados do primeiro mês de aplicação da Lei Seca para avaliar seu impacto sobre a cassação de CNHs. As primeiras projeções indicam, porém, que as apreensões subirão, no mínimo, 10%. Antes da vigência da Lei Seca, eram suspensas ou cassadas, em média, aproximadamente 155.000 CNHs por ano. Se as previsões estiverem corretas, a média anual deve subir para próximo de 170.000. A tabela a seguir mostra esses resultados nos últimos anos (fonte: DENATRAN).

ano	CNHs	
	concedidas (em milhões)	suspensas ou cassadas
2003	1,8	148.500
2004	3,4	314.200
2005	3,2	115.700
2006	2,2	98.800
2007	2,8	112.100
2008	1,5*	64.500*
total	14,9	853.900

* dados de janeiro a junho

Veja, ed. 2.072, 6/8/2008, p. 51 (com adaptações).

Para que a média de CNHs suspensas ou cassadas, de 2003 a 2008, atinja o valor previsto de 170.000, será necessário que, em 2008, a quantidade de CNHs suspensas ou cassadas seja um número

A) inferior a 180.000.

B) superior a 180.000 e inferior a 200.000.

C) superior a 200.000 e inferior a 220.000.

D) superior a 220.000 e inferior a 240.000.

E) superior a 240.000.

Resolução

Para calcular a média, devemos somar todos os valores e dividir pela quantidade de dados.

Denominando a soma de S e a média de $\overline{x}$, temos:

$$\overline{x} = \frac{S}{n}$$

$$170.000 = \frac{S}{6}$$

$$S = 6 \times 170.000 = 1.020.000$$

De 2003 até junho de 2008 (conforme a tabela), a soma total é de 853.900. Entretanto, para que a média seja de 170.000, a soma total deve ser 1.020.000. Desta forma, de julho a dezembro de 2008, a quantidade de CNHs suspensas ou cassadas tem que ser igual a 1.020.000 – 853.900 = 166.100.

Desta forma, o total de CNHs suspensas ou cassadas em todo o ano de 2008 deverá ser igual a 64.500 + 166.100 = 230.600.

Gabarito: D

---

19. (CESPE 2008/PRF)

O gráfico a seguir, que ilustra a previsão das reservas monetárias de alguns países, em 2008, deve ser considerado para o julgamento dos itens.



Com base nas informações do gráfico apresentado acima, julgue os seguintes itens.

Entre as reservas apresentadas no gráfico, apenas as da Rússia e da China superam a média aritmética das reservas de todos eles.

Resolução

Vamos calcular a média dos 5 países.

$$\overline{x} = \frac{1.500 + 480 + 290 + 260 + 190}{5} = 544\ bilhões\ de\ dólares$$

As reservas da Rússia não superam a média.

Gabarito: Errado

---

20. (CESPE 2016/FUNPRESP)

adesão ao plano	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
salário (em R$)	5.000	8.000	4.000	6.000	2.000	3.000	4.000	4.000	4.500	7.000

Considerando que os dados na tabela mostram salários de diferentes servidores que aderiram (1) ou não aderiram (0) a determinado plano de previdência complementar, julgue o item subsecutivo.

A média dos salários do grupo que aderiu ao plano de previdência complementar é menor que a do que não aderiu ao plano.

Comentários:

Temos duas listas de números: uma formada pelos salários dos servidores que aderiram ao plano de previdência complementar e outra formada pelos salários dos servidores que não aderiram ao plano.

Os servidores que aderiram ao plano estão indicados pelo número 1 e os servidores que não aderiram estão indicados pelo número 0.

Queremos calcular a média. Como não foi especificada a média, deveremos trabalhar com a média aritmética.

Para tanto, basta somar os elementos correspondentes a cada grupo e dividir pela quantidade de elementos do grupo.

Salários dos servidores que aderiram ao plano: 5.000, 8.000, 6.000, 4.000, 4.500. São **cinco** os servidores que aderiram ao plano. A média destes salários é:

$$\overline{x_1} = \frac{5.000 + 8.000 + 6.000 + 4.000 + 4.500}{5} = \frac{27.500}{5} = 5.500$$

Salários dos servidores que não aderiram ao plano: 4.000, 2.000, 3.000, 4.000, 7.000. São **cinco** os servidores que não aderiram ao plano. A média destes salários é:

$$\overline{x_2} = \frac{4.000 + 2.000 + 3.000 + 4.000 + 7.000}{5} = \frac{20.000}{5} = 4.000$$

A média dos salários dos servidores que aderiram ao plano é MAIOR do que a média dos salários dos servidores que não aderiram ao plano.

Gabarito: Errado

---

21. (CESPE 2015/TELEBRAS/Técnico em Gestão de Telecomunicações)

A equipe de atendentes de um serviço de telemarketing é constituída por 30 empregados, divididos em 3 grupos, que trabalham de acordo com a seguinte escala.

- Grupo I: 7 homens e 3 mulheres, que trabalham das 6 h às 12 h.

- Grupo II: 4 homens e 6 mulheres, que trabalham das 9 h às 15 h.

- Grupo III: 1 homem e 9 mulheres, que trabalham das 12 h às 18 h. A respeito dessa equipe, julgue o item que se segue.

Se, nesse serviço de telemarketing, a média das idades das atendentes for de 21 anos e a média das idades dos atendentes for de 31 anos, então a média das idades de todos os 30 atendentes será de 26 anos.

Resolução

O total de homens é 7 + 4 + 1 = 12 e o total de mulheres é 3 + 6 + 9 = 18.

A média global é a média ponderada das médias dos homens e das mulheres e os pesos de ponderação são as quantidade de homens em mulheres.

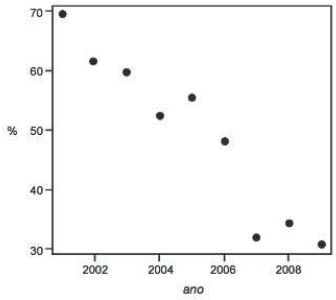
Vamos, então, multiplicar a média dos homens pela quantidade de homens, a média das mulheres pela quantidade de mulheres, somar tudo e dividir pela quantidade total de pessoas, que é a soma dos pesos.

$$\overline{x} = \frac{\overline{h} \cdot 12 + \overline{m} \cdot 18}{12 + 18} = \frac{31 \cdot 12 + 21 \cdot 18}{30} = \frac{750}{30} = 25$$

Gabarito: Errado.

---

22. (CESPE 2015/DEPEN/Agente Penitenciário)



Dado que a participação dos presidiários em cursos de qualificação profissional é um aspecto importante para a reintegração do egresso do sistema prisional à sociedade, foram realizados levantamentos estatísticos, nos anos de 2001 a 2009, a respeito do valor da educação e do trabalho em ambientes prisionais. Cada um desses levantamentos, cujos resultados são apresentados no gráfico, produziu uma estimativa anual do percentual P de indivíduos que participaram de um curso de qualificação profissional de curta duração, mas que não receberam o diploma por motivos diversos. Em 2001, 69,4% dos presidiários que participaram de um curso de qualificação profissional não receberam o diploma. No ano seguinte, 2002, esse percentual foi reduzido para 61,5%, caindo, em 2009, para 30,9%.

A partir das informações e do gráfico apresentados, julgue os itens que se seguem.

Caso a quantidade total de presidiários participantes de um curso de qualificação profissional em 2001 seja igual a N, e esse total em 2002 seja igual a 2N, a estimativa do percentual P de indivíduos que participaram de um curso de qualificação profissional de curta duração e que não receberam o diploma por motivos diversos nos anos de 2001 e 2002 é inferior a 65%.

Resolução

Vamos montar uma tabelinha para resumir os dados do problema.

Ano	Percentual de presidiários que participaram do curso de qualificação profissional e não receberam diploma (x_i)	Quantidade de presidiários participantes dos cursos (f_i)
2001	69,4%	N
2002	61,5%	2N

Para calcular a média, devemos multiplicar cada valor pela sua respectiva frequência, somar tudo e dividir pela frequência total.

$$\overline{x} = \frac{69{,}4\% \cdot N + 61{,}5\% \cdot 2N}{N + 2N}$$

$$\overline{x} = \frac{69{,}4\% \cdot N + 123\% \cdot N}{3N}$$

$$\overline{x} = \frac{192{,}4\% \cdot N}{3N} = \frac{192{,}4\%}{3} \cong 64{,}13\%$$

Gabarito: Certo

---

23. (CESPE 2015/DEPEN)

idade (x)	percentual
$18 \leq x < 25$	30%
$25 \leq x < 30$	25%
$30 \leq x < 35$	20%
$35 \leq x < 45$	15%
$45 \leq x < 60$	10%
total	100%

Felipe M. Monteiro, Gabriela R. Cardoso e Rafael da Silva. **A seletividade do sistema prisional brasileiro e as políticas de segurança pública**. *In*: **XV Congresso Brasileiro de Sociologia**, 26 a 29 de julho de 2011, Curitiba (PR). Grupo de Trabalho – Violência e Sociedade (com adaptações).

A tabela precedente apresenta a distribuição percentual de presos no Brasil por faixa etária em 2010, segundo levantamento feito por Monteiro et al. (2011), indicando que a população prisional brasileira nesse ano era predominantemente jovem. Com base nos dados dessa tabela, julgue os itens a seguir.

A maior parte da população prisional brasileira em 2010 era formada por pessoas com idades inferiores a 30 anos. Porém, a média da distribuição das idades dos presos no Brasil nesse ano foi superior a 30 anos.

Resolução

A primeira parte do item está certa, pois há 30% + 25% = 55% de pessoas com idades inferiores a 30 anos.

Vamos agora calcular a média para terminar de julgar o item.

Como os dados estão agrupados em classe, devemos calcular o ponto médio de cada uma das classes.

Idade (x)	Percentual (f_i)	Ponto Médio (x_i)	$x_i f_i$
18 ≤ x < 25	30% = 0,3	21,5	6,45
25 ≤ x < 30	25% = 0,25	27,5	6,875
30 ≤ x < 35	20% = 0,20	32,5	6,5
35 ≤ x < 45	15% = 0,15	40	6
45 ≤ x < 60	10% = 0,10	52,5	5,25
Total	100% = 1		31,075

A soma das frequências é igual a 1. A média é:

$$\overline{x} = \frac{31{,}075}{1} = 31{,}075$$

Gabarito: Certo

---

24. (CESPE 2018/BNB)

Em uma faculdade, para avaliar o aprendizado dos alunos em determinada disciplina, o professor aplica as provas A, B e C e a nota final do aluno é a média ponderada das notas obtidas em cada prova. Na prova A, o peso é 1; na prova B, o peso é 10% maior que o peso na prova A; na prova C, o peso é 20% maior que o peso na prova B. Nesse caso, se P_A, P_B *e* P_C forem as notas obtidas por um aluno nas provas A, B e C, respectivamente, então a nota final desse aluno é expressa por $\frac{P_A+1{,}2P_B+1{,}32P_C}{3{,}52}$.

Resolução

O peso da prova A é 1.

O peso da prova B é 10% maior que o peso da prova A. Para aumentar um valor em 10%, devemos multiplicá-lo por 100% + 10% = 110% = 1,10. Portanto, o preso da prova B será:

$$1 \times 1{,}10 = 1{,}10$$

O peso da prova C é 20% maior que o preso da prova B. Para aumentar um valor em 20%, devemos multiplicá-lo por 100% + 20% = 120% = 1,20. Portanto, o peso da prova C será:

$$1{,}10 \times 1{,}20 = 1{,}32$$

Para calcular a média ponderada, devemos multiplicar cada nota pelo seu peso e dividir o resultado pela soma dos pesos.

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot P_A + 1{,}10 \cdot P_B + 1{,}32 \cdot P_C}{1 + 1{,}10 + 1{,}32}$$

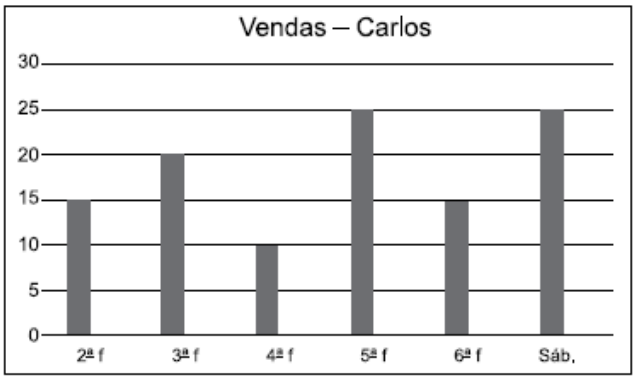
$$\overline{x} = \frac{P_A + 1{,}10P_B + 1{,}32P_C}{3{,}42}$$

Gabarito: Errado

---

25. (VUNESP 2017/UNESP)

Utilize os dados do gráfico a seguir, que mostra o número de rascunho vendas realizadas pelo vendedor Carlos em seis dias de uma semana, para responder às questões.



A média diária de vendas de Carlos, nessa semana, é, aproximadamente, igual a

(A) 12.
(B) 15.
(C) 18.
(D) 20.
(E) 21.

Resolução

Basta somar os valores indicados no gráfico e dividir por 6.

$$\overline{x} = \frac{15 + 20 + 10 + 25 + 15 + 25}{6} = \frac{110}{6} \cong 18{,}33$$

Gabarito: C

---

26. (VUNESP 2018/CM Indaiatuba/Controlador Interno)

A tabela mostra o tempo gasto por um funcionário para ir e voltar no trajeto casa e trabalho em 5 dias da semana.

Funcionário	Casa-Trabalho	Trabalho-Casa
2ª feira	1h 12min	55min
3ª feira	58min	52min
4ª feira	1h 8min	1h 6min
5ª feira	1h 14min	1h 10min
6ª feira	1h 22min	1h 8min

Nessa semana, a diferença entre o tempo médio diário no sentido Casa-Trabalho e o tempo médio diário no sentido Trabalho-Casa é igual a

(A) 8min36s
(B) 8min42s
(C) 8min6s
(D) 8min18s
(E) 8min54s

Resolução

Devemos calcular a média do tempo diário no sentido casa-trabalho, no sentido trabalho-casa, e depois calcular a diferença entre estes valores.

Para tanto, vamos converter os valores para minutos.

Funcionário	Casa-Trabalho	Trabalho-Casa
2ª feira	1h12min = 60min + 12min = 72min	55 min
3ª feira	58 min	52 min
4ª feira	1h8min = 60 min + 8 min = 68 min	1h 6min = 60 min + 6min = 66 min
5ª feira	1h14min = 60 min + 14 = 74 min	1h 10min = 60 min + 10min = 70 min
6ª feira	1h22min = 60 min + 22 min = 82 min	1h8min = 60 min + 8 min = 68 min

Vamos agora calcular as médias:

$$\overline{x_{CT}} = \frac{72 + 58 + 68 + 74 + 82}{5} = \frac{354}{5} = 70{,}8\ minutos$$

$$\overline{x_{TC}} = \frac{55 + 52 + 66 + 70 + 68}{5} = \frac{311}{5} = 62{,}2\ minutos$$

A diferença entre as médias é 70,8 – 62,2 = 8,6 minutos.

Cuidado, 8,6 minutos não é a mesma coisa que 8min6s. Observe:

$$8{,}6min = 8min + 0{,}6min = 8min + 0{,}6 \cdot 60s = 8\,\text{min}\,36s$$

Esta é a resposta da questão.

Vamos agora resolver de uma maneira mais fácil.

Queremos calcular a diferença entre as médias, ou seja, calculamos as médias e depois calculamos a diferença. Existe uma propriedade das médias que diz que a diferença entre as médias é igual à média das diferenças. Em outras palavras, podemos calcular as diferenças em cada dia, e depois calcular a média.

Funcionário	Casa-Trabalho	Trabalho-Casa	Diferença
2ª feira	1h12min	55 min	17 min
3ª feira	58 min	52 min	6 min
4ª feira	1h8min	1h 6min	2 min
5ª feira	1h14min	1h 10min	4 min
6ª feira	1h22min	1h8min	14 min

$$\overline{x_{CT} - x_{TC}} = \frac{17 + 6 + 2 + 4 + 14}{5} = \frac{43}{5} = 8{,}6min = 8min36s$$

Bem mais simples, não?

Gabarito: A

---

27. (VUNESP 2018/IPSM São José dos Campos)

A média aritmética diária de vendas realizadas em seis dias por um estabelecimento comercial foi de R$ 6.700,00. Na tabela, constam os valores das vendas de alguns desses dias:

Dia da semana	Valor em vendas
Segunda-feira	R$ 4.800,00
Terça-feira	R$ 6.900,00
Quarta-feira	R$ 8.200,00
Quinta-feira	*x*
Sexta-feira	*y*
Sábado	*z*

Com base nas informações, é correto afirmar que a média aritmética diária dos três últimos dias de vendas é maior que a média aritmética diária dos seis dias em, aproximadamente,

(A) R$ 65,00.
(B) R$ 67,00.
(C) R$ 69,00.
(D) R$ 71,00.
(E) R$ 73,00.

Resolução

A média dos 6 dias é R$ 6.700,00. Para calcular esta média, basta somar os 6 valores e dividir por 6.

$$6.700 = \frac{4.800 + 6.900 + 8.200 + x + y + z}{6}$$

$$6.700 \cdot 6 = 4.800 + 6.900 + 8.200 + x + y + z$$

$$40.200 = 19.900 + x + y + z$$

$$x + y + z = 40.200 - 19.900$$

$$x + y + z = 20.300$$

Vamos agora calcular a média aritmética dos três últimos dias. Já sabemos que a soma é 20.300. Só precisamos dividir por 3.

$$\overline{x} = \frac{20.300}{3} \cong 6.766,66$$

Assim, a média aritmética diária dos três últimos dias de vendas é maior que a média aritmética diária dos seis dias em, aproximadamente, 6.766,66 – 6.700 = 66,66 reais.

Gabarito: B

---

28. (VUNESP 2018/PAULIPREV)

A média aritmética simples dos salários de 30 funcionários de uma empresa era R$ 1.610,00. Esses funcionários tiveram um aumento em seus salários de maneira que os que recebiam R$ 1.500,00 ou mais tiveram um acréscimo de R$ 20,00, e os que recebiam menos de R$ 1.500,00 tiveram um acréscimo de R$ 50,00. Após esse reajuste, a média dos salários dos 30 funcionários passou a ser R$ 1.641,00; logo o número de funcionários que tiveram um aumento de R$ 50,00 é um número entre

(A) 25 e 30.
(B) 19 e 24.
(C) 13 e 18.
(D) 7 e 12.

(E) 1 e 6.

Resolução

A média dos salários dos 30 funcionários era R$ 1.610,00. Para calcular esta média, devemos somar os 30 salários e dividir o resultado por 30.

$$\overline{x} = \frac{S_{30}}{30}$$

$$1.610 = \frac{S_{30}}{30}$$

$$S_{30} = 30 \cdot 1.610 = 48.300$$

Este procedimento é muito comum. Para calcular a soma total, basta multiplicar a média pelo número de pessoas.

Após o reajuste, a média passou a ser R$ 1.641,00. Desta forma, a soma total dos salários passou a ser 1.641 x 30 = 49.230 reais.

A diferença 49.230 – 48.300 = 930 corresponde o quanto foi pago em aumentos.

Digamos que x funcionários receberam um aumento de 50 reais. Juntos, eles receberam um aumento de 50x reais.

Como são 30 funcionários, então (30 – x) funcionários receberam um aumento de 20 reais. A empresa pagou a mais para estas pessoas $20 \cdot (30 - x) = 600 - 20x$.

A soma dos aumentos é 930 reais.

$$50x - 20x + 600 = 930$$

$$30x = 330$$

$$x = \frac{330}{30} = 11$$

Assim, 11 pessoas receberam um aumento de 50 reais.

Gabarito: D

29. (VUNESP 2018/CM de São José dos Campos)

Em um grupo de 10 pessoas, duas têm 40 anos, quatro têm 21 anos, uma tem 25 anos e três têm a mesma idade. Sabendo-se que a média aritmética das idades dessas 10 pessoas é 22,5 anos, a soma das idades desconhecidas corresponde, da soma de todas as idades, a

(A) 12%
(B) 14%
(C) 16%
(D) 18%
(E) 20%

Resolução

Vamos organizar os dados em uma tabela.

Pessoas	Idade
2	40
4	21
1	25
3	x

Para calcular a média, devemos multiplicar cada idade pela quantidade de pessoas, somar, e dividir pelo total de pessoas.

Pessoas	Idade	Pessoas x idade
2	40	2 x 40 = 80
4	21	4 x 21 = 84
1	25	1 x 25 = 25
3	x	3x

$$22{,}5 = \frac{80 + 84 + 25 + 3x}{10}$$

$$80 + 84 + 25 + 3x = 22{,}5 \cdot 10$$

$$189 + 3x = 225$$

$$3x = 36$$

$$x = 12$$

Cada idade desconhecida é 12. A soma das idades desconhecidas é 3 x 12 = 36.

A soma de todas as idades é 10 x 22,5 = 225 (basta multiplicar a média pela quantidade total de pessoas ou somar 80 + 84 + 25 + 36).

Queremos saber que percentual 36 corresponde ao total. Basta dividir 36 pelo total.

$$\frac{36}{225}$$

Para transformar em porcentagem é só multiplicar por 100%.

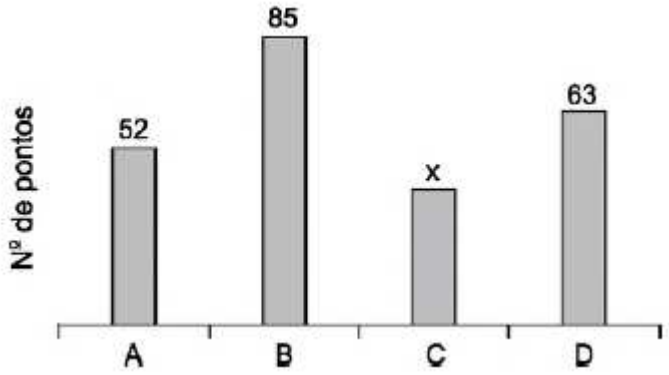
$$\frac{36}{225} \cdot 100\% = 16\%$$

Gabarito: C

---

30. (VUNESP 2018/PM-SP)

O gráfico apresenta o número de pontos obtidos pelos grupos A, B, C e D, que participaram de uma atividade recreativa.



Sabendo que o número de pontos obtidos pelo grupo A foi 30% maior que o número de pontos obtidos pelo grupo C, então, na média, o número de pontos obtidos por um grupo foi

(A) 55.
(B) 60.
(C) 70.
(D) 65.
(E) 50.

Resolução

O número de pontos obtido por A foi 30% maior que o número de pontos obtidos pelo grupo C. Se C corresponde a 100%, então A corresponde a 130%.

Pontos	Percentual (%)
x	100
52	130

Multiplicando cruzado, temos:

$$130 \cdot x = 52 \cdot 100$$

$$x = \frac{5.200}{130} = 40$$

Vamos agora calcular a média dos 4 valores.

$$Média = \frac{52 + 85 + 40 + 63}{4} = \frac{240}{4} = 60$$

Gabarito: B

---

31. (VUNESP 2017/PM-SP)

A média aritmética das idades dos cinco jogadores titulares de um time de basquete é 22 anos. Um dos jogadores titulares desse time, que tem 20 anos de idade, sofreu uma lesão e foi substituído por outro jogador, o que fez com que a nova média das idades dos cinco jogadores do time titular passasse a ser de 23 anos. Então, a idade do jogador que substituiu o jogador lesionado é

(A) 25 anos.
(B) 24 anos.
(C) 22 anos.
(D) 21 anos.
(E) 23 anos.

Resolução

A média dos 5 jogadores é 22 anos. Assim, a soma das 5 idades é 5 x 22 = 110 anos.

O jogador de 20 anos saiu. Desta forma, a soma cai para 110 – 20 = 90 anos.

Com a entrada do novo jogador, a média dos 5 jogadores será de 23 anos. A soma das 5 idades será 5 x 23 = 115 anos. Desta forma, a idade do jogador que entrou é 115 – 90 = 25 anos.

Gabarito: A

---

32. (VUNESP 2017/CM COTIA)

Em uma turma de alunos que pratica basquete, a menor altura é 1,67 m e a maior altura é 2,02 m. Um time formado por 5 alunos dessa turma foi sorteado, sendo a média aritmética das alturas desses 5 alunos igual a 1,89 m. Dentre os alunos sorteados, é correto afirmar, em relação a suas alturas, que

(A) pelo menos 3 têm 1,89 m ou mais.
(B) nenhum tem 1,67 m.
(C) no máximo 3 têm 2,02 m.
(D) algum tem menos de 1,89 m.
(E) no mínimo 2 têm 1,94 ou mais.

Resolução

Se a média dos 5 é 1,89m, então a soma das 5 alturas é 5 x 1,89 = 9,45m.

Vamos analisar cada uma das alternativas.

(A) pelo menos 3 têm 1,89 m ou mais.

Imagine que 3 pessoas têm 1,88m. Juntos eles têm 3 x 1,88 = 5,64m.

Para chegar nos 9,45m, ainda precisamos de 9,45 – 5,64 = 3,81m. Como restam duas pessoas, cada pessoa teria 3,81/2 = 1,905.

Assim, é possível termos 3 pessoas com altura 1,88m e 2 pessoas com altura 1,905m para termos uma média de 1,89m.

A alternativa A está errada, pois ela diz que obrigatoriamente precisamos de pelos menos 3 com altura mínima de 1,89m.

(B) nenhum tem 1,67 m.

A soma das 5 alturas é 9,45m. Se tivermos uma pessoa com 1,67m, então as outras 4 pessoas juntas terão 9,45m – 1,67m = 7,78m. Dividindo esta soma por 4, cada pessoa terá em média 1,945m, o que é perfeitamente possível.

A alternativa B está errada.

(C) no máximo 3 têm 2,02 m.

Se tivermos 3 pessoas com 2,02m, eles juntos terão 3 x 2,02 = 6,06m. Como a soma total é 9,45m, então os outros dois juntos terão 9,45 – 6,06 = 3,39 m. Dividindo pelas duas pessoas que sobraram, cada pessoa teria 3,39/2 = 1,695m. Ok.

Vamos tentar colocar 4 pessoas com 2,02m. Neste caso, juntos eles têm 4 x 2,02 = 8,08m. Como a soma total é 9,45m, a última pessoa teria 9,45 – 8,08 = 1,37m, o que não é possível, já que o enunciado garante que todos têm no mínimo 1,67m.

Desta forma, não é possível termos 4 pessoas com 2,02m. A resposta é a letra C.

(D) algum tem menos de 1,89 m.

Esta alternativa está errada, pois poderíamos ter as 5 pessoas com 1,89m.

(E) no mínimo 2 têm 1,94 ou mais.

Esta alternativa está errada, pois poderíamos ter as 5 pessoas com 1,89m.

Gabarito: C

---

33. (VUNESP 2017/IPRESB)

A tabela mostra o número de horas extras de determinada semana, trabalhadas pelos funcionários de uma empresa.

Número de funcionários	Número de horas extras
3	5
2	4
4	6
?	3

Considerando-se o número total de funcionários que fizeram horas extras nessa semana, o número de horas extras por funcionário foi, na média, 4,25. O número de funcionários que fizeram 3 horas extras nessa semana foi

(A) 7.
(B) 6.
(C) 5.
(D) 4.
(E) 3.

Resolução

Para calcular a média, devemos multiplicar o número de horas extras pela quantidade de funcionários, somar, e dividir pelo total de funcionários.

Número de Funcionários	Número de horas extras	Horas extras x funcionários
3	5	3 x 5 = 15
2	4	2 x 4 = 8
4	6	4 x 6 = 24
x	3	3x

Agora é só calcular a média e igualar a 4,25.

$$\frac{15+8+24+3x}{3+2+4+x}=4{,}25$$

$$\frac{47+3x}{9+x}=4{,}25$$

$$4{,}25\cdot(9+x)=47+3x$$

$$38{,}25+4{,}25x=47+3x$$

$$4{,}25x-3x=47-38{,}25$$

$$1{,}25x=8{,}75$$

$$x=\frac{8{,}75}{1{,}25}=7$$

Gabarito: A

---

34. (VUNESP 2018/CM de São José dos Campos)

Em um concurso, a nota final de cada candidato é calculada pela média aritmética ponderada das notas das três fases de avaliação previstas, com pesos 2, 3 e 5, para as primeira, segunda e terceira fases, respectivamente. Para ser classificado no concurso, o candidato tem que atingir nota final maior ou igual a 6. Sendo assim, um candidato que tirou notas 5 e 6 nas primeira e segunda fases, respectivamente, para ser classificado no concurso, precisa tirar, na terceira fase, uma nota mínima igual a

(A) 6,2.
(B) 6,4.

(C) 6,6.
(D) 6,8.
(E) 7,0.

Resolução

Vamos resumir os dados em uma tabela.

Notas	Pesos
5	2
6	3
x	5

Para calcular a média, devemos multiplicar cada nota pelo seu respectivo peso, somar, e dividir pela soma dos pesos.

$$\boldsymbol{Média = \frac{5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + x \cdot 5}{2 + 3 + 5}}$$

$$\boldsymbol{Média = \frac{28 + 5x}{10}}$$

Esta média precisa ser maior ou igual a 6.

$$\frac{\boldsymbol{28 + 5x}}{\boldsymbol{10}} \geq 6$$

$$\boldsymbol{28 + 5x} \geq 60$$

$$5x \geq 32$$

$$x \geq 6{,}4$$

Gabarito: B

---

35. (FCC 2013/DPE-RS)

A média geométrica dos números 4, 8 e 16 é

(A) maior que a respectiva média aritmética.

(B) inferior a 6.

(C) igual a 8.

(D) igual a 4.

(E) superior a 9.

Resolução

A resposta nunca poderia ser a alternativa A, pois a média geométrica não pode ser maior que a média aritmética.

Para calcular a média geométrica de 3 números, devemos calcular a raiz cúbica do produto.

$$G = \sqrt[3]{4 \cdot 8 \cdot 16} = \sqrt[3]{64 \cdot 8}$$

A raiz cúbica de 64 é 4 e a raiz cúbica de 8 é 2.

$$G = \sqrt[3]{64 \cdot 8} = 4 \times 2 = 8$$

Gabarito: C

---

36. (FGV 2011/SEFAZ-RJ)

Em uma repartição, foi tomada uma amostra do número de filhos de 4 funcionários. O resultado foi {2, 1, 4, 2}. A média geométrica simples dessa amostra é

a) 2,25
b) 1,75
c) 2
d) 2,4
e) 2,5

Resolução

A média geométrica dos 4 números é a raiz quarta do produto dos números.

$$G = \sqrt[4]{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

Gabarito: C

---

37. (FCC 2018/SEFAZ-GO)

Os matemáticos definem diferentes tipos de médias entre dois números positivos e, para cada aplicação, escolhem qual o tipo mais adequado a ser utilizado. A média harmônica H entre os números positivos a e b, por exemplo, é definida como o inverso da média aritmética dos inversos desses números, ou seja,

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}}$$

A média aritmética dos números 5 e 20 supera a média harmônica desses mesmos números em

a) 4,75 unidades.

b) 5 unidades.

c) 4 unidades.

d) 4,25 unidades.

e) 4,5 unidades.

Resolução

Para calcular a média aritmética, basta somar os números e dividir por 2, que é o número de termos.

$$\overline{x} = \frac{5 + 20}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

Vimos que existe um atalho para calcular a média harmônica de dois números.

A média harmônica de DOIS números é o dobro do produto dividido pela soma dos números.

$$H = \frac{2 \times 5 \times 20}{5 + 20} = \frac{200}{25} = 8$$

Portanto, a média aritmética supera a média harmônica em $12{,}5 - 8 = 4{,}5$ unidades.

Gabarito: E

---

38. (FCC 2017/ARTESP)

Considere as seguintes informações

I. (A) = média harmônica dos números 4, 6 e 12.

II. (B) = média geométrica dos números 4, 6 e 12.

A média aritmética entre (A) e (B) é igual a

a) 6,81.

b) 5,68.

c) 6,30.

d) 5,41.

e) 6,93.

Resolução

Vamos começar pela média harmônica. Devemos calcular a soma dos inversos dos números.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3+2+1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Agora devemos dividir 3, que é o número de termos, pela soma obtida.

$$A=\frac{3}{1/2}=3\times\frac{2}{1}=6$$

Vamos agora calcular a média geométrica. A média geométrica de três números positivos é a raiz cúbica do produto entre eles.

$$B=\sqrt[3]{4\times 6\times 12}$$

$$B=\sqrt[3]{288}$$

Vamos tentar calcular um valor aproximado para esta raiz cúbica pela TÉCNICA MILENAR DO CHUTE.

Ora, sabemos que:

$$6^3=216$$

$$7^3=343$$

Portanto, a raiz cúbica procurada é um número entre 6 e 7. Vamos testar 6,5.

$$6{,}5^3=274{,}625$$

Já estamos bem próximos. Vamos testar 6,6.

$$6{,}6^3=287{,}496$$

Esta é uma excelente aproximação!!

$$B \cong 6{,}6$$

O problema pede a média aritmética entre A e B. Basta somá-los e dividir por 2.

$$\frac{A+B}{2} = \frac{6+6{,}6}{2} = 6{,}3$$

Gabarito: C



39. (CESPE 2018/SEFAZ-RS)

Para a, b e c, números reais, positivos e distintos, são verdadeiras as seguintes propriedades:

- $\boldsymbol{a < c}$
- $b < \frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}$

A partir dessas propriedades, é correto concluir que

a) $\frac{a+c}{2} < \frac{a+b+c}{3}$

b) $a > b$

c) $c < \frac{a+b}{2}$

d) $a < b < c$

e) $b > c$

Resolução

O edital do concurso para SEFAZ-RS não incluiu conhecimentos sobre médias.

Assim, vou resolver primeiro atribuindo valores às variáveis reais positivas $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$.

Como temos $\sqrt{\boldsymbol{bc}}$, vou colocar $\boldsymbol{b = 16}$ e $\boldsymbol{c = 25}$. Dessa forma, $\sqrt{\boldsymbol{bc}} = \sqrt{\boldsymbol{16 \times 25}} = \sqrt{\boldsymbol{400}} = \boldsymbol{20}$.

Eu utilizei os valores 16 e 25 para que a raiz quadrada fosse inteira.

Assim, temos que

$$\boldsymbol{a < c}$$

$$\boldsymbol{a < 25}$$

Temos ainda que

$$\boldsymbol{b < \frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}}$$

$$\boldsymbol{16 < \frac{a+25}{2} < 20}$$

Vamos multiplicar todos os termos por 2.

$$\boldsymbol{32 < a + 25 < 40}$$

Vamos agora subtrair $\boldsymbol{25}$ de todos os termos.

$$\boldsymbol{7 < a < 15}$$

Vamos pegar um número qualquer nesse intervalo. Digamos que $\boldsymbol{a = 10}$.

Assim, vamos assumir que $\boldsymbol{a = 10}$, $\boldsymbol{b = 16}$ e $\boldsymbol{c = 25}$.

Esses números satisfazem as condições impostas pelo enunciado.

Vamos agora testar as alternativas.

a) $\frac{a+c}{2} < \frac{a+b+c}{3}$

$$\frac{10 + 25}{2} < \frac{10 + 16 + 25}{3}$$

$$17{,}5 < 17 \quad (falso)$$

b) $a > b$

$$10 > 16 \ (falso)$$

c) $c < \frac{a+b}{2}$

$$25 < \frac{10+16}{2}$$

$$25 < 13\ (falso)$$

d) $a < b < c$

$$10 < 16 < 25\ (verdadeiro)$$

e) $b > c$

$$\mathbf{16 > 25\ (falso)}$$

A resposta é a alternativa D.

Vamos agora resolver utilizando conhecimentos sobre média aritmética e média geométrica. Eis novamente o enunciado.

Para a, b e c, números reais, positivos e distintos, são verdadeiras as seguintes propriedades:

- $\boldsymbol{a < c}$
- $b < \frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}$

A partir dessas propriedades, é correto concluir que

a) $\frac{a+c}{2} < \frac{a+b+c}{3}$

b) $a > b$

c) $c < \frac{a+b}{2}$

d) $a < b < c$

e) $b > c$

Resolução

Já sabemos que $\boldsymbol{a < c}$.

A segunda desigualdade nos informa que $\boldsymbol{b < \sqrt{bc}}$.

Em outras palavras, $\boldsymbol{b}$ é menor do que a média geométrica entre b e c. Como a média sempre fica entre os números, podemos concluir que $\boldsymbol{b < c}$.

Precisamos agora saber a relação entre $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

A segunda desigualdade nos informou que $\frac{a+c}{2} < \sqrt{bc}$.

Ora, $\frac{a+c}{2}$ representa a média aritmética entre os números $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{c}$. Sabemos que a média aritmética de números distintos é sempre maior do que a média geométrica. Portanto,

$$\underbrace{\sqrt{ac}}_{\substack{\text{média geométrica} \\ \text{entre a e c}}} < \underbrace{\frac{a+c}{2}}_{\substack{\text{média aritmética} \\ \text{entre a e c}}} < \sqrt{bc}$$

Juntando o pé com a cabeça, temos:

$$\sqrt{ac} < \sqrt{bc}$$

$$\sqrt{a} < \sqrt{b}$$

$$a < b$$

Assim, $\boldsymbol{a < b}$ **e** $\boldsymbol{b < c}$. Portanto, $\boldsymbol{a < b < c}$. A resposta está na alternativa D.

Vamos agora analisar as outras alternativas.

a) $\frac{a+c}{2} < \frac{a+b+c}{3}$

Sabemos que $b < \frac{a+c}{2}$, ou seja, b é menor do que a média entre a e c. Assim, se formos incluir b no cálculo da média, o resultado da média diminuirá. Portanto, a alternativa A está errada.

b) $a > b$

Falso, pois $a < b$.

c) $c < \frac{a+b}{2}$

Falso, pois c é o maior de todos e, portanto, também será maior que a média dos dois menores.

e) $b > c$

Falso, pois $\boldsymbol{b < c}$.

Gabarito: D

40. (CESPE 2008/TST)

Considere que, em um ambiente de trabalho industrial, as seguintes medições acerca da poluição do ar tenham sido observadas: 1, 6, 4, 3, 2, 3, 1, 5, 1, 4. Nessa situação, julgue o item que se segue.

As médias harmônica e geométrica são ambas inferiores a 3.

Resolução

Calcular a média geométrica e a média harmônica de 10 números dá um trabalhão. Vamos calcular a média aritmética.

$$\overline{x} = \frac{1+6+4+3+2+3+1+5+1+4}{10}$$

$$\overline{x} = \frac{30}{10} = 3$$

Agora é só utilizar a desigualdade das médias. Quando pelo menos um dos números é diferente dos demais, a média aritmética é maior do que a média geométrica e esta é maior do que a média harmônica.

$$H < G < \overline{x}$$

$$H < G < 3$$

Portanto, a média harmônica e a média geométrica são menores do que 3.

Gabarito: Certo

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ficamos por aqui, queridos alunos. Espero que tenham gostado da aula.

Vamos juntos nesta sua caminhada. Lembre-se que vocês podem fazer perguntas e sugestões no nosso fórum de dúvidas.



Você também pode me encontrar no instagram @profguilhermeneves ou entrar em contato diretamente comigo pelo meu email profguilhermeneves@gmail.com.

Um forte abraço e até a próxima aula!!!

Guilherme Neves

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. 

Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. 

Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. 

Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. 

Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. 

Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. 

Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. 

Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. 

O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.



Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.