

Aula 00 - Prof. Juliano de Pelegrin

*PC-RJ (Perito Criminal - Engenharia
Mecânica) Conhecimentos Específicos -
2021 (Pós-Edital)*

Autor:

**Edimar Natali Monteiro, Felipe
Canella, Juliano de Pelegrin**

27 de Setembro de 2021

Sumário

Apresentação e Cronograma do Curso	3
Estática e Resistência dos Materiais.....	4
1 – Estática	4
1.1 – Conceitos.....	4
1.2 – Sistemas de forças.....	4
1.3 – Momento	5
1.4 – Equilíbrio.....	6
1.5 – Análise de estruturas	9
1.6 – Forças Distribuídas.....	15
1.7 – Momento de Inércia	20
1.8 – Vigas - Efeitos Internos	22
2 – Resistência dos Materiais.....	23
2.1 – Tensão	23
2.2 – Deformação e Propriedades dos Materiais	26
2.3 – Cargas axiais	31
2.4 – Torção.....	33
2.5 – Flexão.....	35
2.6 – Vasos de pressão	Erro! Indicador não definido.
2.7 – Transformações de tensões e deformações	39
2.8 – Deflexão.....	Erro! Indicador não definido.
2.9 – Flambagem em colunas	Erro! Indicador não definido.
3 – Considerações Finais	47
4 – Bateria de Questões Comentadas.....	47



5 – Gabarito	60
7 – Resumo.....	62



APRESENTAÇÃO E CRONOGRAMA DO CURSO

Olá, meus caros amigos do Estratégia Concursos, tudo bem?

É com imensa satisfação que iniciamos hoje o nosso “**Curso Simplificado de Engenharia Mecânica para perito da PC-RJ**”.

Este curso é um material simplificado, mantendo a clareza ao abordar os assuntos, mas **sem perder a objetividade**. **Fique atento aos comentários das questões**, pois estes podem vir a complementar a teoria podendo se tornar um diferencial em sua preparação.

Sem mais delongas, deixaremos aqui nossos contatos pessoais para quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões que possam surgir. Lembre-se, caro(a) concurseiro (a), **estamos aqui** para lhe dar o **suporte que você precisa para passar no seu concurso**! Sinta-se à vontade para nos contatar.

Para **tirar dúvidas** e ter **acesso a dicas e conteúdos gratuitos**, acesse nossas redes sociais:

Instagram - **@profjulianodp**

E-mail – **profjulianodp@gmail.com**

Instagram - **@prof.canellas**

E-mail - **canellas100@gmail.com**

Recomendamos, que você **se polície** para estudar **TODAS as aulas** com dedicação, e também aqueles assuntos que você tem mais dificuldade ou não goste muito, pois às vezes inconscientemente deixamos de lado esses temas.

Na próxima página, iniciaremos o nosso curso com a aula 00! Vamos lá?



ESTÁTICA E RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

Caro(a) concurseiro(a), nada melhor para iniciarmos o nosso curso do que estudarmos a mecânica dos sólidos, não concorda?! A mecânica é uma ciência que trata dos efeitos de forças sobre objetos. Para termos um melhor embasamento podemos definir a **mecânica** como um ramo das ciências físicas que **lida do estado de repouso e movimento de corpos sujeitos à ação de forças**.¹

Nesta aula, iremos abordar a **mecânica dos corpos rígidos estáticos** em conjunto com a **resistência dos materiais**, também chamada de Mecânica dos Sólidos. Normalmente há uma **maior incidência** de questões a respeito de **resistência dos materiais** do que estática nas questões de prova, contudo devemos passar pelo estudo da mecânica geral estática para posteriormente desenvolvermos nosso conhecimento na mecânica dos sólidos. Vamos iniciar pelo o estudo da estática, bora lá?

1 – Estática

A primeira subdivisão da mecânica dos corpos rígidos que iremos estudar é a **estática**. Esta, aborda o **equilíbrio dos corpos em repouso**. Alguns autores gostam de adotar a estática como um caso especial da dinâmica, pois esta pode ser considerada um caso onde não há aceleração, contudo devemos estudá-la separadamente, pois muitos projetos de objetos são desenvolvidos para se manterem parados, ou tecnicamente falando em equilíbrio.

Vamos iniciar estudando alguns conceitos a respeito da estática e sequência passaremos a estudar os seguintes tópicos: força; momento; equilíbrio; análise estrutural, momento de inércia, centróide, atrito e forças distribuídas.

1.1 – Conceitos

Para começarmos a entender um pouco mais sobre a estática e, como está é cobrada em concursos públicos, partimos do pressuposto que você já domine alguns conceitos básicos como força, espaço, massa, partícula e corpo rígido.

1.2 – Sistemas de forças

Passamos ao estudo das forças que atuam em equipamentos de engenharia e estruturas. Aconselho a **resolução** de diversos exercícios neste tema, você precisa ficar afiado em **TODO este tópico**, pois isto ajudará no estudo de análise de tensões, nesta aula, projeto de máquinas e escoamento de fluídos em aulas futuras.

As **forças** podem ser **concentradas ou distribuídas**, usualmente, como as dimensões da área são muito pequenas em relação ao tamanho total do corpo analisado, adotamos a força como concentrada em

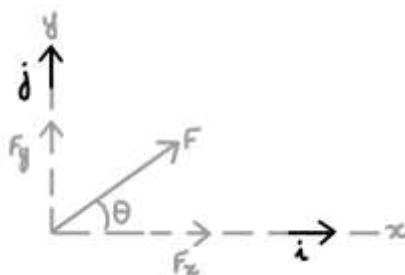
¹ R.C. Hibbeler – Mecânica para engenharia.



apenas um ponto para análise. A **unidade padrão** da força em unidades do SI é o **Newton** (N) no sistema inercial e o **quilograma-força** (kgf) no sistema gravitacional.

Como qualquer grandeza matemática podemos realizar operações com vetores como multiplicação por escalar, adição, subtração e decomposição.

Quando abordamos a decomposição bidimensional de um vetor de força, aplicamos a **regra do paralelogramo**, onde o **vetor F** pode ser escrito como a **soma entre** as respectivas **componentes X e Y**. Os componentes escalares podem ser de grandeza positiva ou negativa de acordo para qual quadrante F aponta. A figura abaixo representa a regra do paralelogramo onde os valores de cada componente do vetor F podem ser calculados pelas seguintes equações:



$$F_x = F \cdot \cos \theta ; F_y = F \cdot \sin \theta ; F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} ; \theta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right)$$

Como exemplificado anteriormente a força é uma grandeza que pode ser representada por um vetor com valor e direção em mais de um sentido. Além de podermos combinar forças, usualmente precisamos **decompor uma força** em suas componentes vetoriais, para então resolvermos determinadas questões em que se exige a determinação da resultante entre mais de uma força.

Conhecidas a grandeza força vamos ao estudo do momento, que nada mais é que atuação de uma força sobre um objeto tendendo a girar este em relação a um eixo.

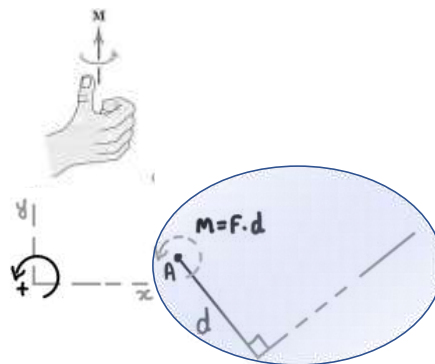
1.3 – Momento

O **momento** é um vetor M sempre **perpendicular** ao plano do corpo. O sentido deste depende da direção para qual a força F aplicada, a uma distância (d), tende a girar o corpo. Com isso, o **módulo do momento** é proporcional ao módulo da força e a distância (d), também conhecido como **braço da alavanca**. Definimos o módulo do momento através da seguinte expressão:

$$M = F \cdot d$$

Para definirmos o **sentido do momento**, utilizamos a **“regra da mão direita”** onde o momento F em torno de um ponto O é definido como um vetor no sentido do polegar e o sentido de giro é representado pelos dedos curvados. Normalmente como convenção adotamos o momento no sentido **anti-horário como positivo**. A **unidade** básica do momento é **newton-metro** (N.m.). Vejamos a figura abaixo que exemplifica a regra da mão direita:





Muitas questões envolvendo momento bidimensional e tridimensional é apropriado adotar um enfoque vetorial para o cálculo. Sendo assim, a **análise vetorial cartesiana** é usada frequentemente para solucionar questões em **três dimensões**, em que a direção positiva dos eixos x, y e z é definida pelos vetores cartesianos unitários i, j e k respectivamente. Para se determinar a resultante de um sistema de forças concorrentes, devemos expressar cada uma das forças como um vetor e somar suas componentes i, j e k.

Para facilitarmos a resolução de questões trabalhamos com vetores, assim o momento de uma força em notação vetorial, pode ser obtido através do determinante entre as coordenadas x, y e z do ponto r a partir do ponto O e as componentes das forças em cada direção. Vejamos:

$$M_O = r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Em questões de **duas dimensões**, é apropriado adotar o **princípio dos momentos**, também conhecido como **teorema de Varignon**, o qual determina que o momento de uma força em relação a um ponto é igual à **soma dos momentos** dos componentes **da força em relação ao ponto**.

Vamos ao estudo do equilíbrio em duas dimensões.

1.4 – Equilíbrio

Quando um corpo (estrutura) está em **equilíbrio** isto quer dizer que ele está **imóvel** e a resultante do somatório de todas as forças e momentos que atuam sobre este corpo são iguais a zero. Logo as condições necessárias para um corpo estar em equilíbrio são:

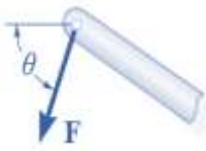
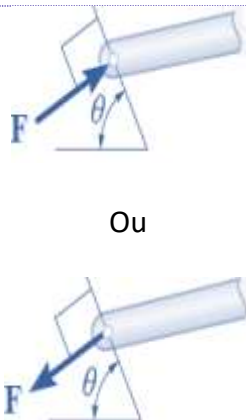
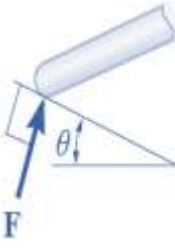
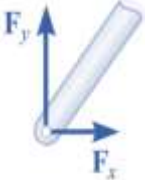
$$\sum F = 0 \text{ e } \sum M = 0$$

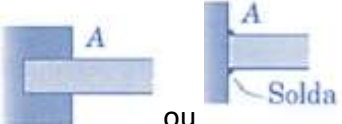
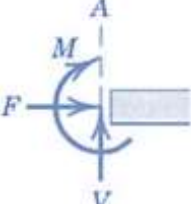
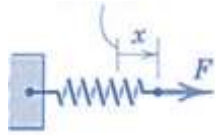
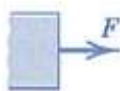
Antes de partirmos para aplicação dos equacionamentos acima descritos nas resoluções de questões é **fundamental** que você saiba **representar esquematicamente o sistema isolado como um único corpo**, essa representação é denominada **diagrama de corpo livre (DCL)**. Esta é a primeira etapa e, a meu ver, a mais importante na solução de questões em mecânica.

Para montarmos um diagrama de corpo livre corretamente é necessária uma especificação completa de todas as forças conhecidas e desconhecidas que atuam no sistema analisado. Assim devemos saber os



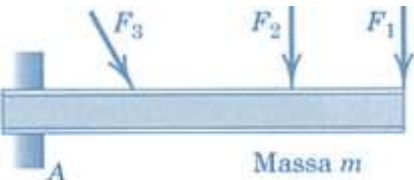
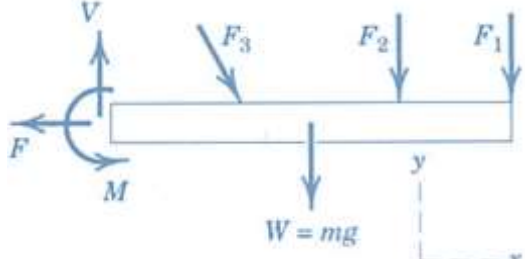
tipos de ligação entre estruturas e as reações causadas por cada um. Também é importante sabermos os **números de incógnitas envolvidas** em cada tipo de contato. Vejamos a tabela abaixo com os principais tipos de conexão:

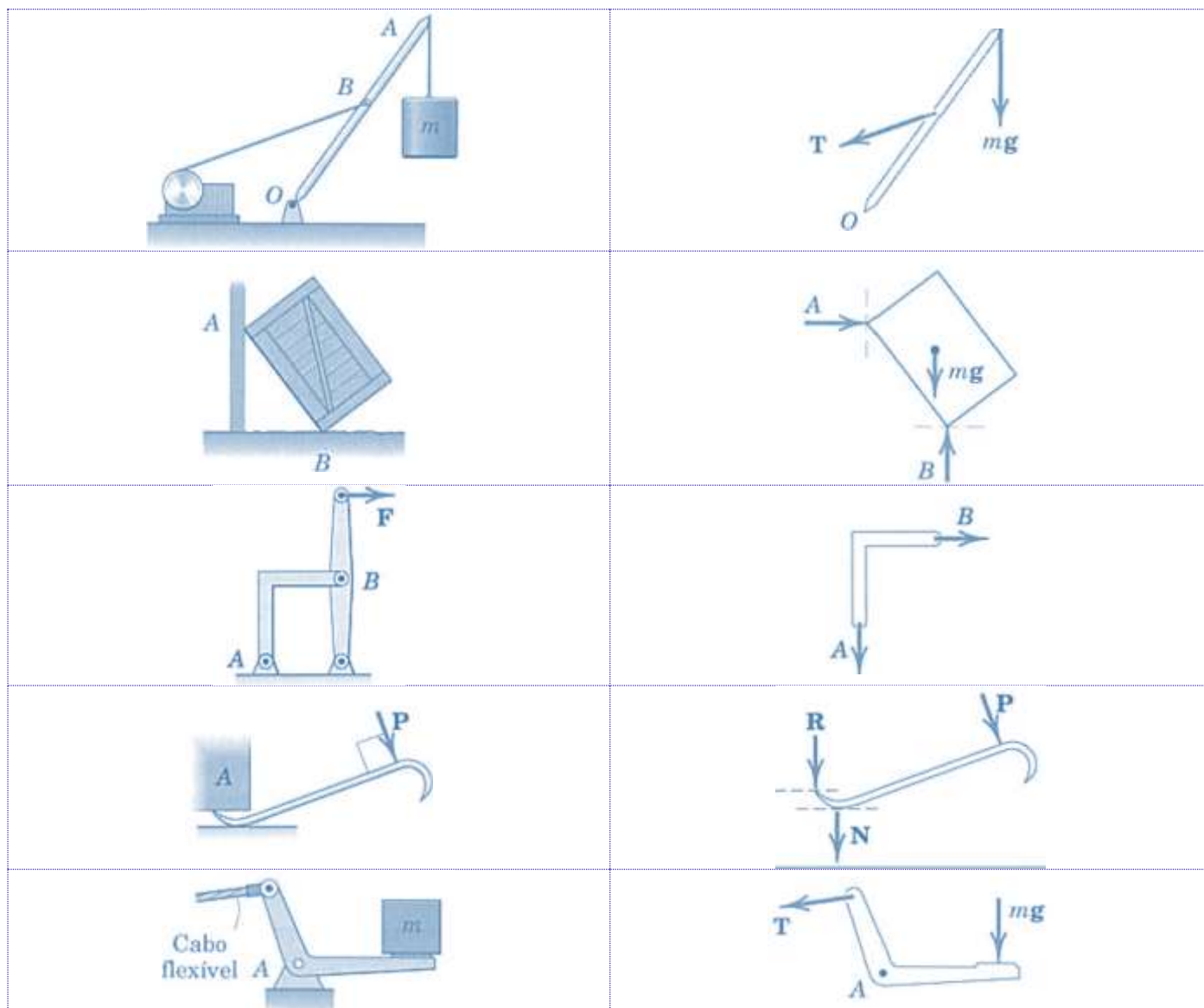
TIPO DE CONEXÃO (CONTATO)	REAÇÃO (AÇÃO SOBRE O CORPO A SER ISOLADO)	NÚMERO DE INCÓGNITAS
 Cabo		A força atua fora do membro na mesma direção do cabo sendo uma força trativa. Uma incógnita.
 Rolete		A reação atua perpendicular à superfície onde há o contato. Uma incógnita.
 Rolete ou pino confinado em ranhura sem atrito	 Ou	Uma incógnita. A reação causada atua no sentido perpendicular a ranhura.
 Superfície lisa		A força de contato é compressiva e normal a superfície. Uma incógnita. Em superfícies rugosas existirá uma força de atrito tangencial F e uma componente resultante R .
 Pino		Duas incógnitas. As reações são duas componentes no eixos x e y . Quando o pino não tiver liberdade de rotação ele suportará um momento M também.

 Elemento fixo a colar deslizante em uma barra lisa		As reações são o momento M e a força normal à barra. Duas incógnitas.
 Apoio fixo ou engastado		As reações em um engaste são: Força axial F, Força cortante V e momento fletor M. Três incógnitas.
 Atração da gravidade	 $W = m \cdot g$	A força resultante de uma massa é o seu peso W, obtido pela multiplicação da massa e da atração da gravidade. Esta sempre será na direção do centro da terra passando pelo centro de massa G do corpo analisado. Uma incógnita.
 Ação de uma mola		A força da mola é trativa se a mola estiver esticada e compressiva se estiver comprimida. A força da mola é obtida pelo produto de sua rigidez k e a distância x, $F = k \cdot x$. Uma incógnita.

Sempre busque escolher o ponto de **aplicação de momento** em que passam o **maior número de incógnitas e forças possíveis**.

Não se esqueça de incluir no DCL TODAS as forças que possuem valores obviamente desprezíveis. A tabela abaixo exemplifica o diagrama de corpo livre de vários sistemas.

EXEMPLO DE SISTEMA	DIAGRAMA DE CORPO LIVRE
 Massa m	



Fonte: J.L. Meriam e L.G. Kraige 2008

Caso ainda sinta que está faltando algo, recomendo que você resolva algumas questões na nossa bateria no fim da aula e após a compreensão dos temas anteriores retome o estudo a partir deste ponto.

Por favor, não hesite em me procurar em nosso fórum de dúvidas para que você não fique com dúvidas para trás. Borá para o estudo de treliças?!?!

1.5 – Análise de estruturas

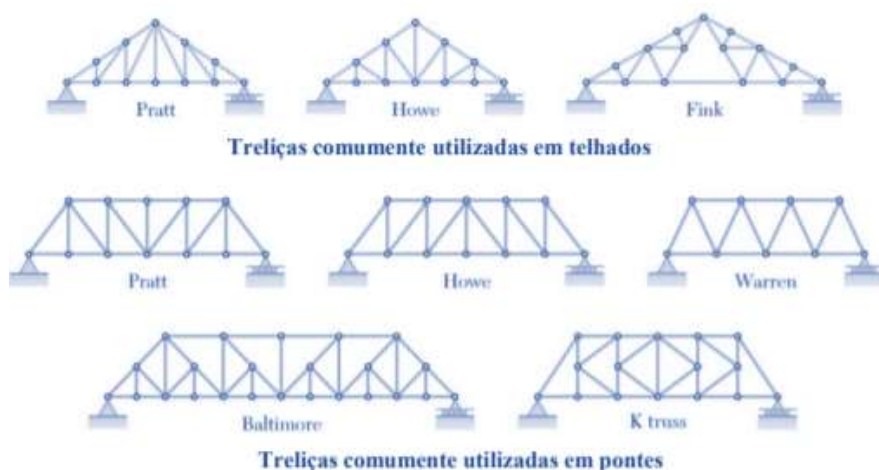
Neste tópico iremos analisar as forças que atuam internamente em diversas estruturas de engenharia dando enfoque em treliças, suportes e máquinas. A análise das reações desconhecidas nestas estruturas, pode ser realizada através da correta concepção do diagrama de corpo livre e aplicação das equações de equilíbrio.





As **treliças planas** são basicamente formadas por **elementos delgados unidos** em suas extremidades. Alguns exemplos de treliças são: pontes (ao lado), tesouras de telhados, guindastes (gruas), entre outros. Diversos materiais podem ser utilizados para a montagem de treliças dentre eles destacam-se madeira e metais, sendo que a união dos pontos nas extremidades (nós) dos elementos podem ser via soldagem, rebites, pinos ou parafusos.

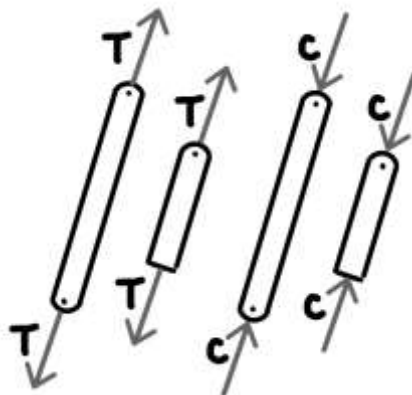
Uma **treliça simples** pode ser formada por **três barras unidas** por pinos em suas extremidades, constituindo uma estrutura rígida. A figura abaixo representa diversos tipos de configurações de treliças que podem ser exemplificadas como treliças planas.



Fonte: Beer (2010)

Para analisarmos uma treliça é necessário a **obtenção da força** em **cada um de seus elementos**. Nelas todas as cargas são aplicadas aos nós e geralmente o peso dos elementos são desprezados, contudo quando o peso deve ser considerado é comum atribuí-lo como uma força vertical distribuída igualmente entre as extremidades de cada elemento. Por fim, devemos considerar que os elementos que compõe a treliça são interligados entre si por pinos lisos, assim cada elemento atua como uma barra de duas forças.

Se uma força tende a **alongar o elemento** é denominada força de **tração** se tende a **comprimi-lo** chamamos de força de **compressão**. Quando um elemento é comprimido, geralmente este deve ser mais espesso que um elemento tracionado, devido a flambagem que este pode sofrer. A figura abaixo representa forças de tração e compressão em elementos.



Força de tração (T) e força de compressão (C)

Lembre-se que um elemento sujeito a **tração** está **“puxando”** o nó e sujeito a **compressão** está **“empurrando”** o nó. Existem dois métodos para a análise de treliças que são: métodos dos nós e método das seções.

Método dos nós: através da consideração de **equilíbrio em um nó** da treliça a força sobre um elemento se torna externa em nosso DCL assim podemos aplicar as equações de equilíbrio nos eixos X e Y. Na utilização deste método primeiro devemos desenhar o diagrama de corpo livre dos nós e após aplicar as equações de equilíbrio em cada um.

No método dos nós devemos sempre começar a análise naquele que possui apenas uma força conhecida e não mais que duas desconhecida. Dessa forma aplicando as duas equações de equilíbrio ($\sum F_x = 0$ e $\sum F_y = 0$) teremos duas equações algébricas para duas incógnitas.

Para determinarmos o correto sentido de uma força indeterminada podemos admitir sempre que as forças indeterminadas dos elementos de um nó são de tração, assim com a correta solução numérica o **sinal positivo** irá indicar a **força sob tração** e um **escalar negativo** indicará um escalar **sob compressão**. Outra forma de determinar o sentido correto de uma força desconhecida é através da visualização (inspeção) dos sentidos das forças conhecidas atuantes e da percepção do sentido da força resultante para o sistema se manter em equilíbrio. Isto pode ser obtido através da prática, na resolução de questões.



As **treliças** são muito utilizadas em engenharia pois, suas **barras sofrem esforços axiais**, não havendo transmissão de momento fletor entre seus elementos. As forças são somente de tração ou compressão devido ao fato de todos os pontos que ligam os elementos serem livres de rotação.

Para que uma **treliça seja estável** ela deve satisfazer a seguinte equação:

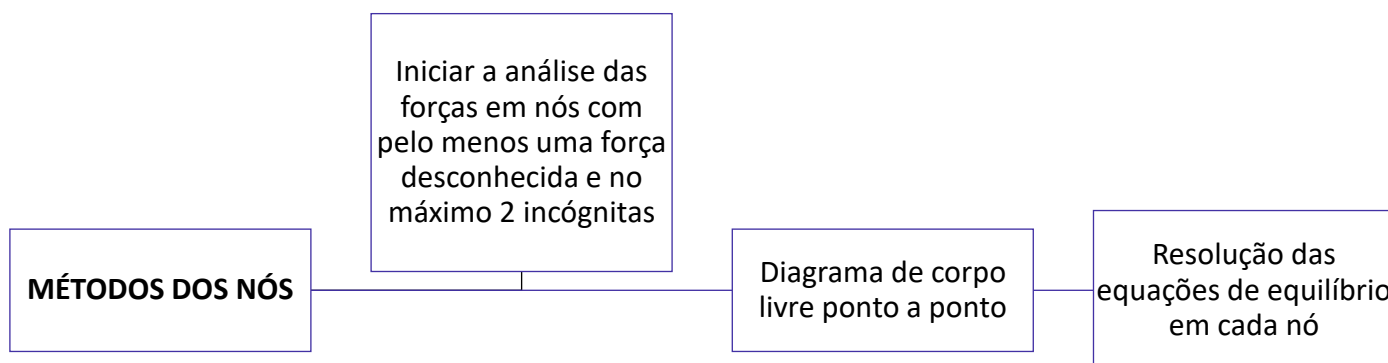


$$b \geq 2.n - 3$$

Onde b é o número de elementos que compõem a treliça e n é o número de nós.

Para análise estrutural de treliças também existe o **método das seções**. Este método parte do princípio de que se um corpo está em equilíbrio, qualquer parte deste também está em equilíbrio. Como o nome do método já diz, podemos utilizá-lo para **seccionar os elementos de uma treliça**. No entanto, como existem apenas três equações de equilíbrio devemos “cortar” uma seção por onde não passem mais do que três elementos com forças desconhecidas.

Este método pode ser mais **eficaz**, em **treliças de grande porte**, do que o método dos nós, pois não precisa ser realizada a análise em cada ponto de ligação dos elementos. No entanto cabe a você caro concurseiro, a escolha de qual método é o mais adequado para a resolução das questões na hora de sua prova. Como não há grande incidência de questões de treliças em provas de engenharia, acredito que dominando o **método dos nós**, que na minha opinião é **mais simples**, você já conseguirá acertar as questões sobre o tema. O método das seções será abordado mais adiante nesta aula nos estudos dos efeitos internos.



Por fim, o **método dos nós** desenvolvido para treliças planas também pode ser utilizado para **treliças espaciais**, satisfazendo a equação vetorial $\sum F = 0$, para cada nó. Nesse caso, podem estar envolvidas um grande número de equações, em que se torna necessário soluções computadorizadas.

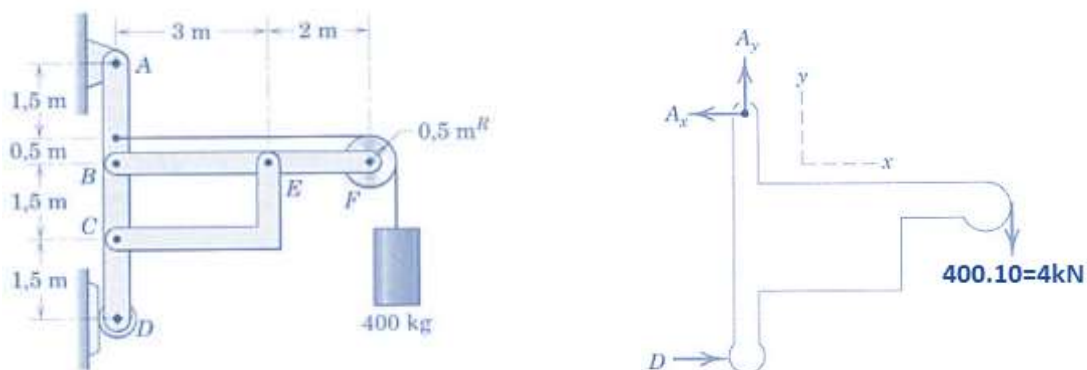
Ainda dentro da análise de estruturas, vamos ao estudo de suportes e máquinas que são estruturas que possuem ao menos um **elemento multiforça**. Estes elementos recebem essa denominação por possuírem **três ou mais forças atuando** sobre si geralmente em direções diferentes dos elementos, portanto não podemos utilizar o método das seções ou nós para realizar a análise destas estruturas.





Some os momentos em relação a um ponto onde há o maior número de forças desconhecidas possíveis.

Vejamos um exemplo na figura abaixo onde temos um suporte sustentando uma carga. Desprezando os pesos dos elementos, vamos calcular **todas as forças** que atuam na estrutura, iniciando com o DCL da parte externa.



Fonte: J.L. Meriam e L.G. Kraige, 2008

Aplicando as equações de equilíbrio, e adotando a aceleração da gravidade igual 10m/s^2 , podemos determinar as **reações**, D, Ax e Ay.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -(400 \cdot 10) \cdot (2 + 3 + 0,5) + D \cdot (1,5 + 1,5 + 1,5 + 0,5) = 0 \Rightarrow D = 4,4\text{kN}$$

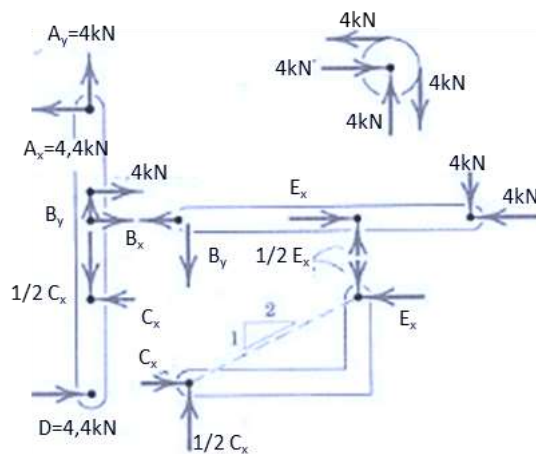
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -A_x + D = 0 \Rightarrow A_x = 4,4\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 4\text{kN} = 0 \Rightarrow A_y = 4\text{kN}$$

DICA: lembre-se de adicionar a distância do raio da polia na hora de calcular o momento da força peso.

Em seguida devemos desmembrar cada elemento de nossa estrutura e montar os seus respectivos DCLs. Vejamos:





Fonte: Adaptado de J.L. Meriam e L.G. Kraige, 2008

Feito isso podemos aplicar as equações de equilíbrio em cada elemento e calcular todos os esforços do sistema. Analisando o elemento CE, aplicando as equações de equilíbrio obtemos as seguintes relações:

$$E_y = \frac{1}{2} E_x \text{ e } C_y = \frac{1}{2} C_x$$

O **componente CE** possui reações iguais e opostas, sendo um elemento de **duas forças**.

No diagrama de corpo livre da polia fica nítido que as **reações no ponto F** são iguais a carga de **tração no cabo**. Conhecidas algumas das forças, vamos a análise do elemento BF:

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow B_y \cdot 3 - 4kN \cdot 2 = 0 \Rightarrow B_y = 2,67kN$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +E_y - B_y - 4kN = 0 \Rightarrow E_y = 6,67kN \text{ logo } E_x = 13,34kN$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -B_x + E_x - 4kN = 0 \Rightarrow B_x = 9,34kN$$

Por inspeção notamos que os valores de E_x e C_x são iguais, assim podemos analisar o elemento AD que nos resta para descobrirmos se todos os esforços calculados na estrutura estão corretos. Para T = tração no cabo = 4kN, vejamos:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow +A_x \cdot 3,5 - B_x \cdot 1,5 + D \cdot 1,5 - T \cdot 2 = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -A_x + B_x + D + T - C_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -C_y + B_y + A_y = 0$$

Encerramos assim o estudo das estruturas de engenharia através do estudo de treliças e de estruturas, passamos ao estudo das forças distribuídas.



1.6 – Forças Distribuídas

Basicamente existem **três tipos** de forças distribuídas, que são:

Distribuição linear: ocorre quando a força está **disposta ao longo de uma linha** como carga vertical em que a carga w possui a unidade de $[N/m]$.

Distribuição em uma área: quando uma força está **disposta sobre uma área**, como a pressão que a água exercer sobre as paredes de um balde de água. A intensidade da força é dada em $[N/m^2]$.

Distribuição Volumétrica: ocorre quando uma força está **distribuída sobre o volume** de um corpo. A força de corpo mais comum é a atração da gravidade. A Figura abaixo exemplifica os três tipos de forças distribuídas. Vejamos:



DISTRIBUIÇÃO LINEAR	DISTRIBUIÇÃO AO LONGO DE UMA ÁREA	DISTRIBUIÇÃO VOLUMÉTRICA

Vamos abordar agora a determinação do **ponto em um corpo em que há atuação da força gravitacional**, analisando as propriedades geométricas associadas. Vamos iniciar pelo estudo do centro de massa que é um ponto hipotético onde existe a concentração de toda a massa de um sistema físico e que se movimenta como se todas as forças externas atuassem neste ponto.

Para determinarmos o centro de gravidade de um corpo, matematicamente, usamos o princípio dos momentos ao sistema paralelo das forças gravitacionais. Quando abordamos o campo gravitacional como uniforme e paralelo podemos adotar o centro de gravidade como o centro de massa de nosso corpo, assim podemos expressar as coordenadas do centro de massa como:

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dm}{m} \quad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dm}{m} \quad \bar{z} = \frac{\int z \cdot dm}{m}$$

Para se expressar as equações das coordenadas da forma vetorial, adotando $r = xi + yj + zk$ e $\bar{r} = \bar{x}i + \bar{y}j + \bar{z}k$, a seguinte equação é utilizada:

$$\bar{r} = \frac{\int r \cdot dm}{m}$$



Em grande parte dos cálculos da posição do centro de massa via integral, podemos simplificá-los a partir da **correta escolha dos eixos de referência**. Também, quando existir linha ou plano de simetria em um corpo considerado homogêneo, um eixo ou um plano coordenado, estes devem ser considerados como referência.

Em questões de concursos existe uma maior incidência de questões abordando apenas formas geométricas. Nesse caso, adotamos o termo centróide como se fosse o centro de massa (expressão adotada quando falamos de um corpo físico real).



Quando a massa específica de um corpo não variar, sendo uniforme em todo o corpo, as posições do centro de massa e do centroide serão idênticas.

Uma vez que uma **figura ou um corpo** pode ser apropriadamente **dividido em mais de uma parte** cujos centro de massa sejam facilmente determinados, usamos o **princípio dos momentos** e adotamos cada uma dessas partes como um elemento finito do íntegro. Assim podemos encontrar as coordenadas do centro de massa de um corpo, na direção x, através do **somatório** de cada parte da seguinte forma:

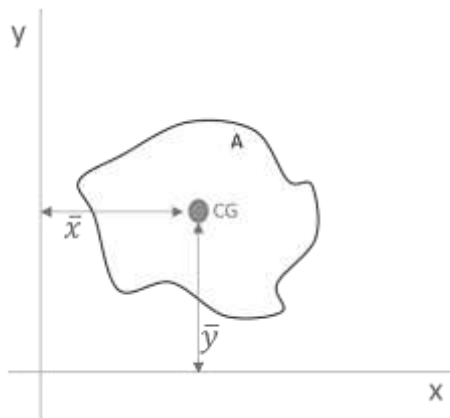
$$\bar{X} = \frac{m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + m_3\bar{x}_3 \dots}{(m_1 + m_2 + m_3 \dots)}$$

Onde $\bar{X}$ é a coordenada x do centro de massa do corpo inteiro. Outra forma de expressar o somatório, em que as mesmas relações podem ser adotadas para as coordenadas y e z do centro de massa de um corpo é dada pelas seguintes expressões:

$$\bar{X} = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum m} \quad \bar{Y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m} \quad \bar{Z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m}$$

Relações similares podem ser utilizadas **para linhas, áreas e volumes compostos**, em que m é substituído por L, A e V respectivamente. Em questões de concursos, há maior incidência de cobrança de centróide para **áreas**. Vejamos uma representação em que o centróide de uma determinada área pode ser adotado como:





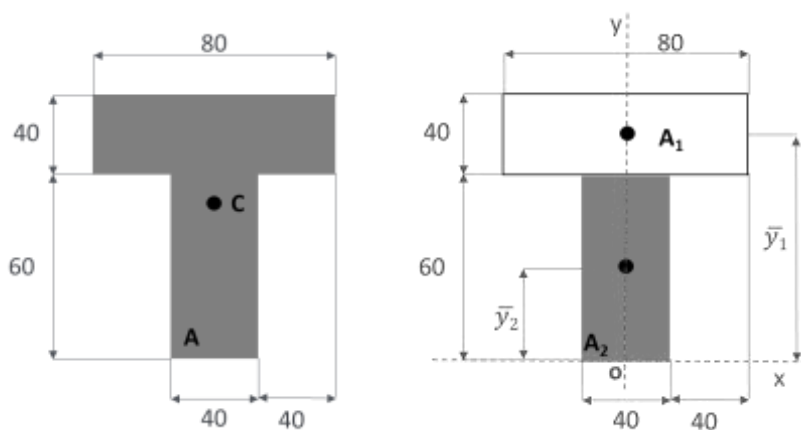
$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dA}{A} \rightarrow \bar{X} = \frac{\sum \bar{x} \cdot A}{\sum A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y \cdot dA}{A} \rightarrow \bar{Y} = \frac{\sum \bar{y} \cdot A}{\sum A}$$



Quando um vazio ou cavidade forem tidos como elementos de um corpo ou figura composta, a massa correlata à cavidade ou ao vazio é abordada como uma quantidade negativa.

Vejamos um exemplo de como determinar o centróide de uma figura composta



Para determinarmos o **centróide** da área indicada, devemos adotar o **eixo de coordenadas** e dividi-la em dois retângulos. Conforme a figura ao lado.

Nota-se que o centróide está localizado no eixo y, pois este é um eixo de simetria. Portanto, $\bar{X} = 0$.

Adotando que as dimensões são em milímetros, sabendo que $\bar{y}_1 = 80\text{mm}$ e $\bar{y}_2 = 30\text{mm}$ vamos calcular a ordenada Y do centróide da área. Para **simplificarmos**, vamos utilizar uma **tabela** para a realização do cálculo:

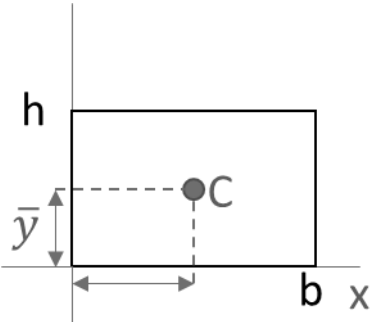
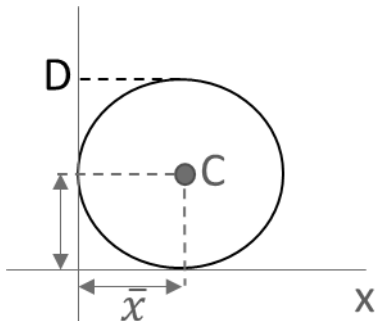
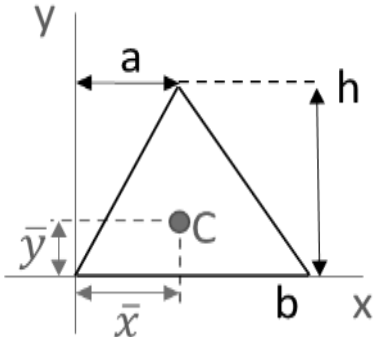
	Área [mm ²]	$\bar{y}$ [mm]	A. $\bar{y}$ [mm ³]
A ₁	40.80 = 3200	80	256 x 10 ³
A ₂	40.60 = 2400	30	72 x 10 ³
	$\sum A = 5600$		$\sum A \cdot \bar{y} = 328 \times 10^3$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A \cdot \bar{y}}{\sum A} = \frac{328 \times 10^3}{5,6 \times 10^3} = 58,6 \text{ mm}$$



Como visto no exemplo, usualmente **questões em provas** que envolvem centróide tratam a respeito de **figuras geométricas comuns** como triângulos, retângulos e círculos ou a combinação desses. Como o tempo médio para resolução de questões não pode ser muito grande a ponto de você realizar uma integração durante sua prova, você decorando as coordenadas X e Y desses elementos e sabendo realizar o cálculo das coordenadas C e Y do centróide de figuras compostas, poderá ser o suficiente para a resolução da grande maioria de questões envolvendo centróide de área.

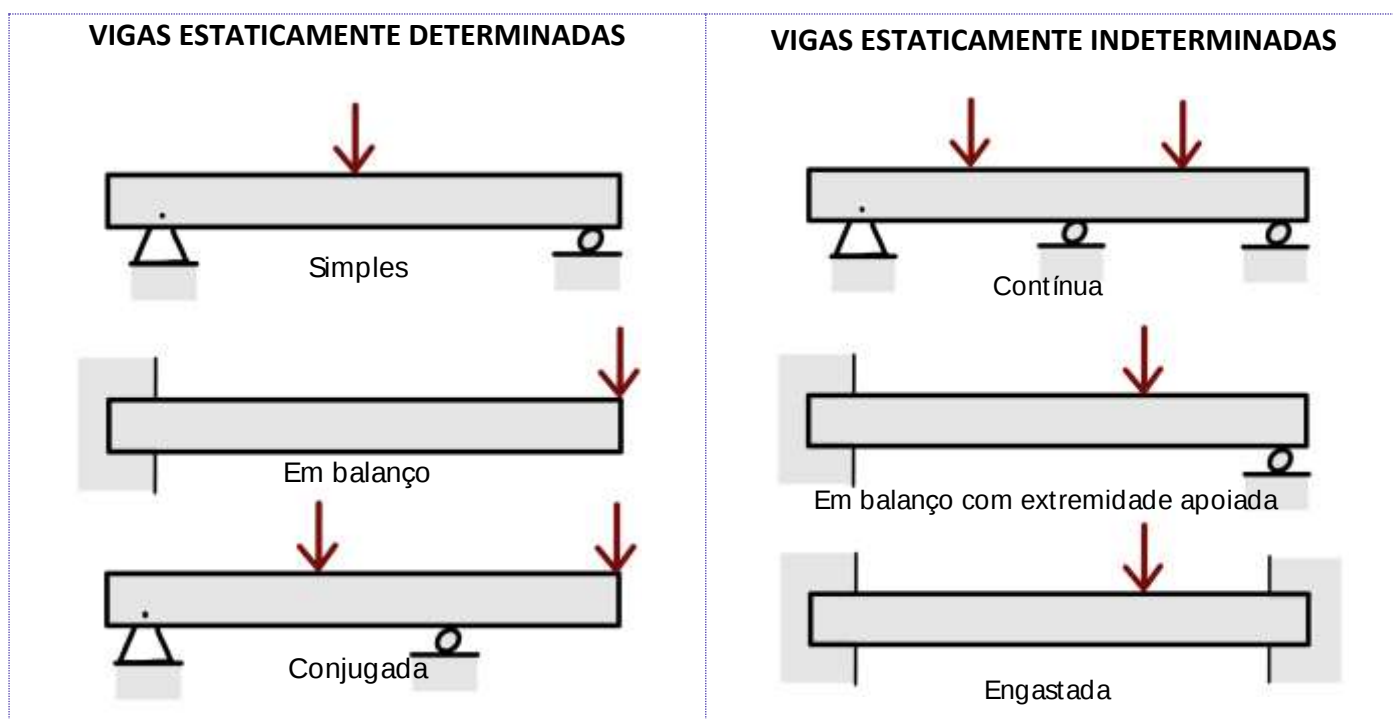
Vejamos a **tabela** abaixo que traz as propriedades das **três principais figuras planas**:

Retângulo 	$\bar{x} = \frac{b}{2} \text{ e } \bar{y} = \frac{h}{2} \rightarrow A = b \cdot h$
Círculo 	$\bar{x} = \frac{D}{2} \text{ e } \bar{y} = \frac{D}{2} \rightarrow A = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2$
Triângulo 	$\bar{x} = \frac{a + b}{3} \text{ e } \bar{y} = \frac{h}{3}$

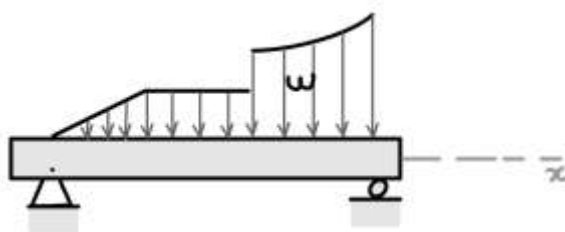


Agora que sabemos determinar o centro de massa de corpos, podemos analisar esforços em vigas com **cargas distribuídas**. Vigas são corpos estruturais que resistem a flexão devido a carga aplicadas, com certeza são os principais elementos estruturais existentes no mundo da engenharia.

Existem dois tipos de **classificação para as vigas** que são as **estaticamente determinadas e as estaticamente indeterminadas**. As vigas que se encontram apoiadas, de maneira que podemos calcular as reações aos seus apoios externos aplicando somente os métodos estudados até agora na estática, são chamadas de vigas estaticamente determinadas. Vigas que possuem mais pontos de apoios do que o necessário para que estejam em equilíbrio, são denominadas estaticamente indeterminadas. Vejamos alguns exemplos:



Podemos também identificar as vigas pelos **tipos de carregamentos externos** a qual estão expostas. Estas podem sofrer cargas concentradas, como vistas na figura acima ou distribuídas, conforme a figura abaixo.

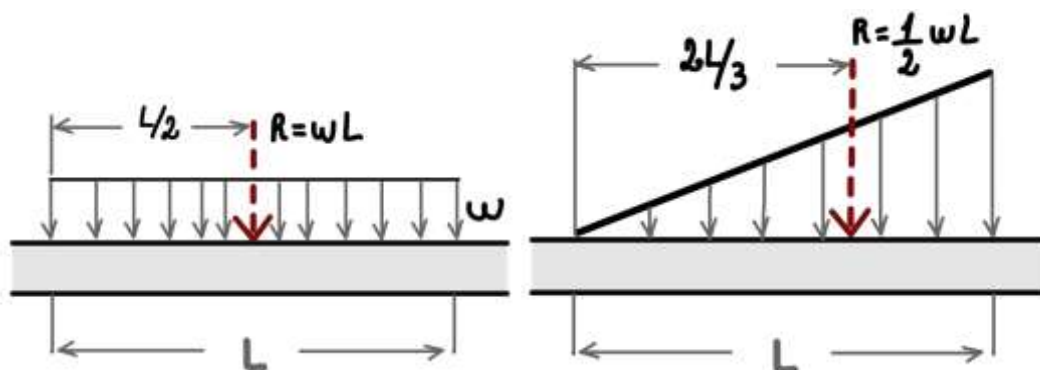


Por fim, a **força resultante da concentração** de uma força distribuída em uma viga sempre estará localizada no **centróide** da área em consideração. Portanto, podemos considerar uma carga distribuída concentrada em apenas uma resultante em um ponto e, assim, poderemos analisar os esforços em uma viga com carga distribuída através de análise estática direta.

A **resultante de uma distribuição de carga** é dada por:

$$R = \int w \cdot dx$$

Vejamos alguns **exemplos de resultantes** para alguns tipos de carregamento na **figura abaixo**, com a possibilidade de redução das cargas distribuídas para apenas um ponto, podemos analisar os esforços em uma viga através da análise estática.



Passaremos agora ao estudo do momento de inércia de figuras planas, tópico esse estreitamente relacionado a definição de centróide.

1.7 – Momento de Inércia

Em alguns casos no estudo da resistência dos materiais se torna necessário calcularmos a integral do **momento de segunda ordem** de uma área, que denominamos de **momento de inércia**. Para uma área inteira o momento de inércia é determinado pelas seguintes integrais:

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA$$

Também, em algumas situações, podemos nos deparar com a necessidade de expressar o momento de segunda ordem do elemento diferencial **em torno do polo O ou eixo Z**, que é chamado de **momento polar de inércia**. Vejamos:

$$J_o = \int r^2 dA = I_x + I_y$$

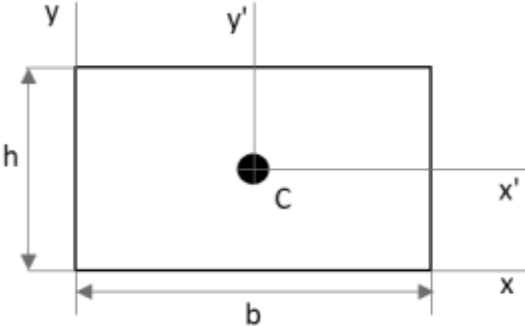
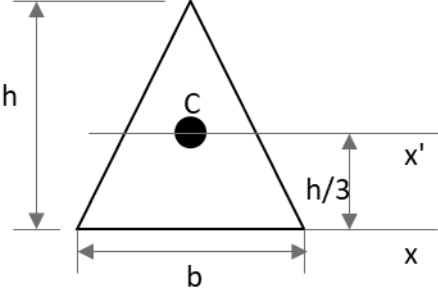
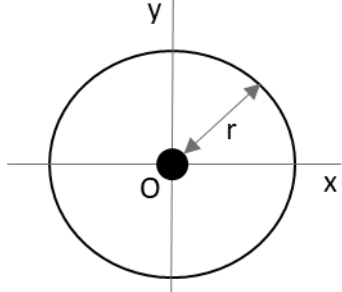
Onde r é a distância perpendicular entre o polo (eixo z) e o elemento dA .

Os **momentos de inércia sempre serão positivos** e suas unidades sempre serão em alguma unidade de comprimento elevada a quarta potência.

Prezado estrategista, durante sua prova não é comum a necessidade da realização de integrais para a resolução de questões. Portanto, as **fórmulas para calcular o momento de inércia** de uma área simples,



de figuras geométricas retangulares e circulares, devem ser **obrigatoriamente de seu conhecimento**. Vejamos a tabela abaixo onde temos os principais momentos de inércia.

	$I_{x'} = \frac{1}{12}bh^3; \quad I_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3; \quad I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_c = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
	$I_{x'} = \frac{1}{36}bh^3; \quad I_x = \frac{1}{12}bh^3$
	$I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_o = \frac{1}{2}\pi r^4$

Se o momento de inércia de uma área situada em torno de um eixo centroidal for conhecido, é possível determinar o momento de inércia da área em torno de um **eixo paralelo** correspondente através do **TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS**. Esse teorema é muito utilizado na hora de calcularmos o momento de inércia de **áreas compostas**. As equações que definem o teorema dos eixos paralelos são:

$$I_x = \overline{I_{x'}} + Ad_y^2; \quad I_y = \overline{I_{y'}} + Ad_x^2; \quad J_o = \overline{J_c} + Ad^2$$

Onde A é a área do corpo e d é a distância entre os dois eixos.

Essas equações definem que o momento de inércia de uma área em torno de um eixo é igual ao momento de inércia em torno de um eixo paralelo que passa pelo centroide, somado ao produto entre a área e o quadrado da distância perpendicular entre os eixos. Para finalizar, devemos ter em mente que o **teorema dos eixos paralelos** só pode ser utilizado se **um dos eixos for um eixo centroidal**.

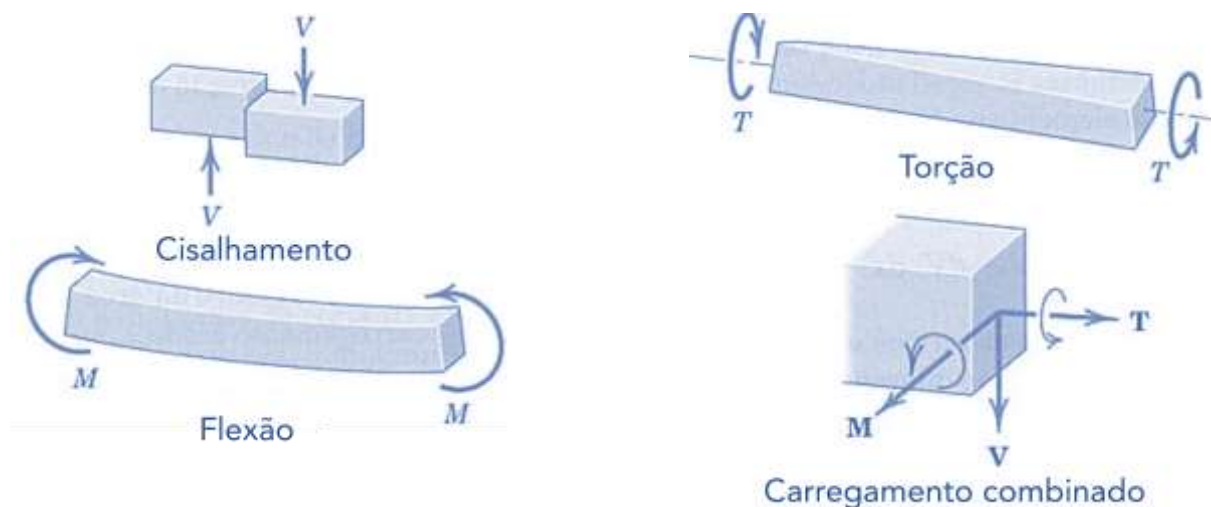


O momento de inércia de uma figura plana composta em relação a qualquer eixo particular é a soma dos momentos de inércia de suas partes em relação a esse mesmo eixo.

Caro aluno(a), encerramos aqui o estudo de momento de inércia a passaremos ao estudo dos efeitos internos a qual vigas estão expostas.

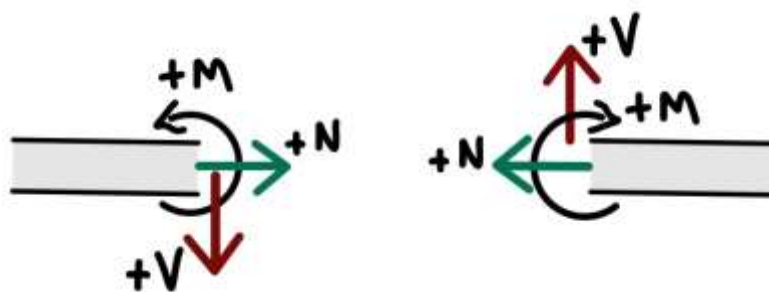
1.8 – Vigas - Efeitos Internos

Uma **viga**, além de suportar tensões trativas e compressivas, **pode estar sujeita a cisalhamento, flexão e torção**, conforme a figura abaixo podemos perceber como cada tipo de esforço age sobre o corpo rígido.



Fonte: J.L. Meriam e L.G. Kraige, 2008

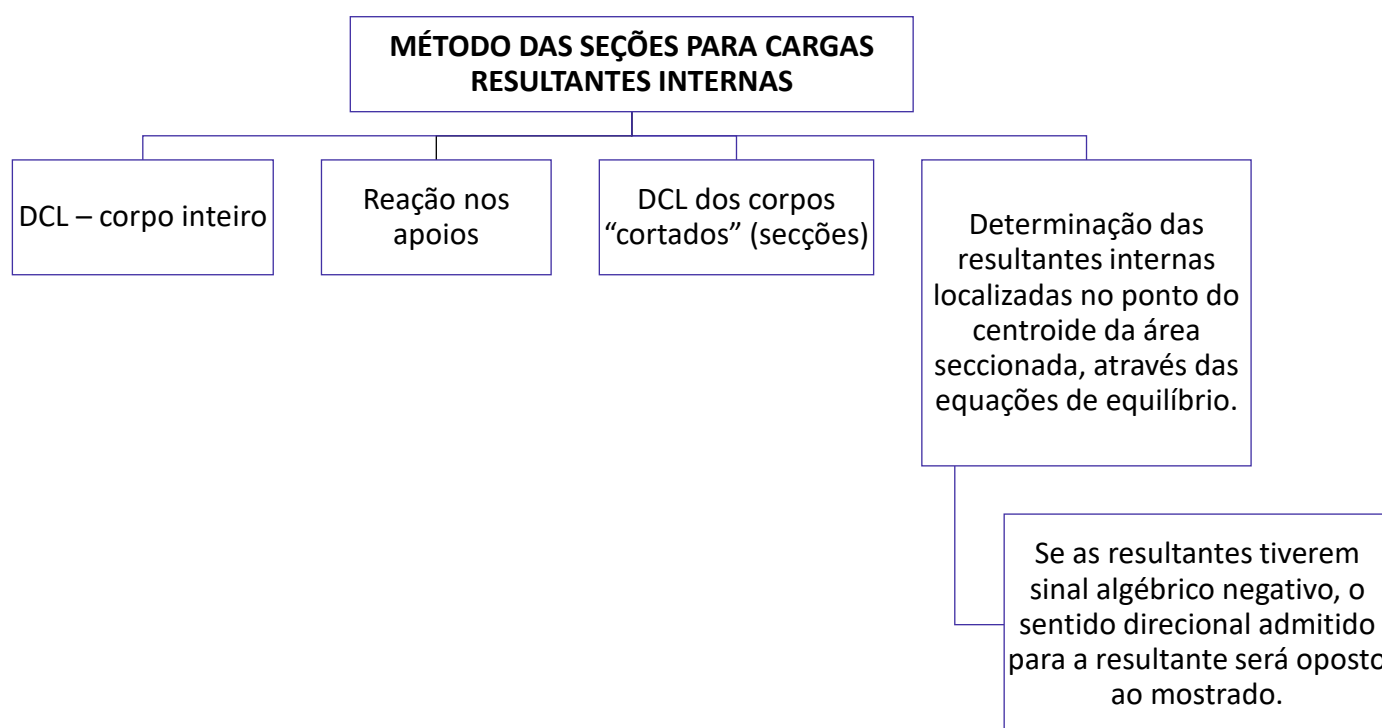
De acordo com a figura acima, a **força V** é denominada **força cisalhante ou cortante**. O **momento M** é chamado **momento fletor** e o **binário T** é denominado de **momento torçor**. Geralmente as **convenções de sinais** das forças cortantes V e dos momentos fletores M são dadas conforme a **figura abaixo**.



Além do momento fletor e da força de cisalhante um corpo está sujeito a **força normal N** , que age perpendicularmente à área conforme a figura acima.



Conforme a montagem do DCL e com o desenvolvimento dos cálculos os sinais algébricos indicarão o correto sentido de cada uma dessas grandezas.



Finalizamos aqui o estudo da estática. Caso tenha ficado alguma dúvida **retome o tópico**, respire fundo e de mais uma lida, se precisar sinta-se à vontade para me procurar que iremos sanar todas as dúvidas. Passaremos agora para a resistência dos materiais!

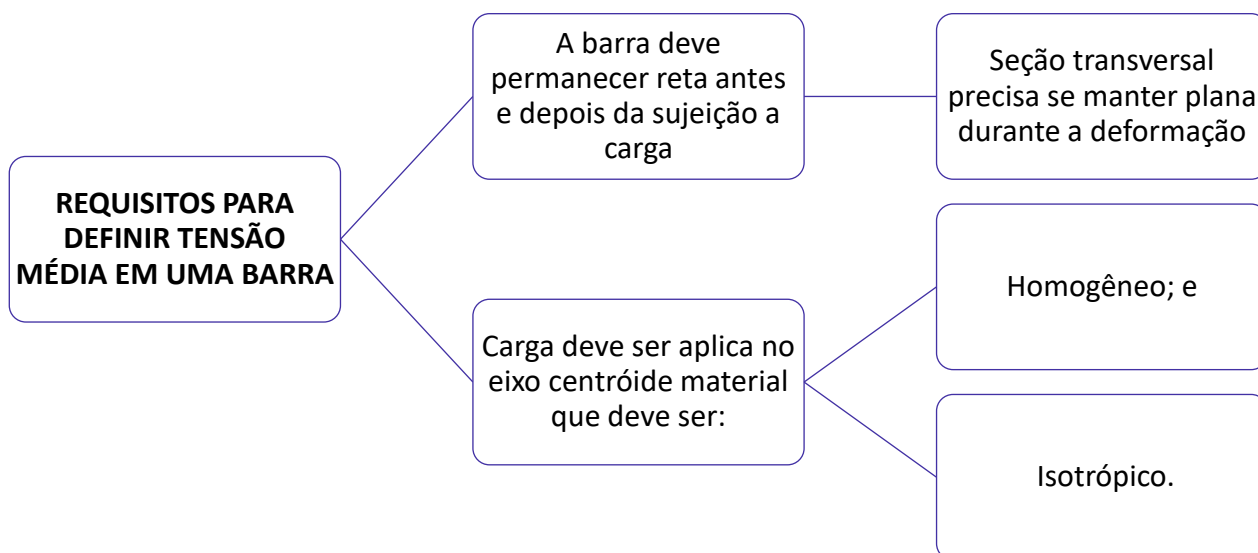
2 – Resistência dos Materiais

2.1 – Tensão

Existem **dois tipos de tensão** que são **tensão normal e tensão de cisalhamento**.

A **tensão normal** é aquela que **age perpendicularmente** a uma área. Se ela tracionar o plano (área) será chamada de tensão de tração. Caso ela comprima o elemento de área será denominada tensão de compressão.





Materiais homogêneos são aqueles que tem as **mesmas propriedades físicas e mecânicas em todo o seu volume**. **Materiais isotrópicos** são aqueles que possuem as **mesmas propriedades em todas as direções**. Logo, materiais anisotrópicos possuem propriedades diferentes em direções diferentes, e ainda a anisotropia pode ser orientada ao longo do eixo da barra, sendo assim a barra se deformará uniformemente quando submetida a uma carga axial.

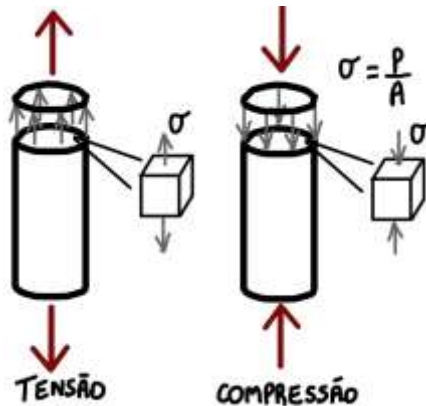
Conhecidas as condições para o cálculo da **tensão média**, ou **tensão verdadeira**, podemos defini-la pela seguinte equação:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Onde: σ = tensão normal média; P = força normal interna resultante, determinada pelo método das seções; e A = Área da seção transversal da barra.

Vejamos uma figura ilustrando as tensões normais de tração e compressão em uma barra.





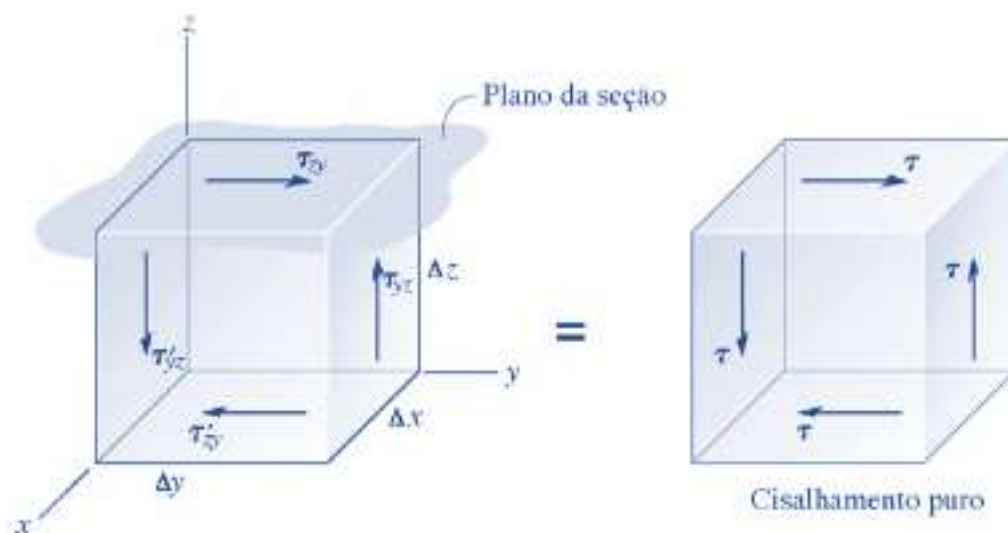
Tensão de cisalhamento é aquela que **age tangencialmente a área**, ou seja, é aquela que age no plano da área seccionada. Uma tensão de cisalhamento aplicada a um material homogêneo e isotrópico **produzirá somente deformação por cisalhamento** no mesmo plano. Logo, a tensão de cisalhamento média é definida por:

$$\tau_{méd} = \frac{V}{A}$$

Onde $\tau_{méd}$ = tensão de cisalhamento média; V = Força de cisalhamento interna.; e A = área da seção.

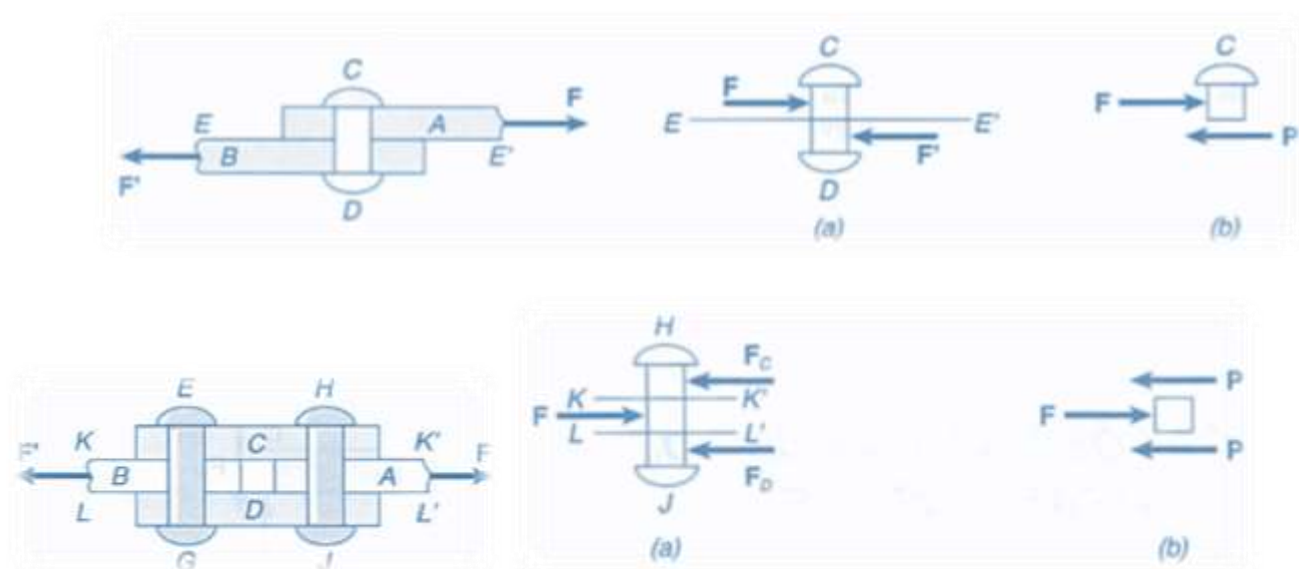
Existem **dois tipos de cisalhamento** que são o cisalhamento **simples** e o cisalhamento **duplo**. No cisalhamento simples os acoplamentos de cisalhamento simples são denominados de juntas sobrepostas onde $V=F$. Já no cisalhamento duplo o acoplamento é realizado por juntas de dupla superposição em que $V=F/2$.

Por fim, a **propriedade complementar do cisalhamento**, sob as condições mostradas, nos diz que todas as **quatro tensões de cisalhamento** devem ter valores iguais e serem **direcionadas no mesmo sentido ou em sentido oposto** uma das outras nas bordas opostas do elemento. Vejamos uma figura que ilustra o cisalhamento:



Analisando a imagem notamos que o equilíbrio de forças e momentos fazem com que a tensão de cisalhamento agindo sobre a face superior do elemento seja acompanhada pelas demais tensões que agem sobre as outras três faces.

Cabe destacar, para finalizarmos o assunto de tensão de cisalhamento, que os **elementos** que mais sofrem com esse tipo de tensão são **pregos, parafusos, rebites e pinos** que ligam as diversas partes de estruturas e máquinas. Vejamos um exemplo de cisalhamento simples e duplo. No primeiro caso as chapas AB são interligadas pelo rebite CD. Já no segundo caso (cisalhamento duplo) as chapas CD são utilizadas para conectar as chapas A e B.



Fonte: F.P. Beer E.Russel Johnston Jr.

Cisalhamento

- Fenômeno de deformação ao qual um corpo está sujeito quando as forças que sobre ele agem provocam um deslocamento em planos diferentes, mantendo o volume constante

Com isso finalizamos o estudo das tensões. Agora vamos ao estudo das deformações.

2.2 – Deformação e Propriedades dos Materiais

Prezado aluno(a), quando sujeitamos um corpo a algum tipo de carga este pode sofrer **alterações em seu tamanho ou formato**. Essas alterações são denominadas **deformações** que podem ou não serem visíveis.

A **deformação normal** é aquela em que ocorre o **alongamento ou contração** de um material por unidade de comprimento. Matematicamente definimos a deformação normal média como:

$$\epsilon_{méd} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$



Em que, $\epsilon_{méd}$ = deformação normal média; Δs = comprimento original do material; e $\Delta s'$ = comprimento do material após deformação.

Para se determinar a **relação entre a tensão normal média e a deformação normal** média de materiais metálicos, cerâmicos, poliméricos e compósitos é utilizado o **ensaio de tração ou compressão**. Basicamente um corpo de prova com dimensões padronizadas é colocado em uma máquina de testes em que o material será alongado lentamente até atingir sua tensão de ruptura.

Neste ensaio, a carga aplicada é dada pela máquina e a partir do corpo de prova, podemos obter o **alongamento** ($\delta = L - L_0$) deste, que é a **diferença entre o comprimento final e o inicial**. Com os dados obtidos no ensaio de tração também é possível calcular os valores da **tensão nominal ou tensão de engenharia** através da divisão entre a grandeza da carga aplicada (P) e a área da seção transversal do corpo de prova A_0 . Vejamos:

$$\sigma = \frac{P}{A_0}$$

Analogamente podemos obter a **deformação nominal ou deformação de engenharia** do material pela divisão da variação do comprimento (δ), pelo comprimento inicial deste L_0 . Assim, considerando a deformação constante podemos determiná-la pela seguinte expressão:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_0}$$

Através destes valores de tensão e deformação nominal podemos plotar o **gráfico de tensão deformação de um material**. Esse gráfico é denominado **diagrama-tensão deformação** convencional que é muito utilizado na engenharia mecânica para a determinação das propriedades de resistência a tração e compressão de um material, independentemente de sua forma geométrica. No diagrama de tensão-deformação é possível analisarmos alguns modos de comportamentos do material que são:

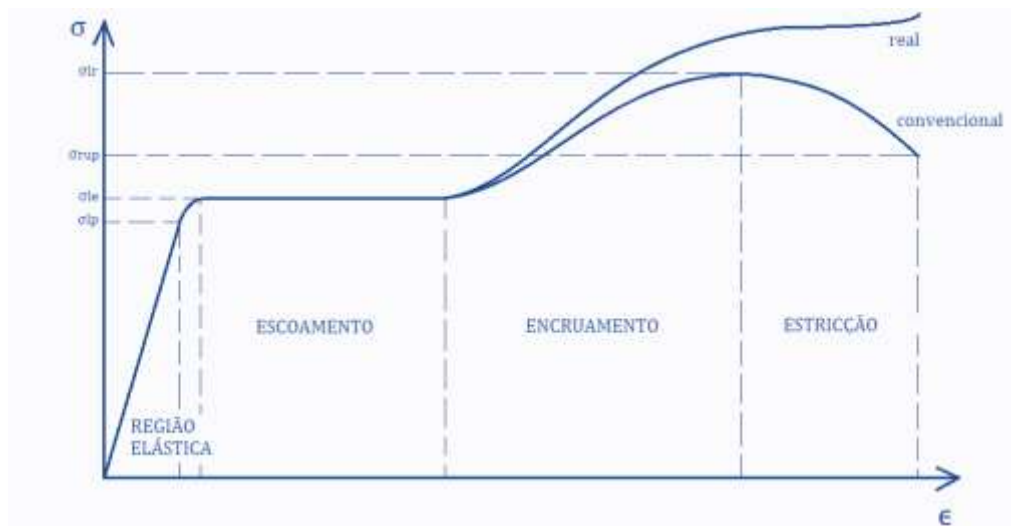
Comportamento elástico: região da curva em que o **material é linearmente elástico**, ou seja, quando a carga for retirada ele retorna a seu formato original. Esta fase elástica se estende até se atingir o limite de proporcionalidade do material.

Escoamento: Região da curva tensão X deformação onde o material atinge o seu **limite de escoamento** ocorrendo deformação plástica no material, isto indica que este se **deformou permanentemente** resultando no seu colapso.

Endurecimento por deformação: Após o término do escoamento do material é possível a aplicação de uma carga adicional ao corpo de prova resultando em uma **curva crescente até** se alcançar o limite de **resistência do material**. Esse crescimento da curva é denominado endurecimento por deformação.

Estricção: Após se atingir o limite de resistência do material a **área da seção transversal** do corpo de prova **reduz em uma região localizada**. Como resultado ocorre uma “estricção” gradativa nesta região por deformação causada por tensão de cisalhamento e devido a essa redução da área este passa a suportar uma carga decrescente até se atingir a tensão de ruptura do material. Vejamos o diagrama de tensão deformação.





Quando se é calculado os valores de tensão e deformação a partir da área da seção transversal e o comprimento do corpo de prova no instante em que a carga é medida a obtemos a curva tensão X deformação real exemplificada na figura acima. Apesar de o diagrama de tensão-deformação convencional e real serem diferentes a maioria dos estudos e projetos são voltados dentro da região elástica do material.

Existem **dois** tipos de **comportamentos de materiais** demonstrado pelo diagrama de material, havendo assim a sua classificação em **materiais dúcteis ou materiais frágeis**. Os **dúcteis** são aqueles que **podem sofrer grandes deformações** antes de se romperem. Podemos obter a ductilidade de um material através do percentual de alongamento deste, calculado através da seguinte expressão:

$$\text{Percentual de alongamento} = \frac{L_{rup} - L_0}{L_0} \cdot (100\%)$$

Da mesma maneira podemos calcular o percentual de redução de área do material a partir da expressão:

$$\text{Percentual de redução de área} = \frac{A_{rup} - A_0}{A_0} \cdot (100\%)$$

Os aços com baixo teor de carbono possuem características dúcteis.

Já os **materiais frágeis** são aqueles que **não apresentam escoamento ou deformação**, antes de se romperem. Nestes materiais a tensão de ruptura do material se torna de difícil obtenção, assim geralmente a partir do diagrama tensão-deformação deste material é obtida a tensão de ruptura média através da realização de mais de um ensaio de tração. Alguns exemplos de materiais frágeis são o ferro fundido cinzento, o concreto, aços alto carbono...

Vejamos a diferença entre os diagramas de tensão deformação de materiais dúcteis e frágeis.





Note que os materiais frágeis são materiais que apresentam pequena ou nenhuma deformação antes de sua ruptura. Diferentemente dos materiais dúcteis os materiais frágeis respondem de maneira diferente para tensões de tração e compressão, sendo que geralmente eles resistem melhor a compressão.

Ainda em relação ao gráfico temos que a tenacidade é dada pela área sob a curva tensão deformação e o módulo de resiliência (u_R) que representa a capacidade do material de absorver energia sem deformação permanente é dado pela área sob a região elástica e pode ser calculado matematicamente por:

$$u_R = \frac{\sigma_{esc}^2}{2 \cdot E}$$

Em que E é o módulo de elasticidade do material e σ_{esc} é a tensão de escoamento do material e a unidade do módulo de resiliência é joule por metro cúbico. (J/m³)

Dando sequência!

Prezado concurseiro(a), a partir da constatação, no diagrama de tensão deformação da maioria dos materiais, da existência de um comportamento linear da curva, na região elástica Robert Hooke, em 1676, analisou que existe uma **relação de proporcionalidade entre o aumento de tensão e o aumento de deformação** e assim apresentou a **Lei de Hooke** expressada matematicamente por:

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Onde E é o módulo de elasticidade do material ou módulo de Young. Esta é uma das **propriedades mecânicas** mais importantes no estudo da resistência dos materiais e só pode ser utilizado quando o material apresentar um **comportamento linear**.



A **lei de Hooke** estabelece que quanto maior for a carga normal aplicada e o comprimento inicial da peça, maior será o alongamento e que quanto maior for a área da secção transversal e a rigidez do material, medido através do seu módulo de elasticidade, menor será o alongamento.

Prosseguindo!

Para se determinar as propriedades dos materiais devem ser considerados diversos fatores como a natureza da carga aplicada, a duração, as condições ambientais, intensidade da carga, temperatura de serviço, tempo de aplicação da carga, entre outros.

Para prova, vamos abordar as propriedades diretamente, assim você deve ter em mente as seguintes definições:

Resiliência: capacidade que o material possui para **absorver energia em sua região de comportamento elástico**.

Tenacidade: capacidade que o material possui para **absorver energia até a sua ruptura**, nada mais é do que a energia mecânica necessária para se levar um material ao rompimento.

Elasticidade: capacidade que o material possui para se deformar, ao ser submetido a uma carga, e **retornar a sua forma original** após a retirada dos esforços.

Ductibilidade: capacidade que o material possui para se **deformar-se plasticamente** até o seu rompimento.

Plasticidade: capacidade de o material se **deformar na região plástica**, onde este sofrerá deformação permanente.

Dureza: **resistência que o material oferece à penetração de um corpo duro**. Para se determinar a dureza máquinas especiais são utilizadas e existem diferentes métodos e escalas para tal. Os métodos mais utilizados são: Brinell, Vickers e Rockwell.

Rigidez: é a **capacidade que um material possui à deformação quando submetido a uma força**. Nada mais é do que uma qualidade inerente ao material e é medida pelo módulo de elasticidade do material.

Agora que conhecemos as principais propriedades mecânicas dos materiais obtidas através do ensaio de tração, podemos determinar o **coeficiente de Poisson**. Uma vez que dentro da faixa elástica, submetemos um corpo a uma força de tração axial este tende a sofrer **alongamento e contração lateralmente**. Pense em uma tira de borracha quando esticada o comprimento desta aumenta enquanto sua largura diminui.

Analogamente, quando aplicamos uma tensão trativa em uma barra ocorre um aumento de seu comprimento e uma redução de seu raio, assim a deformação axial ou longitudinal e a deformação lateral ou radial podem ser obtida pelas seguintes expressões:



$$\epsilon_{long} = \frac{\delta}{L} \text{ e } \epsilon_{lat} = \frac{\delta'}{r}$$

A **razão entre** essas deformações é constante e assim podemos determinar o **coeficiente de Poisson** matematicamente pela equação abaixo, que possui sinal negativo devido a contração lateral ser negativa.

$$\nu = -\frac{\epsilon_{lat}}{\epsilon_{long}} = \left| \frac{\text{deformação específica transversal}}{\text{deformação específica longitudinal}} \right| = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$

Encerramos aqui o estudo das deformações e propriedades dos materiais. Vimos neste tópico que através do **ensaio de tração**, realizado em um corpo de prova com dimensões conhecidas, podemos obter o **diagrama de tensão-deformação** do material. Neste gráfico a tensão fica no eixo vertical enquanto a deformação está no eixo horizontal e com esses dados diversas propriedades mecânicas do material ensaiado podem ser analisadas.

Caro estrategista, passaremos agora ao estudo de métodos para determinação das reações de apoios quando estas não puderem ser determinadas pelas equações de equilíbrio. Bora lá?!

2.3 – Cargas axiais

Começaremos este tópico de nossa aula estudando o **princípio de Saint-Venant**. Vimos na seção passada desta aula que quando um material se comporta de maneira linear em sua fase elástica, a lei de Hooke pode ser aplicada e existirá uma relação proporcional entre tensão e deformação.

Quando uma barra está **carregada axialmente** em uma extremidade e presa a um apoio na outra, ela se **deforma elasticamente** ao longo do eixo de seu centroide, contudo a **deformação localizada** em um ponto mais **distante** de onde a carga está sendo aplicada é praticamente **desprezível**, enquanto na região próxima da carga a deformação é maior.

A distância mínima entre a extremidade da barra onde ocorre a deformação é, em regra, dada por no mínimo igual à maior dimensão da seção transversal carregada. A partir desta análise o cientista Francês Barré Saint-Venant afirmou que a tensão e a deformação produzidas em pontos de um corpo distantes suficientemente da região de onde a carga está sendo aplicada, serão iguais à tensão e à deformação ocasionadas por quaisquer carregamentos aplicados com a mesma resultante estaticamente equivalente e que estão sendo aplicados ao corpo dentro da mesma região.

A partir do **princípio de Saint-Venant**, podemos determinar matematicamente a **deformação elástica de um elemento submetido a cargas axiais** quando o material for homogêneo com módulo de elasticidade (E), área (A) e carga (P) constantes, como:

$$\delta = \frac{P \cdot L}{A \cdot E}$$

Caso haja **mudança repentina** na área da seção transversal de uma barra ou de seu módulo de elasticidade podemos calcular o deslocamento entre as extremidades da barra como o **somatório das deformações de cada segmento**. Vejamos:



$$\delta = \sum \frac{P \cdot L}{A \cdot E}$$

Como convenção de sinais, quando o carregamento for de **tração** consideraremos este como **positivo**. Quando for de **compressão** será considerado **negativo**, assim se o resultado calculado for positivo teremos um alongamento da barra, se for negativo teremos a contração desta.

Caso na hora de sua prova você não se lembre desta equação, você pode chegar até ela a partir da **manipulação algébrica de equações conhecidas**, como a lei de Hooke, a de tensão normal e a de deformação de engenharia. Vejamos:

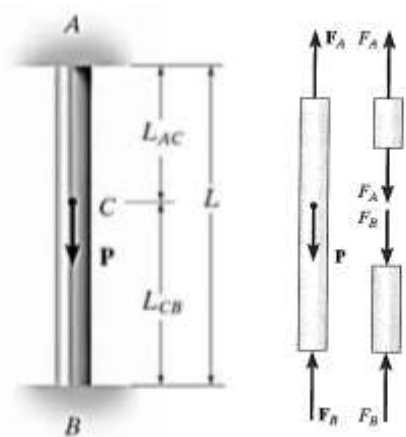
$$\sigma = E \cdot \epsilon; \quad \sigma = \frac{P}{A}; \quad e \quad \epsilon = \frac{\delta}{L_0} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{P \cdot L_0}{A \cdot E}$$

Conhecido o princípio de Saint-Venant, vamos ao estudo do princípio da superposição.

O **princípio da superposição** é usado quando é preciso determinar tensão ou deformação em pontos de um **corpo com múltiplos carregamentos ou um carregamento multiaxial**, simplificadamente carregamentos complicados para uma simples análise de equilíbrio.

Este princípio baseia-se na **determinação separadamente** dos efeitos dos vários carregamentos e no final combina-se os resultados obtidos para se obter os efeitos provocados pelos carregamentos a qual o corpo está sujeito. **Dois condições** são necessárias para a aplicação deste princípio:

- A **carga deve estar relacionada linearmente com a tensão ou o deslocamento** a ser determinado.
- O **carregamento não pode provocar mudanças significativas na configuração original** do elemento ou em sua geometria.



Vamos exemplificar o princípio da superposição com um exemplo em que um elemento estaticamente indeterminado carregado com uma carga axial. Neste caso a barra está presa em ambas as extremidades se tornando indeterminada, pois não é possível a determinação de suas reações através dos princípios de equilíbrio. Vejamos o DCL, ao lado, e a análise de equilíbrio:

$$+\uparrow \sum F = 0; \Rightarrow F_B + F_A - P = 0$$

Como não é possível determinar as reações apenas com a equação acima estabelecemos uma **equação adicional** considerando a deformação. Esta nova equação é denominada **condição de compatibilidade ou condição cinemática**.

Neste caso um deslocamento entre uma extremidade da barra seria igual ao da outra que seria igual a zero devido a fixação em ambos os apoios da barra. Assim obtemos:

$$\delta_{A/B} = 0 \Rightarrow \frac{F_A \cdot L_{AC}}{A \cdot E} - \frac{F_B \cdot L_{CB}}{A \cdot E} = 0$$

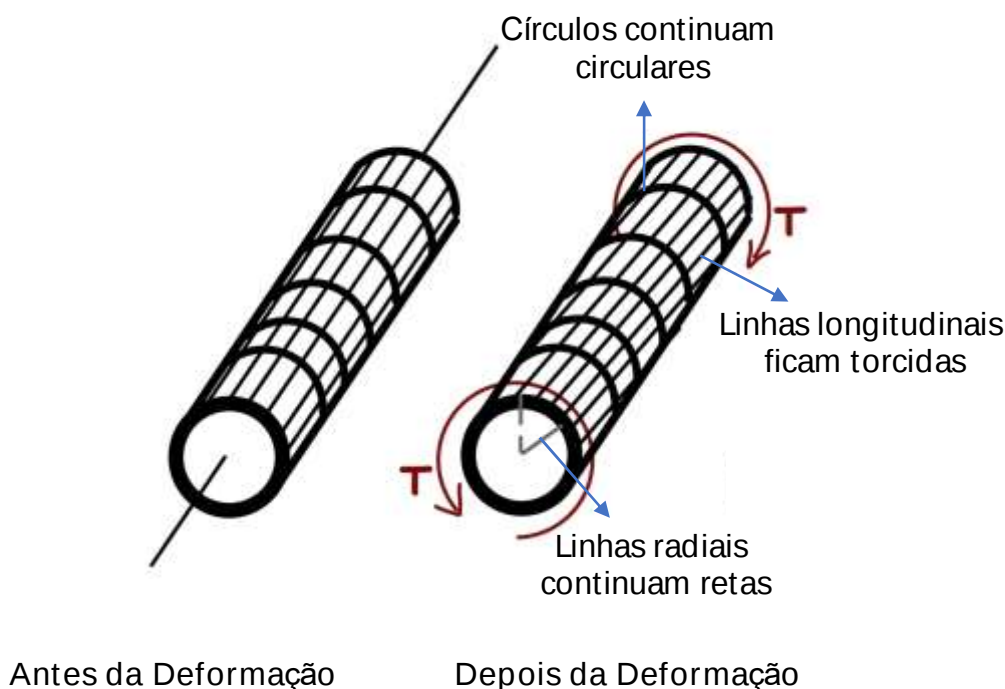
Assim possuímos **duas equações para duas incógnitas** (F_A e F_B). Substituindo uma na outra chegamos as seguintes expressões:

$$F_A = P \left(\frac{L_{CB}}{L} \right) \text{ e } F_B = P \left(\frac{L_{AC}}{L} \right)$$

Caro estrategista, a partir desta análise nota-se que as reações em uma **barra estaticamente indeterminada** podem ser encontradas pelos **princípios de equilíbrio e por condições de compatibilidade** que apresentem o deslocamento nos apoios. Com isso encerramos esta seção de nossa aula e vamos ao estudo da torção.

2.4 – Torção

Neste tópico de nossa aula vamos estudar tensões e deformações sofridas por peças com seção transversal circular, submetidas a torção. Esses efeitos são chamados de **momento torçor ou de torção ou torque (T)**. A figura abaixo exemplifica um eixo longitudinal sem e com deformação ocasionada pela sua torção.



A **tensão de cisalhamento** será maior quanto mais distante for do ponto analisado do centro da seção transversal e será menor quanto maior for o momento polar de inércia dessa seção. Matematicamente podemos expressar a tensão de cisalhamento máxima, $\tau_{m\acute{a}x}$, no eixo em sua superfície externa como:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T \cdot c}{J}$$

Em que T é o **torque interno** resultante agindo na seção transversal, que pode ser calculado pelo método das seções combinado com a aplicação das equações de equilíbrio de momento aplicada a linha centroidal do eixo, J é o momento polar de inércia da área e c é o raio externo do eixo analisado.

Quando analisamos um eixo maciço o **momento polar de inércia** é determinado pela seguinte expressão:

$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

Para casos onde o eixo for tubular o momento de polar de inércia da seção transversal será determinado pela diferença entre o raio externo e o raio interno. Vejamos:

$$J = \frac{\pi}{2} (c_{ext}^4 - c_{int}^4)$$

Essas **equações de torção** são baseadas em situações em que o torque resultante na seção transversal do eixo seja igual ao torque produzido pela distribuição linear da tensão de cisalhamento em torno da linha central longitudinal do eixo. Portanto, o **eixo ou tubo necessita apresentar seção transversal circular e ser composto por um material homogêneo**.

Outro fator importante em projetos de eixos é o **ângulo de torção** ao qual este pode ser submetido ao ser submetido a um torque. Quando se admite o torque e a área da seção transversal como constantes e que também o módulo de elasticidade ao cisalhamento do material (G) seja constante chegamos a seguinte expressão algébrica para o ângulo de torção (ϕ):

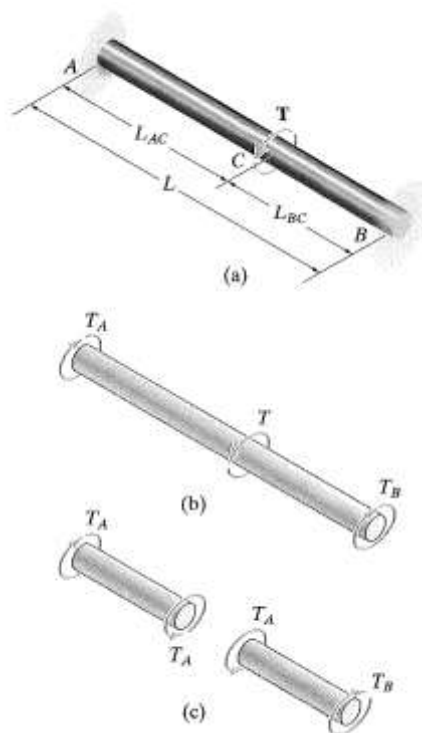
$$\phi = \frac{T \cdot L}{J \cdot G}$$

Em que L é o comprimento do eixo e ϕ é expresso em radianos.

Analogamente ao estudado com as cargas axiais, quando possuímos um **eixo estaticamente indeterminado carregado com torque**, fixados em suas duas extremidades, podemos realizar a resolução do problema através da **combinação do princípio de equilíbrio com a análise do ângulo de torção sofrido pela barra quando dividimos essa em duas partes**. Assim o ângulo de torção em uma extremidade do eixo em relação a outra será igual a zero, uma vez que os apoios são fixos.

Vejamos a figura e as equações que expressam as reações nos pontos A e B.





$$\phi_{A/B} = 0$$

$$\frac{T_A L_{AC}}{J \cdot G} - \frac{T_B L_{BC}}{J \cdot G} = 0$$

$$T_A = T \left(\frac{L_{BC}}{L} \right)$$

$$T_B = T \left(\frac{L_{AC}}{L} \right)$$

Nesses casos os torques de reação aumentam ou diminuem linearmente de acordo com a localização ao qual o torque T está sendo aplicado.

R.C. Hibbeler – Resistência dos Materiais. 7ª Ed.

Para encerrarmos o tema, devemos saber que em alguns casos podemos ter a necessidade de **converter a potência gerada** em um eixo rotativo em torque. Para isso a seguinte fórmula pode ser utilizada:

$$P = T \cdot \omega$$

Em que ω é a velocidade angular do eixo expressa geralmente em rad/s. Caso seja informado a frequência de rotação de um eixo a seguinte expressão pode ser utilizada também:

$$P = 2\pi f \cdot T$$

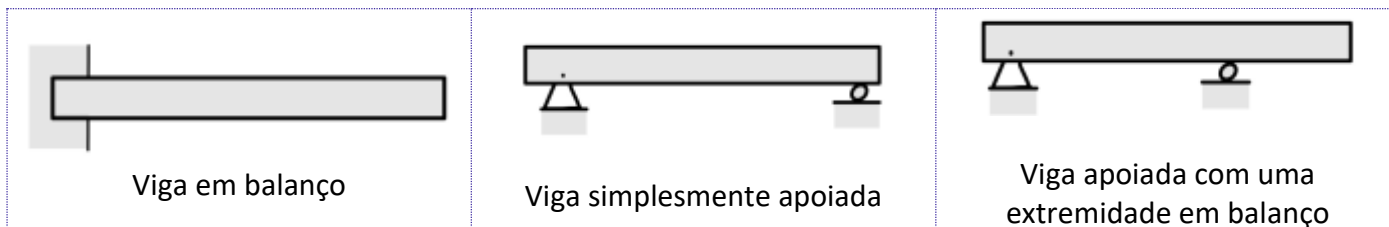
Assim encerramos o estudo da torção e passamos agora ao estudo da flexão. Vamos lá?!

2.5 – Flexão

Caro aluno(a), nesta seção vamos estudar a **flexão**. Iniciaremos com uma abordagem da construção dos **diagramas de força cortante e momento fletor** para uma viga ou eixo, pois para determinarmos a tensão de flexão devemos determinar o momento interno de uma seção.

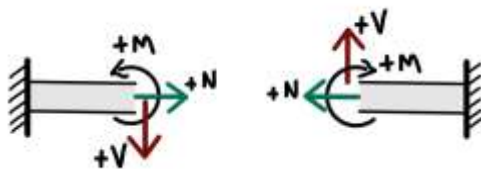
As **vigas** são **elementos longos e retos** e são fabricadas para **suportar cargas perpendiculares** ao seu eixo longitudinal. **Classificamos as vigas** de acordo com o formato **que estas são apoiadas**, sendo elas simplesmente apoiadas, em balanço ou apoiadas com uma extremidade em balanço. Vejamos a figura abaixo.





Quando se é projetada uma viga devemos conhecer os **pontos**, ao longo de seu eixo, em que a **variação do cisalhamento e do momento fletor são máximos**. Com isso, e com a adoção de uma correta convenção de sinal para cisalhamento e momento positivos, é possível encontrar seus valores em função da posição ao longo do eixo x da viga e, assim, podemos representá-los graficamente nos chamados diagramas de momento fletor e força cortante.

Vejamos uma imagem com a **convenção de sinal que adotada** para a determinação da força de cisalhamento e momento fletor de acordo com o lado do “corte” realizado na viga.



Na figura acima, temos uma viga com engaste a esquerda e outra com engaste a direita.

Para a construção dos diagramas de força cortante e momento fletor devemos adotar o seguinte procedimento:

Quando uma viga está sujeita a vários carregamentos determinar o diagrama de momento fletor e força cortante pode ser complicado. Para **facilitar** existe um **método baseado em duas relações diferenciais** que existem entre carga distribuída, cisalhamento e momento. Essas relações são:

$$\frac{dV}{dx} = -w(x)$$

inclinação do diag. de força cortante em cada ponto = -intensidade da carga distribuída em cada ponto

$$\frac{dM}{dx} = V$$

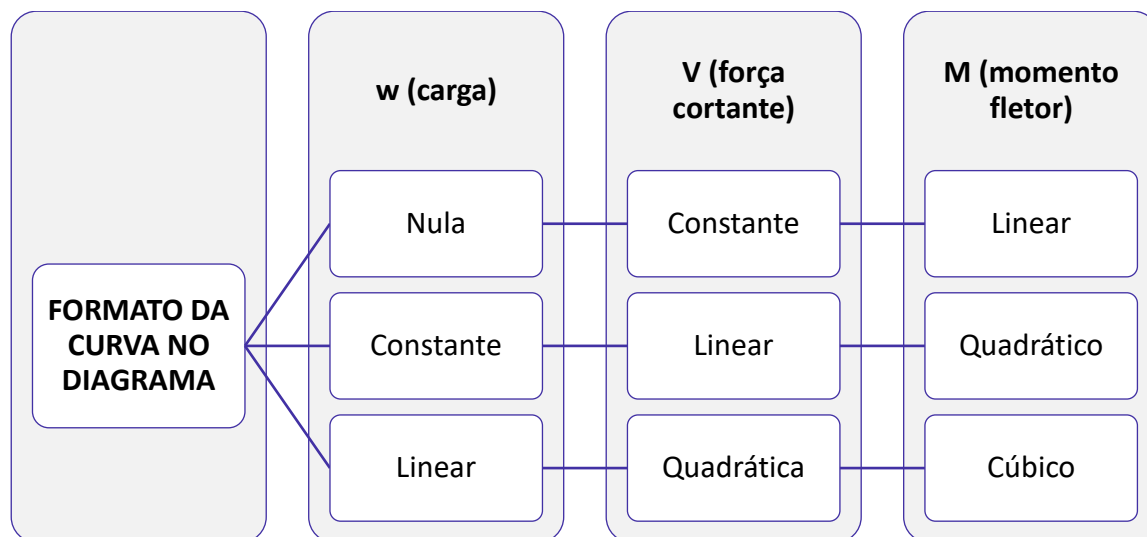
inclinação do diag. de momento em cada ponto = cisalhamento (força cortante em cada ponto)

Através destas equações é possível obter convenientemente os diagramas de força cortante e momento fletor, pois através das regras de derivadas e integrais sabemos que integrando w obtemos V e integrando V encontramos M . Quando temos um **carregamento em uma viga**, sabemos que este pode ser **nulo, constante ou linear** isso resultará em uma força de cisalhamento constante, linear ou quadrática e em um momento fletor linear, quadrático ou cúbico respectivamente.

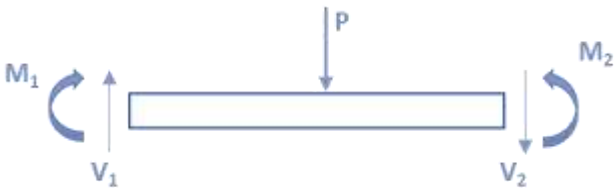
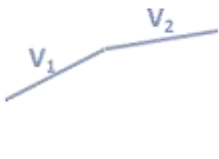


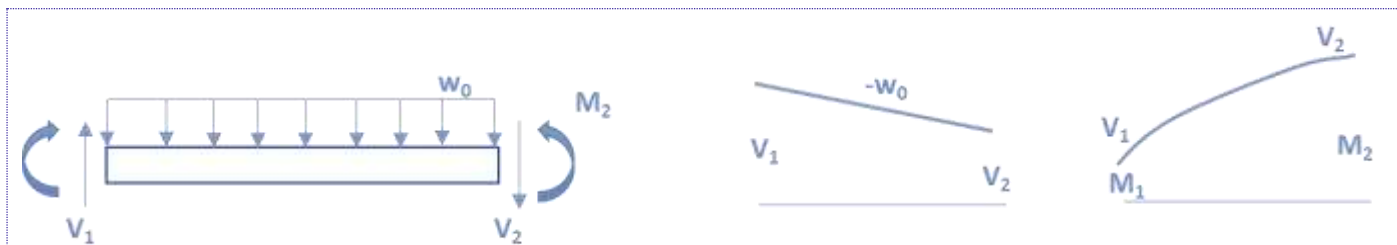
Quando tivermos uma **carga igual a zero** o diagrama de **força cortante** terá um comportamento **constante** e o diagrama de **momento fletor** terá um comportamento **linear**. Para um **carregamento constante** o comportamento da curva da **força cortante será linear e do momento fletor será quadrático**. Por fim, para um **carregamento linear** o diagrama de **força cortante será quadrático e o de momento fletor será cúbico**.

Vejamos como ficaria o comportamento do diagrama de força cortante e momento fletor de acordo com o tipo de carregamento.



A tabela abaixo apresenta os principais formatos de diagramas de força cortante e momento fletor de acordo com os tipos de carregamento.

CARREGAMENTO	DIAGRAMA DE FORÇA CORTANTE	DIAGRAMA DE MOMENTO
		
A força P para baixo faz a força cortante V saltar de V_1 para V_2 . No diagrama de momento a inclinação constante muda de V_1 para V_2		
		
Não há variação na força cortante. Inclinação positiva constante e como o momento aplicado é anti-horário o momento fletor salta para baixo.		



Inclinação negativa constante no diagrama de V e inclinação positiva para o momento fletor.



Inclinação negativa para a força cortante e inclinação positiva para o momento fletor.



Difícilmente em provas objetivas será necessário a construção de diagramas de força cortante e momento fletor, contudo a banca pode elaborar **questões** onde é dado um **tipo de carregamento** e pede para assinalar o correto **diagrama de momento fletor e força cortante**.

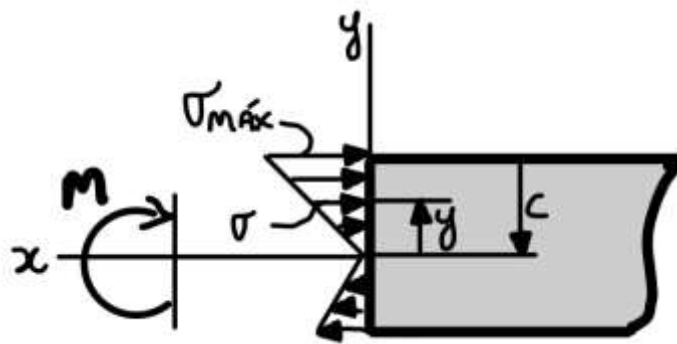
Conhecidos os principais diagramas de força cortante e momento fletor e como se dá o comportamento da curva em relação ao tipo de carregamento, vamos ao estudo da **fórmula de flexão**. Esta equação é uma **relação entre a distribuição de tensão longitudinal em uma viga e o momento fletor interno resultante que está agindo na seção transversal da viga**.

Partindo do pressuposto que o material de determinado material se comporta de maneira elástica podemos encontrar a **tensão normal máxima no elemento**. Esta ocorre no ponto na área da seção transversal mais afastado da linha neutra da viga. Matematicamente esta tensão é dada por:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M \cdot c}{I}$$

Em que M = o momento interno resultante, calculado pela análise dos efeitos internos; I = o momento de inércia da área da seção transversal em torno da linha neutra; e c = a distância perpendicular do eixo neutro a um ponto mais afastado deste onde agirá a tensão máxima $\sigma_{m\acute{a}x}$. Vejamos a figura abaixo.





Analogamente para se determinar a tensão normal a uma distância intermediária (y), podemos calcular esta a partir da seguinte equação:

$$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I}$$

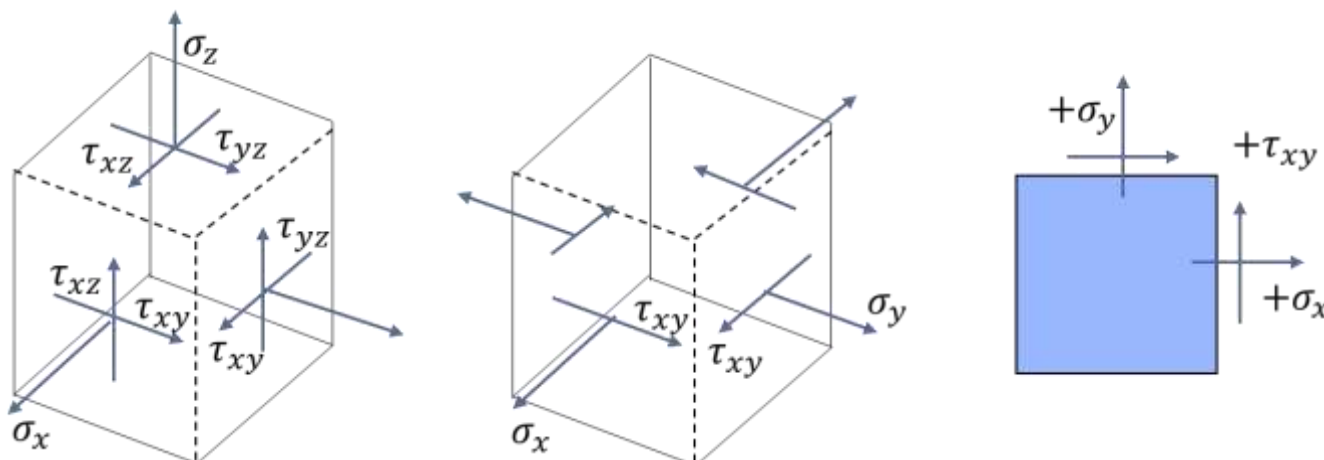
Cabe destacar que neste caso, y é a **distância medida perpendicularmente entre o eixo neutro até o ponto onde a tensão normal deve ser determinada** e o sinal é negativo devido a convenção de sinais e esta ser uma tensão de compressão.

Com isso, encerramos o estudo da flexão.

2.6 – Transformações de tensões e deformações

Ao se analisar as tensões em um elemento cúbico de um corpo, existem seis componentes independentes de tensão normal e de cisalhamento atuando nas faces deste corpo. Devido à complexidade para análise neste elemento tridimensional, comumente realizamos simplificações das cargas envolvidas e adotamos uma **análise em um único plano**. Assim o material estará sujeito a **tensões no plano**.

Representamos o estado geral de tensão no plano em um ponto com duas componentes de tensão normal com orientação x e y e um tensão de cisalhamento. Vejamos a figura abaixo exemplificando o estado geral de tensão, o estado plano de tensão em 3D e em 2D.



Visto isso, podemos afirmar que **se um estado de tensão em um ponto for conhecido**, de acordo com uma orientação determinada de um elemento do material, **podemos então determinar o estado de tensão para uma orientação diferente** através das seguintes equações:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

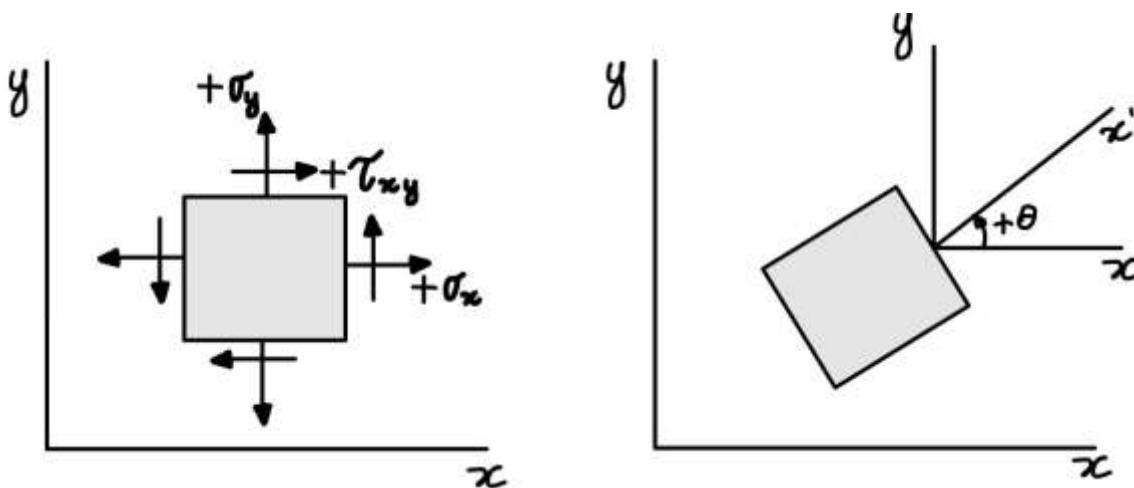
Para $\sigma_{y'}$ adotamos $\theta = \theta + 90$ e assim a expressão para $\sigma_{y'}$ será:

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

Note que a diferença entre as equações de $\sigma_{x'}$ e $\sigma_{y'}$ está na diferença do sinal em relação a $\sigma_{x'}$. Se ao calcular $\sigma_{y'}$ obtivermos um sinal negativo este indicará que a tensão age no sentido de y' positivo. Vejamos agora a equação para a **tensão de cisalhamento**.

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta$$

Para utilizarmos as equações acima, adota-se como **convenção de sinal** positivo o demonstrado na figura abaixo.



Caro aluno(a), em algumas questões de concursos você pode ser instado a calcular as **tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no plano**. Como podemos notar anteriormente os valores destas tensões dependem do ângulo θ . Logo, devemos determinar o **ângulo da orientação** para qual as tensões principais e de cisalhamento, no plano, sejam máximas e mínimas. Para isso podemos utilizar a seguinte expressão matemática:

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

Com a determinação do ângulo a manipulação algébrica das equações chega-se à equação para se encontrar a **tensão normal máxima (σ_1) ou tensão normal mínima σ_2** no plano que age sobre um ponto, onde $\sigma_1 > \sigma_2$. Vejamos a expressão para o cálculo dessas tensões.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

De acordo com o **sinal escolhido para na resolução da raiz** quadrada se obtém a **tensão principal normal máxima ou mínima** que agem nos chamados planos principais onde **nenhuma tensão de cisalhamento age**, ou seja, nesses planos $\tau_{xy} = 0$.

Para a determinação da tensão de cisalhamento máxima no plano a seguinte expressão para a determinação do ângulo de orientação do plano a qual isso ocorre é utilizada:

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}}$$

A **tensão de cisalhamento** máxima em um elemento é localizada no plano **orientado a 45°** em relação a posição ao plano do elemento que define a tensão principal.

Assim a tensão de cisalhamento máxima no plano é determinada por:

$$\tau_{\text{máx no plano}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Por fim, a tensão normal média é dada por:

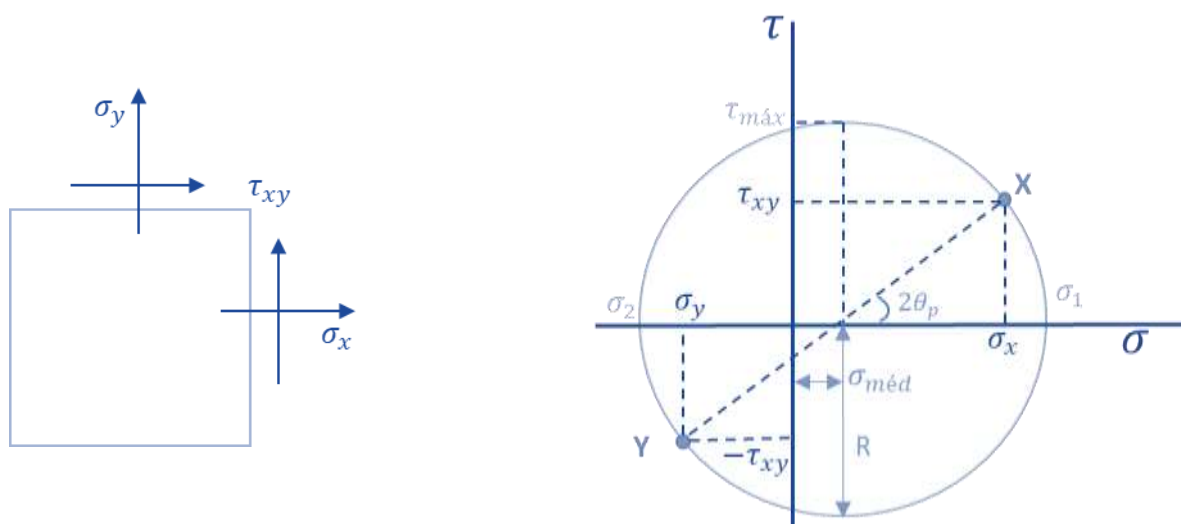
$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Conhecidas as equações para transformação de tensão no plano vamos ao estudo de uma **solução gráfica**, denominada **círculo de Mohr**, muito exigida em provas de concursos que possui relativamente simplicidade para sua memorização.

Para utilizarmos o círculo de Mohr, precisamos que cada plano seja representado, em um sistema de coordenadas com **σ no eixo das abscissas e τ no eixo das ordenadas**. Como dito anteriormente, nos planos das tensões principais a tensão de cisalhamento é zero, logo esses planos são representados por pontos no eixo σ .

Vejamos a representação do círculo de Mohr, considerando um elemento no plano XY com tensões normais σ_x e σ_y e tensão de cisalhamento τ_{xy} .





Note que:

O **centro do círculo** está situado **no eixo σ** e que a tanto a tensão principal (normal) máxima quanto a tensão principal mínima, estão localizadas nos pontos direito e esquerdo de intersecção do círculo e do eixo σ , respectivamente.

As **tensões de cisalhamento máxima e mínima** se localizam nas tangentes superior e inferior do círculo.

O **centro do círculo** de Mohr está localizado na **média entre as tensões normais** que atuam neste plano.

O **raio do círculo** de Mohr, que pode ser obtido por relações trigonométricas, é **igual a tensão de cisalhamento máxima e mínima**.

A **tensão principal máxima** σ_1 pode ser determinada pela **soma entre o raio e a tensão normal média** dos planos enquanto a tensão principal mínima é determinada pela diferença entre o raio e a tensão normal média dos planos perpendiculares entre si.

Para finalizarmos o estudo das transformações de tensões no plano, vimos como podemos determinar as tensões principais e de cisalhamento no plano e todas as demais grandezas envolvidas através do círculo de Mohr. É de suma importância que **você**, caro estrategista, **saiba analisar todas as grandezas envolvidas no círculo de Mohr**, pois este é um tema recorrente nos concursos de engenharia.

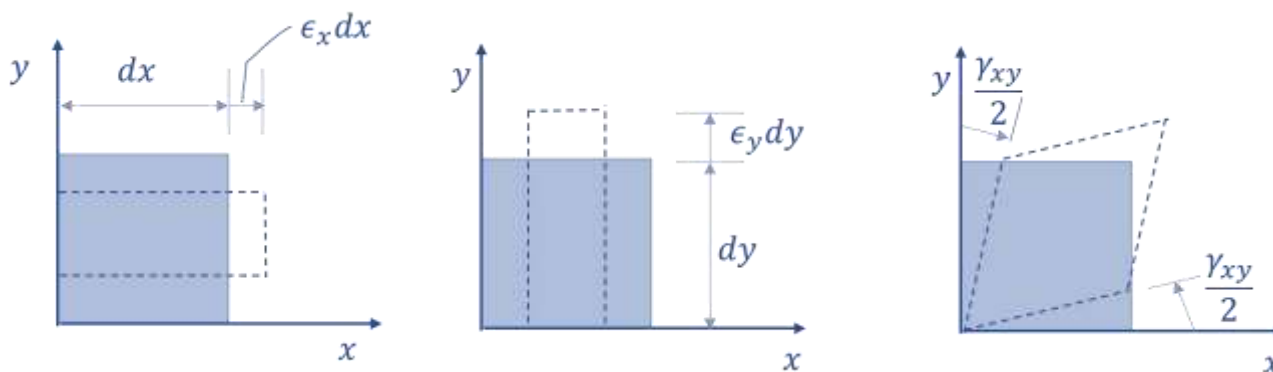
Analogamente a transformação de tensão no plano existe também a **transformação de deformação**, em que também podemos aplicar a representação gráfica através do círculo de Mohr. Vamos ao estudo deste assunto.

A deformação em um ponto é representada por três componentes de deformação normal ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$) e três componentes de deformação de cisalhamento ($\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$). Da mesma forma que a tensão no plano, as **componentes de deformação variam de acordo com a orientação do elemento**. A caráter de prova, de

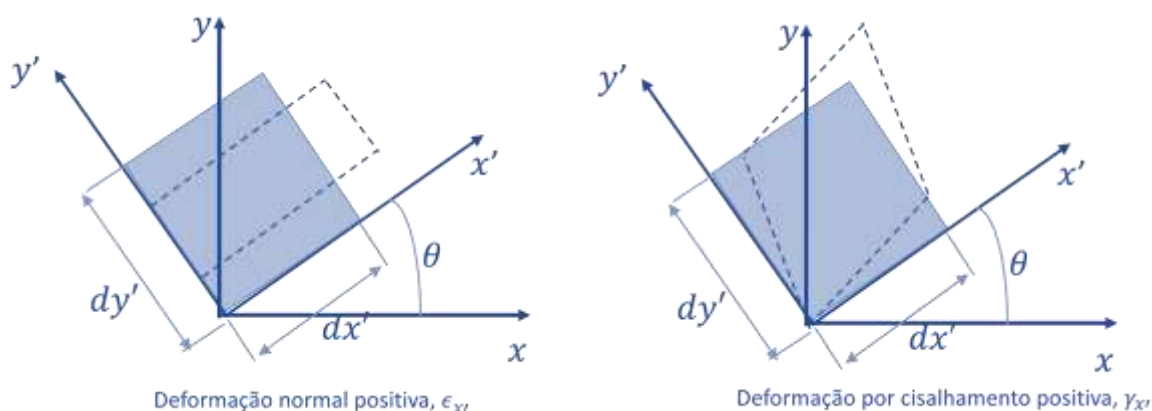


acordo com as exigências em concurso, iremos abordar a deformação plana considerando as componentes (ϵ_x, ϵ_y) e uma componente de deformação de cisalhamento (γ_{xy}).

Deformações normais são oriundas de **variações do comprimento** do elemento nas direções x e y. **Deformações de cisalhamento** são resultantes da **rotação relativa** de dois lados adjacentes do elemento. Vejamos a figura abaixo.



Como **convenção de sinal** adota-se a seguinte:



Visto isso, analogamente a tensão no plano, podemos afirmar que se um **estado de deformação em um ponto for conhecido**, de acordo com uma orientação determinada de um elemento do material, **podemos determinar** o estado de deformação **para uma orientação diferente** através das seguintes equações:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \text{sen } 2\theta$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \text{sen } 2\theta$$

Para se determinar a **deformação de cisalhamento** de um elemento orientado a um ângulo θ a seguinte equação é utilizada



$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right) \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \cos 2\theta$$

Para facilitar a memorização note a **similaridade** entre as equações de transformação de tensão e deformação no plano.

Devido à similaridade entre as tensões e deformações no plano podemos determinar a **direção do eixo e as deformações principais** (ϵ_1 e ϵ_2) pelas seguintes expressões:

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{(\epsilon_x - \epsilon_y)}$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Da mesma forma que para as tensões no plano, a **deformação por cisalhamento máxima** no plano e a **deformação média** é dada por:

$$\operatorname{tg} 2\theta_s = -\left(\frac{(\epsilon_x - \epsilon_y)}{\gamma_{xy}}\right)$$

$$\frac{\gamma_{\text{máx no plano}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

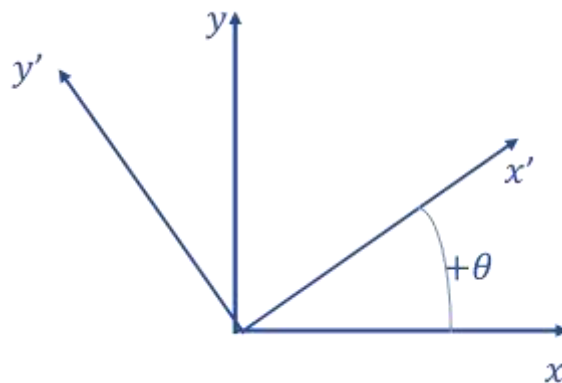
$$\epsilon_{\text{méd}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$

Devemos saber que devido ao **efeito de Poisson**, o **estado plano de deformação não se caracteriza como um estado plano de tensão e vice-versa**. Outro detalhe importante a se ressaltar é que quando se representa um estado de deformação por suas componentes principais, não haverá nenhuma deformação por cisalhamento agindo sobre este elemento.

Para finalizarmos o aprendizado sobre a deformação no plano, podemos também representar esquematicamente a **deformação plana no círculo de Mohr**. Assim o procedimento para se desenhar o círculo de Mohr para a deformação é o mesmo do utilizado para tensão. Sendo o passo a passo o seguinte:

- 1- Definir o eixo das coordenadas em que o eixo das abscissas seja a deformação normal ϵ , para direita positiva, e a ordenada represente metade da deformação por cisalhamento $\frac{\gamma}{2}$.
- 2- Adotar a convenção de sinal positivo conforme figura abaixo.

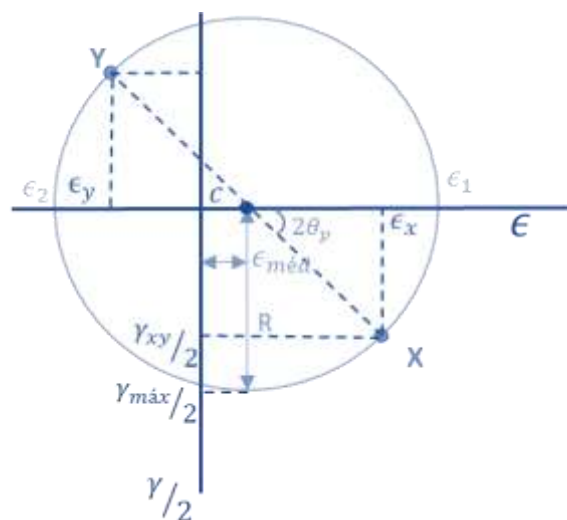




3- Marcar o ponto de referência com as coordenadas $(\epsilon_x \text{ e } \gamma_{xy}/2)$.

4- Ligar o ponto A ao ponto central do círculo, podendo assim determinar o raio deste através de relações trigonométricas.

5- Trace o Círculo com o raio encontrado.



Conhecidos os princípios de tensões e deformações multiaxiais e o círculo de Mohr, vamos abordar, diretamente, algumas **teorias de falhas**. Geralmente quando um **material for dúctil** sua falha será na **tensão de escoamento** e quando este for **frágil** está ocorrerá em seu **limite de ruptura**. Assim as quatro teorias de falhas são utilizadas para prever a falha de um material submetido a um estado de tensão multiaxial.



Algumas destas teorias podem ser exigidas em provas em questões teóricas. Vamos as suas definições.

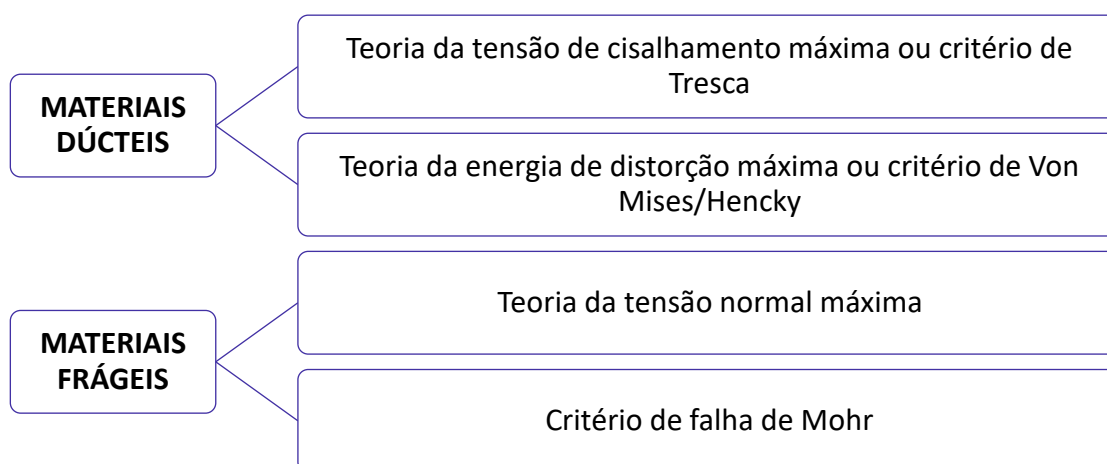
Teoria da tensão de cisalhamento máxima ou critério de Tresca: utilizada para prever qual será a tensão de falha quando um **material dúctil** é sujeito a qualquer tipo de falha. Esta teoria afirma que o escoamento do material inicia quando a tensão de cisalhamento máxima absoluta no material alcança a tensão de cisalhamento que irá provocar o escoamento deste material sujeito a apenas tensão axial.

Teoria da energia de distorção máxima ou critério de Von Mises/Hencky: esta teoria afirma que o escoamento em **material dúctil** acontece quando a energia de distorção por unidade de volume do material for igual ou ultrapassar a energia de distorção por unidade de volume deste mesmo material quando sujeito a escoamento em um ensaio de tração.

Teoria da tensão normal máxima: esta teoria propõe que um **material frágil** irá falhar quando a sua tensão principal σ_1 alcançar um valor limite igual ao limite de resistência à tensão normal que este material consegue suportar em um ensaio de tração simples.

Critério de falha de Mohr: em alguns materiais frágeis há diferenças entre as propriedades mecânicas sob tração ou compressão. Assim o critério de falha de Mohr propõe um procedimento baseado em três ensaios, sendo um ensaio de tração, um de compressão e um de torção. Através dos dados o critério prevê a construção de um círculo de Mohr para saber se ocorrerá ou não a falha do material.

Cabe destacar, que devido a existirem imperfeições em materiais frágeis é difícil de prever a ruptura sob tensão deste tipo de material, por isso **teorias de falhas para materiais frágeis** devem ser utilizadas com **cautela**.



Encerramos aqui os estudos das transformações de tensões e deformações.



3 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ufa! Encerramos aqui o conteúdo de nossa aula 00, do nosso curso. Sei que a carga de informação para uma aula inicial foi grande, mas fique tranquilo que a tendência é piorar! RsRsRs. Brincadeiras à parte, note que apenas em uma aula cobrimos um **vasto conteúdo**² que será **muito importante** durante o estudo de todo o nosso curso em outras aulas **mais adiante**.

Conte comigo nesta caminhada para juntos alcançarmos o objetivo maior que é a sua APROVAÇÃO. Caso tenha ficado alguma dúvida, não hesite em me procurar no fórum de dúvidas ou em minhas redes sociais. Também **não** deixe de resolver todas as questões da nossa aula.

É isso! Espero que tenha gostado de nossa aula inicial. Nos vemos novamente na aula 01 do nosso curso em que iremos abordar a dinâmica e vibrações.

Forte abraço,

Prof. Juliano de Pelegrin

4 – BATERIA DE QUESTÕES COMENTADAS

1. NUCEPE/PC-PI/2018 Um pedaço de alumínio é tracionado com uma tensão de 250 MPa e atinge alongamento resultante de 0,77 mm aproximadamente. O módulo de Elasticidade do alumínio – EAl = 69 GPa. Se a sua deformação é inteiramente elástica, seu comprimento inicial (L0) era aproximadamente de:

- a) 233 mm
- b) 212 mm
- c) 305 mm
- d) 276 mm
- e) 110 mm

Comentários

² Fontes bibliográficas utilizadas na aula:

J.L.Merian/L.G.Kraige – Estática, 6ed.; R.C. Hibbeler – Estática: Mecânica para engenharia 10ª ed;
R.C.Hibbeler – Resistência dos Materiais, 7ª ed.; F.P. Beer – Resistência dos Materiais, 3ª ed.



Essa questão cobra o conhecimento da **Lei de Hooke**, que determina a região linear elástica do material, a partir de duas equações:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \qquad \epsilon = \frac{\Delta L}{L_o}$$

Onde: “ σ ” é a tensão normal; “ E ” é o módulo de elasticidade; “ ϵ ” é a deformação; “ ΔL ” é o alongamento; e “ L_o ” é o comprimento inicial da peça.

Visto isso, para solucionarmos a questão devemos basicamente realizar a aplicação das fórmulas acima. Passemos ao cálculo da deformação total:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \rightarrow 250 \cdot 10^6 = 69 \cdot 10^9 \cdot \epsilon \rightarrow \epsilon = 0,00362m$$

Agora, vamos calcular o comprimento inicial:

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_o} \rightarrow 0,00362 = \frac{0,00077}{L_o} \rightarrow L_o = 0,212m = 212mm$$

Desse modo, a **alternativa B** é a CORRETA e gabarito da questão.

2. (IBFC/PC RJ-2013) Pense numa viga bi-apoiada com vão de 6m submetida a uma carga uniformemente distribuída de 80kgf/m em toda a sua extensão longitudinal. Supondo que a estrutura seja isostática, os valores do momento fletor (em kgf.m) na seção média e na seção que dista 1m do apoio da direita, valem, respectivamente:

- a) 200 e 260.
- b) 240 e 360.
- c) 360 e 200.
- d) 400 e 240.
- e) 360 e 260.

Comentário:

Prezados(as), nesta questão a solução se dá a partir das equações fundamentais da estática em que:

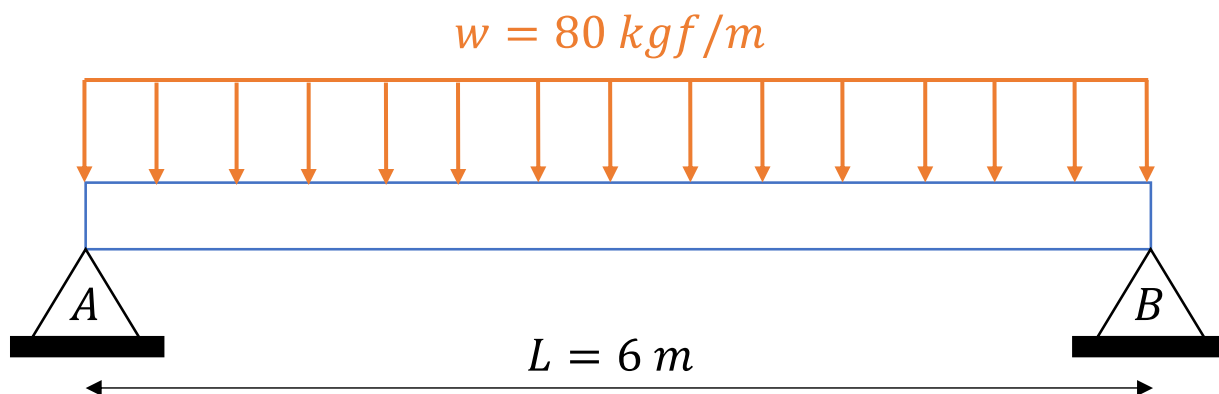
$$\frac{dV}{dx} = q(x) \quad e \quad \frac{dM}{dx} = V(x)$$

$$V(x) = \int q(x)dx \quad e \quad M(x) = \int V(x).dx$$



Essas equações diferenciais não podem ser utilizadas entre pontos onde não são aplicadas forças ou momentos concentrados (pontos de descontinuidades). A partir destas relações podemos determinar os esforços cortantes e os momentos fletores máximos e mínimos e construir os seus diagramas.

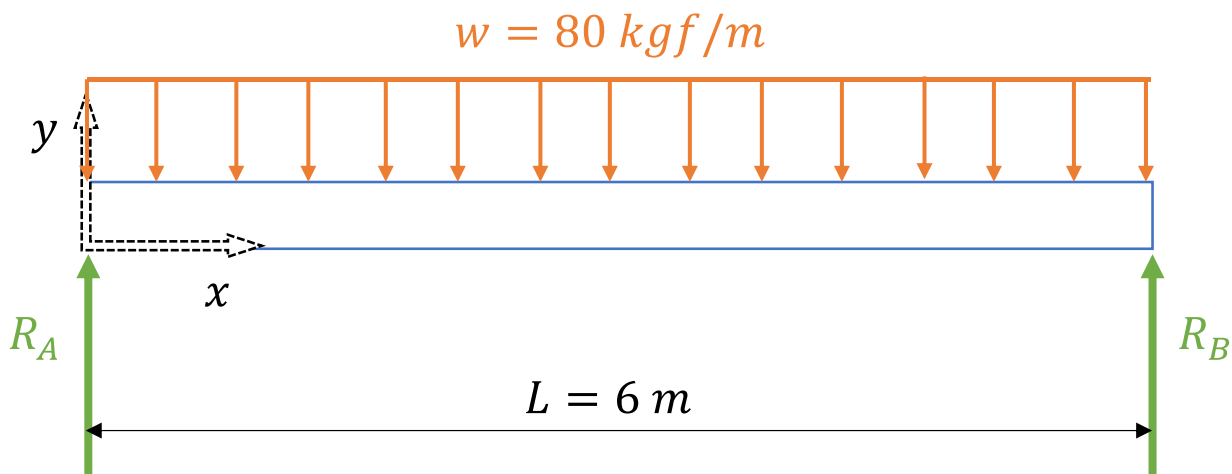
Note que a viga do enunciado compõe um sistema em que não há descontinuidades ao longo desta (carregamento uniforme). Vejamos a imagem abaixo com o sistema descrito pelo enunciado.



As reações nos apoios correspondem a metade do carregamento aplicado devido a simetria na viga, assim...

$$R_A = R_B = \frac{w \cdot L}{2} = 240\text{ kgf}$$

Como a viga é biapoiada e esse tipo de apoio permite a rotação da viga nos pontos A e B (extremidades), respeitando as leis da estática, o momento fletor será igual a zero.



Adotando nosso sistema de referência com origem conforme a imagem de nosso DCL acima temos para nosso esforço cortante...

$$V(x) = \int q(x)dx = \int -w dx = -wx + A$$



Onde A é a constante de integração. Pelas condições de contorno, sabemos que em $x=0$ o esforço cortante será igual a reação no apoio A, logo:

$$V(0) = R_A = \frac{wL}{2} = 240 = -w \cdot 0 + A \Rightarrow A = 240 \therefore V(x) = -80x + 240$$

Com a equação do esforço cortante podemos aplicar a equação fundamental para encontrarmos o momento fletor.

$$M(x) = \int V(x) \cdot dx \Rightarrow M(x) = \int (-80x + 240) dx = \frac{-80x^2}{2} + 240x + B$$

Em que B é a constante de integração que podemos defini-la pela condição de contorno em que para $x=0$, $M=0$. Devido ao tipo do sistema. Vejamos:

$$M(0) = 0 = -40 \cdot (0) + 240 \cdot (0) + B \therefore B = 0$$

$$M(x) = -40x^2 + 240x$$

Encontrada a equação para o momento fletor basta substituímos nos pontos pedidos no enunciado para encontrarmos a grandeza do momento em $x=3$ e $x=5$.

$$M(3) = -40 \cdot 3^2 + 240 \cdot 3 = 360 \text{ kgf.m}$$

$$M(5) = -40 \cdot 5^2 + 240 \cdot 5 = 200 \text{ kgf.m}$$

Portanto, a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.

3. (FUNDATEC/IGP RS-2017) Um eixo cilíndrico maciço está sujeito a um torque de 40 N.m. Sendo o limite de resistência 135 Mpa, qual é o menor raio para que não ocorra falha, de acordo com a teoria da tensão normal máxima?

- a) 0,21 mm.
- b) 2,86 mm.
- c) 5,73 mm.
- d) 8,60 mm.
- e) 11,46 mm.

Comentário:

Prezado(a) estrategista, a torção gera apenas tensões de cisalhamento nas seções transversais dos eixos. A **tensão de cisalhamento** será maior quanto mais distante for do ponto analisado do centro da seção transversal e será menor quanto maior for o momento polar de inércia dessa seção. Matematicamente podemos expressar a tensão de cisalhamento máxima, $\tau_{m\acute{a}x}$, no eixo em sua superfície externa como:



$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T \cdot c}{J}$$

A equação para se encontrar a **tensão normal máxima (σ_1)** ou **tensão normal mínima σ_2** no plano que age sobre um ponto, onde $\sigma_1 > \sigma_2$, é dada pela seguinte expressão:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Por meio da equação acima podemos determinar a tensão normal máxima e mínima, pois as tensões normais serão nulas para os planos de tensões orientados pelo sentido longitudinal do eixo, ou seja, $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$ e $\tau_{xy} = \tau_{m\acute{a}x}$. Desta forma:

$$\sigma_{1,2} = \frac{0 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 0}{2}\right)^2 + \tau_{m\acute{a}x}^2} \therefore \sigma_1 = \tau_{m\acute{a}x} \text{ e } \sigma_2 = -\tau_{m\acute{a}x}$$

Conforme a teoria da tensão normal máxima, citada no enunciado temos que a falha irá ocorrer quando a tensão principal maior (σ_1) for igual ao limite de resistência a tração do material σ_u . Assim...

$$\sigma_1 = \sigma_u = \tau_{m\acute{a}x}$$

Visto isto, temos a tensão máxima de cisalhamento, a distância entre o ponto analisado (extremidade) até o centro da seção transversal que será igual ao raio do eixo, o torque e o momento polar de inércia da seção transversal é dado pela seguinte expressão:

$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

Em que c é o raio externo do eixo analisado. Aplicando os valores do enunciado e combinando as equações da tensão de cisalhamento e do momento polar de inércia obtemos:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T \cdot c}{\frac{\pi}{2} c^4} \Rightarrow \frac{\tau_{m\acute{a}x} \cdot \pi}{2 \cdot T} = c^3 \Rightarrow c = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot T}{\pi \cdot \tau_{m\acute{a}x}}}$$

$$c = \sqrt[3]{\frac{2.40}{\pi \cdot 135 \cdot 10^6}} \cong 5,73 \text{ mm}$$

Logo, a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.

4. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) Uma viga biapoiada de comprimento L está sujeita a uma força concentrada F atuante a uma distância L/4 de uma de suas extremidades.

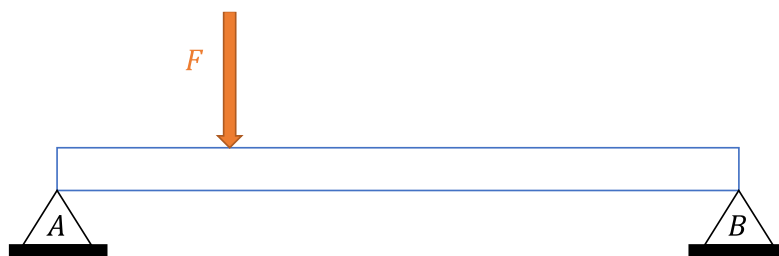


O momento fletor máximo e a força cisalhante máxima atuantes na viga são expressos, respectivamente, por

- a) $FL/4$ e $F/4$
- b) $FL/4$ e $3F/4$
- c) $3FL/4$ e $F/4$
- d) $3FL/16$ e $F/4$
- e) $3FL/16$ e $3F/4$

Comentário:

Prezado(a), para resolvermos essa questão primeiramente devemos conceber a sua disposição e o seu diagrama de corpo livre. Vejamos:



Viga biapoiada com carga concentrada

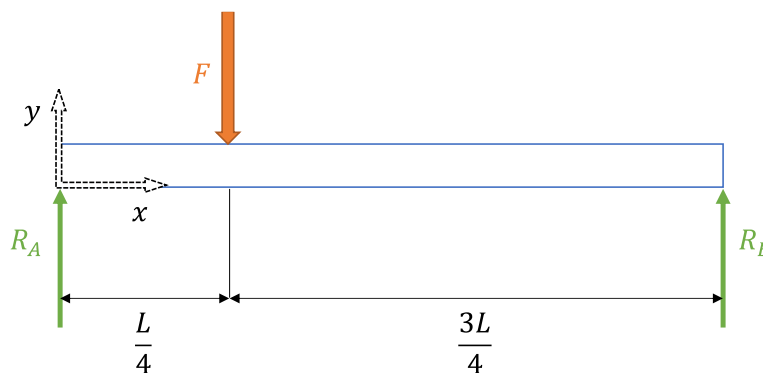


Diagrama de Corpo Livre

Vamos agora estabelecer as equações dos esforços internos (momento fletor e esforço cortante) em função da coordenada x .

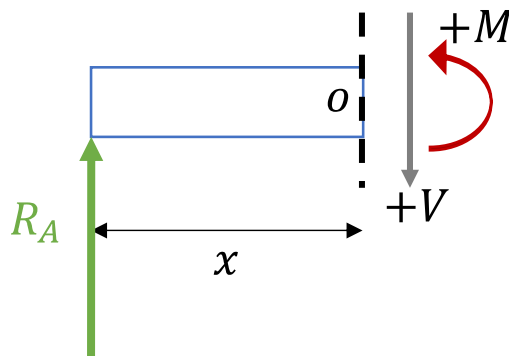
Primeiramente vamos encontrar as resultantes nos pontos A e B através das equações do equilíbrio. Vejamos:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F + R_A + R_B = 0 \Rightarrow F = R_A + R_B$$



$$+\sum \curvearrowright M_A = 0 \Rightarrow -F \cdot \frac{L}{4} + R_B \cdot L = 0 \Rightarrow R_B = \frac{F}{4} \therefore R_A = \frac{3F}{4}$$

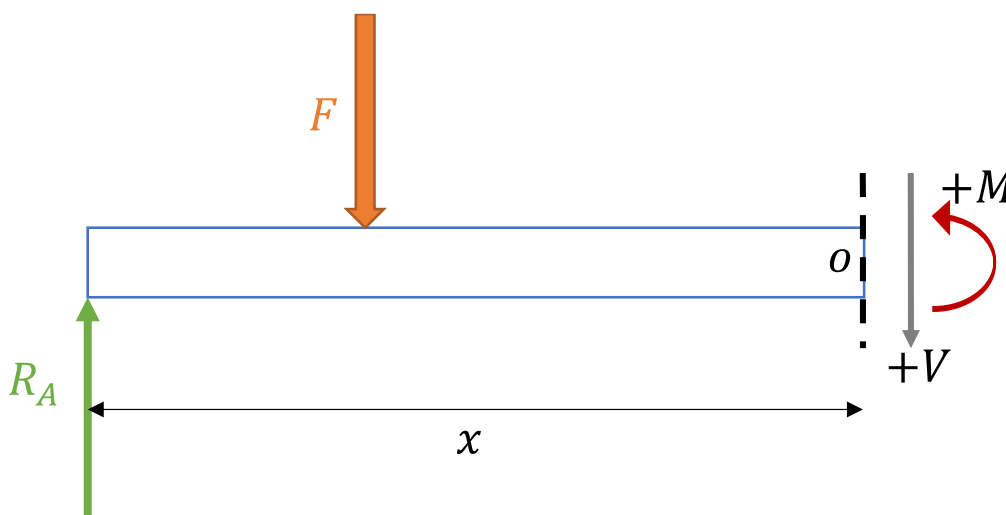
Feito isso, vamos determinar as equações para os esforços internos no trecho do apoio da esquerda até a carga ($0 < x < L/4$).



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = R_A = \frac{3 \cdot F}{4}$$

$$+\sum \curvearrowright M_o = 0 \Rightarrow M = R_A \cdot x = \frac{3 \cdot F \cdot x}{4}$$

Agora, vamos determinar as equações para os efeitos internos no trecho entre a carga e o apoio da direita ($L/4 < x < L$)



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -V + R_A - F = 0 \Rightarrow V = -\frac{F}{4}$$

$$+\sum \curvearrowright M_o = 0 \Rightarrow M - R_A \cdot x + F \left(x - \frac{L}{4} \right) = 0 \Rightarrow M = \frac{FL}{4} - \frac{Fx}{4}$$

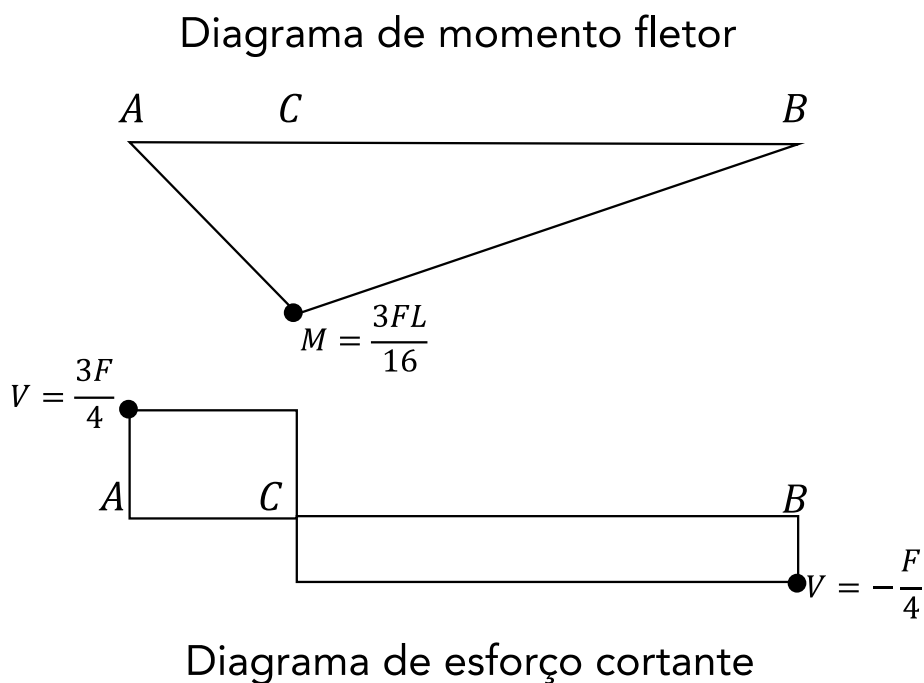
Note que os esforços cortantes são constantes em cada trecho e o momento fletor varia de acordo com x. Realizando a análise das equações encontradas temos que:



$p/x = 0$	$p/x = \frac{L}{4}$	$p/x = L$
$V = \frac{3.F}{4}$	Descontinuidade	$V = -\frac{F}{4}$
$M = 0$	$M = \frac{3FL}{16}$	$M = 0$

Portanto, o momento fletor máximo encontra-se em $x=L/4$ e o esforço cortante máximo encontra-se na seção entre o apoio da esquerda e a carga. Logo, a **alternativa E** está CORRETA e é o gabarito da questão.

A figura abaixo representa os diagramas de momento fletor e esforço cortante para toda a viga, em que o ponto C é o local onde a carga é aplicada.



5. (CESGRANRIO/UNIRIO-2016) Uma das importantes etapas do projeto estático de um componente estrutural é a construção do diagrama de corpo livre do componente.

No diagrama de corpo livre de uma viga engastada, sujeita a um carregamento distribuído ao longo de seu comprimento, são representados(as)

- a) o carregamento externo e as reações de apoio
- b) o carregamento externo e a distribuição de momentos fletores
- c) o carregamento externo e a distribuição dos esforços cisalhantes

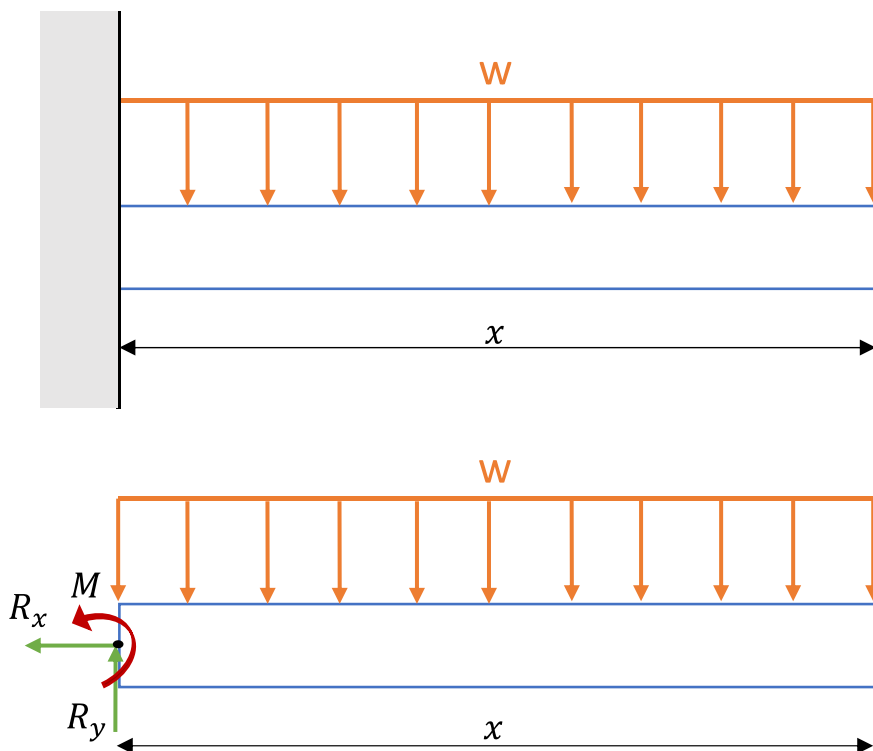


d) os carregamentos externos, apenas

e) as distribuições de esforços cisalhantes e de momentos fletores

Comentário:

“Questãozinha mamão com açúcar”. O diagrama de corpo livre ou DCL consiste em um esquemático de todas as forças que atuam em um corpo quando isolamos este do sistema ao qual pertence. Neste caso nosso corpo em análise é a viga e as forças serão o carregamento distribuído externo e as reações de apoio. Vejamos:



Portanto, a **alternativa A** está CORRETA é o gabarito da questão.

6. (IBFC/EBSERH-2020) Durante a etapa de seleção dos materiais em um projeto, o engenheiro deve conhecer suas características de deformação a fim de garantir o melhor desempenho possível do componente. Neste tema, analise os gráficos a seguir e assinale a alternativa correta.

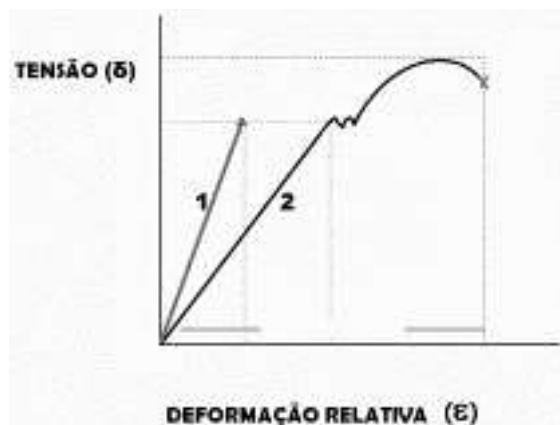


Figura 1. Curvas de tensão-deformação

- a) A curva 1 refere-se a um material de comportamento dúctil, pois o ensaio mostra uma reta no gráfico de tensão-deformação
- b) A curva 1 refere-se a um material de comportamento frágil
- c) Fica evidente que a curva 2 refere-se a um material de comportamento frágil, pois um mesmo valor de tensão aparece em mais de um ponto da curva
- d) Ambos os materiais apresentam comportamento frágil, pois o ensaio termina com a ruptura do corpo de prova
- e) Não é possível analisar o gráfico, uma vez que não há informações sobre o tamanho do corpo de prova

Comentário:

Vejamos a diferença entre os diagramas de tensão deformação de materiais dúcteis e frágeis.



Os **dúcteis** são aqueles que **podem sofrer grandes deformações** antes de se romperem. Podemos obter a ductilidade de um material através do percentual de alongamento deste. Os **materiais frágeis** são aqueles que **não apresentam escoamento ou deformação**, antes de se romperem. Nestes materiais a tensão de ruptura do material se torna de difícil obtenção, assim geralmente a partir do diagrama tensão-deformação deste material é obtida a tensão de ruptura média através da realização de mais de um ensaio de tração.

Note que os materiais frágeis são materiais que apresentam pequena ou quase nenhuma deformação antes de sua ruptura.



Vamos avaliar as alternativas.

A **alternativa A** está incorreta. A curva 1 refere-se a um **material frágil**, pois o ensaio mostra uma reta no gráfico de tensão-deformação.

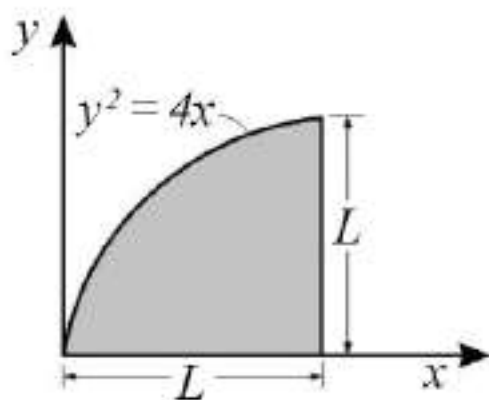
A **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão uma vez que a curva um é característica de um material frágil.

A **alternativa C** está incorreta. Fica evidente que a curva 2 refere-se a um material de comportamento **dúctil**, pois um mesmo valor de tensão aparece em mais de um ponto da curva.

A **alternativa D** está incorreta, pois temos representações dos diagramas de tensão deformação de materiais dúcteis e frágeis.

A **alternativa E** está incorreta. O tamanho do corpo de prova não é necessário para se realizar a análise de comportamento frágil ou dúctil via diagrama tensão deformação.

7. (CEBRASPE/IFF-2018)



Na área ilustrada na figura precedente, o momento de inércia em torno do eixo x pode ser calculado pela expressão

a) $I_x = \frac{2.L^{4,5}}{4,5}$

b) $I_x = \frac{L^{4,5}}{10}$

c) $I_x = \frac{L^5}{3} - \frac{L^4}{20}$

d) $I_x = \frac{L^3}{9} - \frac{L^4}{10}$

e) $I_x = \frac{L^4}{3} - \frac{L^5}{20}$

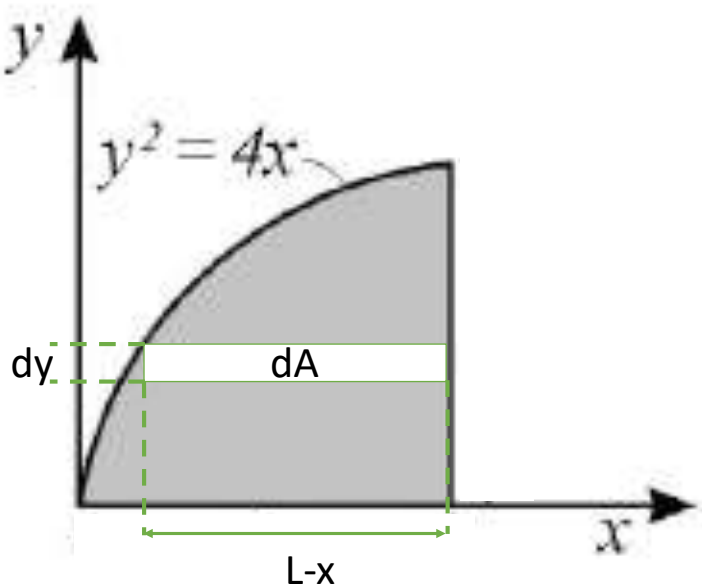
Comentário:



Caro(a) aluno(a), para resolvermos esta questão, em que a área possui um formato geométrico complexo, devemos utilizar a definição do momento de inércia em que:

$$I_x = \int y^2 dA \quad e \quad I_y = \int x^2 dA$$

Para resolvermos a integral do cálculo do momento de inércia em torno do eixo x devemos encontrar um elemento infinitesimal dA adequado. Em outras palavras, neste caso, precisamos converter esse elemento dA para dy. Vejamos a imagem:



$$dA = dy \cdot (L - x)$$

Feito isso e sabendo que $y^2 = 4x$, ou seja, $x = \frac{y^2}{4}$, com y variando de 0 a L obtemos:

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^L y^2 \cdot \left(L - \frac{y^2}{4}\right) dy$$

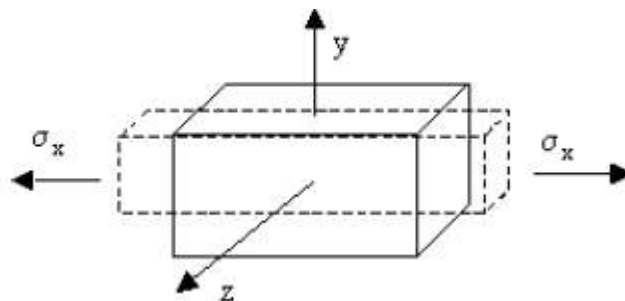
$$I_x = \int_0^L \left(y^2 \cdot L - \frac{y^4}{4}\right) dy = \left(\frac{y^3 \cdot L}{3} - \frac{y^5}{20}\right) \Big|_0^L$$

$$I_x = \frac{L^4}{3} - \frac{L^5}{20}$$

Portanto, a **alternativa E** está CORRETA e é o gabarito da questão.

8. (FEPESE/DEINFRA-SC-2019) A contração perpendicular à extensão, causada por uma tensão de tração demonstrada no corpo de prova a seguir, é conhecida como:





- a) Coeficiente de Haskin.
- b) Coeficiente de Red Hill.
- c) Coeficiente de Poisson.
- d) Coeficiente de Rosental.
- e) Coeficiente de Morangoni.

Comentário:

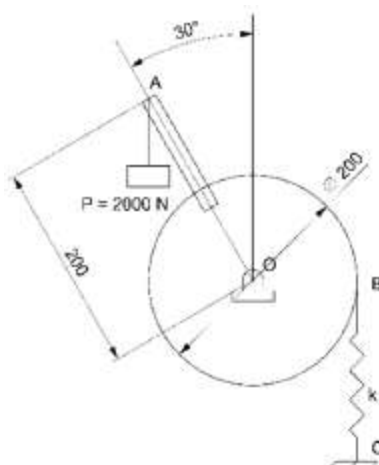
Quando aplicamos uma tensão trativa em uma barra ocorre um aumento de seu comprimento e uma redução da área da seção transversal, assim através da razão entre a **deformação axial ou longitudinal** e a **deformação lateral ou radial** pode ser obtido o **coeficiente de Poisson (ν)**.

$$\nu = - \frac{\epsilon_{lat}}{\epsilon_{long}}$$

Portanto, a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.

As demais alternativas não abordam coeficientes relacionados as propriedades mecânicas dos materiais.

9. (FGV/AL-RO-2018) A figura a seguir apresenta um peso de 2000 N ligado a uma alavanca AO que se encontra rigidamente conectada à polia cujo centro é O.



(Dimensões em mm)

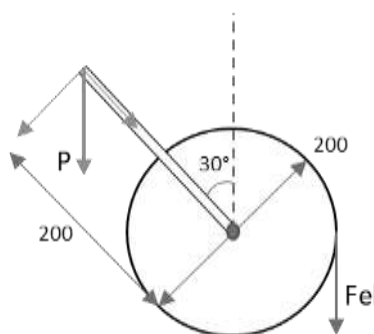


Assumindo $\pi = 3$, a constante k da mola BC, para que o sistema esteja em equilíbrio, vale

- a) 10 kN/m
- b) 20 kN/m
- c) 30 kN/m
- d) 40 kN/m
- e) 50 kN/m

Comentário:

Para solucionarmos esta questão, devemos perceber que, para o sistema satisfazer as equações de equilíbrio, a **força elástica da mola** deve **anular a componente de força perpendicular a polia**, da força peso. Vejamos o diagrama de corpo livre:



Neste caso o somatório dos momentos causados entre componente perpendicular a polia ($P \cdot \sin 30^\circ$) e a força elástica (Fel) da mola deve ser igual a zero. Assim obtemos:

$$\sum M = 0 \Rightarrow (P \cdot \sin 30^\circ) \cdot 0,2 - Fel \cdot 0,1 = 0 \Rightarrow Fel = 2000N.$$

Para finalizarmos, devemos encontrar a constante k da mola. Sabemos que a **força elástica da mola** é obtida através do produto entre a rigidez (k) e a distância, deslocamento (x) da mola. Nesta questão, o segredo é entender que o **deslocamento x da mola** é referente a **inclinação de 30°** ($\pi/6$ rad) da alavanca onde o peso atua na extremidade, portanto sabendo que o perímetro da circunferência é $2\pi R$ e, 2π corresponde a 360° , para 30° o deslocamento x será igual a:

$$x = \frac{\pi}{6} \cdot R = 0,05m$$

$$Fel = k \cdot x \Rightarrow k = \frac{Fel}{x} \Rightarrow k = 40kN/m$$

Logo, a **alternativa D** está CORRETA e é o gabarito da questão.

5 – GABARITO

1. B

2. C

3. C



4. E
5. A
6. B

7. E
8. C
9. D



7 – RESUMO

Para lhe ajudar, preparei um apanhado com as **principais fórmulas** abordadas nesta aula. É muito importante que você tenha conhecimento de **todas** elas!

TEMA	FÓRMULA
Momento	$M = F \cdot d$
Equações de equilíbrio	$\sum F = 0 \text{ e } \sum M = 0$
Centróide	$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dA}{A} \rightarrow \bar{X} = \frac{\sum \bar{x} \cdot A}{\sum A}$ $\bar{y} = \frac{\int y \cdot dA}{A} \rightarrow \bar{Y} = \frac{\sum \bar{y} \cdot A}{\sum A}$
Momento de Inércia de um retângulo	$I_x = \frac{1}{3}bh^3; \quad I_y = \frac{1}{3}b^3h$
Momento de inércia de um círculo	$I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$
Momento de inércia de um triângulo	$I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Teorema dos eixos paralelos	$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2; \quad I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2;$ $J_o = \bar{J}_c + Ad^2$
Tensão normal	$\sigma = \frac{P}{A}$
Tensão de cisalhamento média	$\tau_{méd} = \frac{V}{A}$
Deformação normal	$\epsilon_{méd} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$
Tensão de engenharia	$\sigma = \frac{P}{A_0}$



Deformação de engenharia	$\epsilon = \frac{\delta}{L_0}$
Lei de Hooke	$\sigma = E \cdot \epsilon$
Deformação axial e deformação lateral	$\epsilon_{long} = \frac{\delta}{L} \text{ e } \epsilon_{lat} = \frac{\delta'}{r}$
Coeficiente de Poisson	$\nu = -\frac{\epsilon_{lat}}{\epsilon_{long}}$
Deformação elástica	$\delta = \frac{P \cdot L}{A \cdot E} \quad \delta = \sum \frac{P \cdot L}{A \cdot E}$
Tensão de cisalhamento máxima (torção)	$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T \cdot c}{J}$
Momento polar de inércia eixo maciço e eixo tubular	$J = \frac{\pi}{4} c^4 ; \quad J = \frac{\pi}{4} (c_{ext}^4 - c_{int}^4)$
Ângulo de torção	$\phi = \frac{T \cdot L}{J \cdot G}$
Esforço cortante (diagrama)	$\frac{dV}{dx} = -w(x)$
Momento Fletor (diagrama)	$\frac{dM}{dx} = V$
Tensão de flexão	$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M \cdot c}{I}$



ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE: PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.



1 Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.



2 Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).



3 Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).



4 Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).



5 Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).



6 Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).



7 Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.



8 O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.



Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.