Aula 00 - Profº Alex Lira

Passo Estratégico de Matemática p/ TJ-SP (Oficial de Justiça) - 2020

Autor:

Alex Lira, Allan Maux Santana

27 de Janeiro de 2020

OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS, FRACIONÁRIOS E DECIMAIS

Sumário

APRESENTAÇÃO

Olá, você!

Sou o professor **Alex Lira**. É uma enorme satisfação poder estar aqui contigo no **Passo Estratégico**. Nosso compromisso com você é a preparação de alto nível com foco num único objetivo: SUA APROVAÇÃO!

Sabemos que conseguir sucesso em concursos públicos hoje em dia constitui um grande desafio! De fato, os certames apresentam um elevado grau de dificuldade em suas provas, além do alto nível dos candidatos. Por isso, torna-se necessária uma preparação com planejamento, muita disciplina e esforço genuíno!

Nesse sentido, a rotina de estudos do candidato não deve se limitar à simples leitura do material. O nível de preparação dos concorrentes não permite mais que você seja aprovado em algum certame apenas livrando a nota de corte. É necessário fazer a diferença naquelas matérias chave.

E nesse cenário as **disciplinas de exatas** são fundamentais, pois além de estarem presentes em boa parte dos concursos, representam um dos diferenciais da prova, já que a maioria dos candidatos não têm afinidade com a nossa matéria.

Nessa linha, buscaremos aqui detalhar todo o conteúdo programático, numa linguagem simples e bem objetiva, para lhe servir como uma **ferramenta eficiente de revisão**.

Antes de iniciar os comentários sobre o funcionamento do nosso curso, gostaria de fazer uma breve **apresentação** pessoal.

Ocupo desde 2014 o cargo de **Auditor-Fiscal da Receita Federal do Brasil**. Fui Servidor efetivo do Ministério Público Federal.

Sou **graduado em Matemática** pela Universidade Federal da Paraíba. Fui professor da rede estadual de ensino da Paraíba, a atualmente atuo em cursos online.

Além disso, sou **autor** dos livros *Matemática Básica Definitiva para Concursos* e *Raciocínio Lógico Definitivo para Concursos*, ambos publicados pela Editora Juspodivm em parceria com Alexandre Meirelles.

Fui aprovado em vários concursos, e logicamente também fui reprovado em outros. Porém, consegui desenvolver a motivação necessária diante de tais derrotas para permanecer no foco.

Através de pesquisa minuciosa em **mais de 50 manuais das nossas disciplinas**, procurei trazer tudo de mais relevante que há sobre cada tópico abordado. Assim, ao longo do curso você poderá perceber que busquei explorar de forma didática e objetiva os conteúdos necessários para a sua aprovação.

Todavia, como é de se esperar de um curso da área de exatas, e especialmente com o nosso material do Passo Estratégico, a teoria será mínima em relação à quantidade de questões comentadas. De fato, se você quiser "fechar" a sua prova não há outro caminho senão resolver MUITAS questões, melhor ainda se forem da banca do concurso que você prestará.

O curso que proponho é baseado especialmente nessa minha **experiência de concurseiro** que estudou para um cargo da elite do serviço público federal, bem como nos meus anos como professor, tendo percebido quais são as principais dificuldades enfrentadas por aqueles que precisam entender o conteúdo dessa matéria, a qual tem se tornado cada vez mais presente nos mais variados editais, especialmente de cargos públicos bem atraentes.

O QUE É O PASSO ESTRATÉGICO?

O Passo Estratégico é um material escrito e enxuto que possui dois objetivos principais:

a) orientar revisões eficientes;

b) destacar os pontos mais importantes e prováveis de serem cobrados em prova.

Assim, o Passo Estratégico pode ser utilizado tanto para **turbinar as revisões dos alunos mais adiantados nas matérias, quanto para maximizar o resultado na reta final de estudos por parte dos alunos que não conseguirão estudar todo o conteúdo do curso regular.**

Em ambas as formas de utilização, como regra, **o aluno precisa utilizar o Passo Estratégico em conjunto com um curso regular completo.** Isso porque nossa didática é direcionada ao aluno que já possui uma base do conteúdo.

Assim, se você vai utilizar o Passo Estratégico:

a) como **método de revisão**, você precisará de seu curso completo para realizar as leituras indicadas no próprio Passo Estratégico, em complemento ao conteúdo entregue diretamente em nossos relatórios;

b) como **material de reta final**, você precisará de seu curso completo para buscar maiores esclarecimentos sobre alguns pontos do conteúdo que, em nosso relatório, foram eventualmente expostos utilizando uma didática mais avançada que a sua capacidade de compreensão, em razão do seu nível de conhecimento do assunto.

ANÁLISE ESTATÍSTICA

Inicialmente, convém destacar os percentuais de incidência nos últimos anos de todos os assuntos previstos no nosso curso – quanto maior o percentual de cobrança de um dado assunto, maior sua importância:

Assunto	Grau de incidência em concursos similares VUNESP
Operações com números Inteiros e Fracionários	16,95%
Equação do primeiro e do segundo grau	16,95%
Geometria	16,53%
Porcentagem	13,56%
Medidas de Posição	10,17%
Regra de Três	7,20%
Conjuntos	7,20%
Razão e Proporção (Proporções. Grandezas proporcionais. Divisão em partes proporcionais)	3,81%
Juros Simples	2,97%
Unidades de Medida (Distância, massa, volume, tempo)	2,97%
Interpretação de gráficos e tabelas	1,69%

Veja que o tópico **Operações com números Inteiros e Fracionários** que revisaremos na aula de hoje possui um grau de incidência de **16,95%** nas questões colhidas da banca **Vunesp**, possuindo importância **muito alta**.

% de cobrança	Importância do assunto
Até 1,9%	Baixa
De 2% a 4,9%	Média
De 5% a 9,9%	Alta
Mais de 10%	Muito alta

O que é mais cobrado dentro do assunto?

Considerando os tópicos que compõem o nosso assunto, possuímos a seguinte distribuição percentual:

Assunto	% de Cobrança CESPE
Adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais	32,50%
Frações e dízimas periódicas	32,50%
Divisibilidade, números primos, fatores primos, divisor e múltiplo comum	27,50%
Operações com números decimais	5,00%
Números inteiros	2,50%
Números naturais: introdução, representação, propriedades	0,00%
Números racionais: introdução, representação, propriedades	0,00%
Radiciação e potenciação	0,00%

Números irracionais	0,00%
Números reais (propriedades e operações; intervalos)	0,00%
Expressões aritméticas	0,00%

ROTEIRO DE REVISÃO E PONTOS DO ASSUNTO QUE MERECEM DESTAQUE

A ideia desta seção é apresentar um roteiro para que você realize uma revisão completa do assunto e, ao mesmo tempo, destacar aspectos do conteúdo que merecem atenção.

1. Operações com Números Inteiros

O conjunto dos números inteiros é formado pelos algarismos **inteiros positivos e negativos e o zero**. Costumamos escrever:

Z = {... , - 3, - 2, - 1, 0, + 1, + 2, + 3, ...}

As operações fundamentais com os números inteiros são: Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão.

1.1. Adição

É a operação que une duas quantidades em um só número. Os termos da adição são chamados **parcelas** e o resultado da operação de adição é denominado **soma** ou total.

(1ª parcela) + (2ª parcela) = soma

1.2. Subtração

Efetuar a subtração de dois números significa diminuir, de um deles, o valor do outro. O primeiro termo de uma subtração é chamado **minuendo**, o segundo é o **subtraendo** e o resultado da operação de subtração é denominado **resto** ou diferença.

(Minuendo) - (Subtraendo) = Resto

1.3. Multiplicação

É a operação que adiciona um número em função da quantidade unitária de outro, em que seus termos são chamados **fatores** e o resultado da operação é denominado **produto**.

(1° fator) x (2° fator) = produto

O primeiro fator pode ser chamado **multiplicando** enquanto o segundo fator pode ser chamado **multiplicador**.

ESCLARECENDO!

Fica claro que a multiplicação nada mais é que uma **repetição de adições**.

1.4. Divisão

A divisão é a operação matemática que tem por objetivo repartir um valor em **partes iguais**, correspondendo ao inverso da multiplicação. Assim, na divisão de um número n por outro d (d ≠ 0), existirá um único par de números q e r, tais que:

I) $q \times d + r = n$

II) $0 \leq r < d$

Os quatro números envolvidos na divisão são:

n = dividendo; d = divisor; q = quociente; r = resto.

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{n} & \mathbf{d} \\ \cline{2-2} \mathbf{r} & \mathbf{q} \end{array}$$

Você não pode esquecer que:

Dividendo = Divisor x Quociente + Resto

TOME NOTA!

Note que quando dividimos A por B, queremos repartir a quantidade A em **partes de mesmo valor**, sendo um total de B partes. Veja um exemplo disso. Ao dividirmos 20 (dividendo) por 4 (divisor), queremos dividir 20 em 4 partes de mesmo valor, em que o resultado é $20 \div 4 = 5$ (quociente). Nesse caso, temos uma divisão exata, visto que o resto é igual a zero (r = 0).

1.5. Regras de sinais

Nas operações aritméticas, devemos **observar os sinais** (indicação de positivos e negativos) **antes de efetuar as operações** propostas. Nesse sentido, vejamos a seguir as duas regras de sinais fundamentais.

- **Adição e subtração**: temos dois casos a considerar:

1) **Sinais iguais**: somam-se os números e conserva-se o sinal do maior;
2) **Sinais diferentes**: subtraem-se os números e conserva-se o sinal do maior.

$$+5 + 3 = +8$$

$$+5 - 3 = +2$$

$$-5 - 3 = -8$$

$$-5 + 3 = -2$$

- **Multiplicação e divisão**: também temos dois casos a considerar:

3) **Sinais iguais**: o resultado da operação será positivo;
4) **Sinais diferentes**: o resultado da operação será negativo.

+	.	+	=	+
-	.	-	=	+
+	.	-	=	-
-	.	+	=	-

1.6. Regras para a retirada de parênteses

Até agora nos deparamos com a denominada **notação simplificada** ou **soma algébrica** dos números inteiros. Mas, e nos deparar com a seguinte operação:

$$(-5) + (-3)$$

Bem, nesse caso, estamos diante da **notação formal**. Como o nosso objetivo é facilitar os cálculos, precisamos aprender a **eliminar os parênteses** da operação proposta. E isso é muito simples! Vejamos.

- **Parênteses precedidos do sinal positivo (+)**: retiram-se tanto os parênteses como o sinal, conservando-se os sinais dos números do seu interior.

Exemplo:

$$(-5) + (-3) = -5 - 3 = \mathbf{-8}$$

$$4 + (-3 + 7 - 2) = 4 - 3 + 7 - 2 = 4 + 7 - 3 - 2 = \mathbf{6}$$

- **Parênteses precedidos do sinal negativo (-)**: retiram-se tanto os parênteses como o sinal, trocando-se os sinais dos números do seu interior.

$$(-5) - (-3) = -5 + 3 = -2$$

$$3 - (-1 + 3 - 7 - 10) = 3 + 1 - 3 + 7 + 10 = \mathbf{18}$$

2. Operações com Números Fracionários

Os números fracionários, ou simplesmente **fração**, representam uma ou mais partes de um inteiro que foi dividido em partes iguais.

$$\frac{\boldsymbol{Numerador}}{\boldsymbol{Denominador}}$$

CLASSIFICAÇÃO DAS FRAÇÕES

Próprias	Valor absoluto do numerador é *não nulo* e *menor que o denominador*.	Ex: $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$
Impróprias	Valor absoluto do numerador é *maior que o denominador*.	Ex: $\frac{4}{3}$ e $\frac{5}{2}$
Aparentes	O numerador é *igual* ou *múltiplo* do denominador.	Ex: $\frac{4}{4}$ e $\frac{10}{5}$
Equivalentes	Representam a *mesma parte* do inteiro.	Ex: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$
Irredutíveis	O numerador e o denominador são números primos entre si.	Ex: $\frac{11}{3}$ e $\frac{7}{5}$

2.1. Adição e Subtração

Para somar ou subtrair frações, precisamos levar em conta dois casos distintos:

➢ **1º caso: Os denominadores são iguais.**

Basta obedecer aos seguintes passos:

✓ **<u>1º passo</u>**: Conserva-se o denominador;
✓ **<u>2º passo</u>**: Adicionam-se ou subtraem-se os numeradores.

Isso fica mais claro no exemplo a seguir:

$$\frac{3}{20}+\frac{5}{20}-\frac{7}{20}=\frac{3+5-7}{20}=\frac{1}{20}$$

➢ **2º caso: Os denominadores são diferentes.**

Nessa situação, é preciso antes escrever as frações com o mesmo denominador, isto é, com um **denominador comum**. Este denominador é, simplesmente, um **múltiplo comum entre os denominadores das frações originais**.

Vamos entender isto com o exemplo a seguir:

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$$

Inicialmente, precisamos pensar em um número que seja múltiplo dos denominadores de cada fração ao mesmo tempo. Que número seria?

Com certeza é o **24**, visto que é um múltiplo de 6 (pois 6 x 4 = 24) e de 8 (pois 8 x 3 = 24). Pronto, já encontramos o denominador comum!

Em seguida, devemos construir o numerador da fração resultante da operação de soma ou subtração. Para isso, dividimos o denominador comum pelo denominador de cada fração, multiplicamos o resultado pelo respectivo numerador e efetuamos a soma ou subtração:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}=\frac{4+9}{24}=\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{24}}$$

Portanto, quando estivermos diante de uma soma ou subtração de frações com denominadores diferentes, basta obedecer os passos a seguir:

- ✓ **1º passo**: Encontrar o denominador comum;
- ✓ **2º passo**: Dividir o denominador comum pelo denominador de cada fração;
- ✓ **3º passo**: Multiplicar o resultado anterior pelo respectivo numerador;
- ✓ **4º passo**: Efetuar a soma ou subtração.

REGRA PRÁTICA

Existe um método ainda mais simplificado para a soma e subtração de frações **sem o uso do denominador comum**. Nesse caso, seguiremos os seguintes passos:

1º passo: multiplicar os denominadores, formando o novo denominador;

2º passo: multiplicar o numerador da primeira pelo denominador da segunda e multiplicar o numerador da segunda pelo denominador da primeira;

3º passo: efetuar a soma entre os dois produtos no numerador, obtidos no passo anterior;

4º passo: Realizar a simplificação da fração resultante, caso necessário.

Para exemplificar, vamos realizar a soma da mesma fração:

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$$

Aplicando os passos contido na **regra prática**, teremos:

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}=\frac{(1\times 8)+(3\times 6)}{6\times 8}=\frac{8+18}{48}=\mathbf{\frac{26}{48}}$$

Por fim, de acordo com o quarto passo, precisamos analisar se é necessário simplificar a fração resultante.

Bem, o processo de **simplificação de frações** consiste em dividir seus termos por um mesmo número de forma a conseguir termos menores que os iniciais. Esse processo corresponde a encontrar uma fração que seja, ao mesmo tempo, **irredutível** e equivalente à primeira!

No nosso caso, vamos dividir numerador e denominador por 2:

$$\frac{26\div 2}{48\div 2}=\mathbf{\frac{13}{24}}$$

2.2. Multiplicação

Para multiplicar duas ou mais frações, basta:

1º) **Multiplicar os numeradores**, encontrando o numerador do resultado;

2º) **Multiplicar os denominadores**, encontrando o denominador do resultado.

Por exemplo:

$$\frac{2}{5}.\frac{3}{4}.\frac{1}{6}=\frac{2\,.\,3\,.1}{5\,.\,4\,.\,6}=\mathbf{\frac{6}{120}}$$

Você pode ainda **simplificar a fração** encontrada acima, dividindo tanto o numerador quanto o denominador por um mesmo número. No caso, 6 é o maior número que divide 6 e 120 ao mesmo tempo. Daí, teremos:

$$\mathbf{\frac{1}{20}}$$

2.3. Divisão

Para dividir frações, **basta multiplicar a primeira pelo inverso da segunda**. Deu para entender? Isso fica ainda mais claro por meio do seguinte exemplo:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{2}{3}.\frac{7}{5}=\frac{2\,.\,7}{3\,.\,5}=\mathbf{\frac{14}{15}}$$

Trabalhando com frações, normalmente podemos substituir a expressão "**de**" pela **multiplicação**. Veja alguns exemplos:

Quanto é um terço de 1000? Ora, simplesmente $\frac{1}{3} \times 1000$.

Quanto é dois sétimos de 25? A resposta é $\frac{2}{7} \times 25$.

3. Números Decimais

Os números decimais são, em regra, aqueles que **resultam da divisão não-exata de dois números inteiros**. Correspondem, portanto, aos números que possuem "casas após a vírgula".

Exemplos: 0,5 0,37 2,48 125,54 82,025.

Além disso, todo número decimal é composto por duas partes:

- **Parte inteira**: Fica à esquerda da vírgula;

- **Parte decimal**: Fica à direita da vírgula;

3.1. Propriedades

1ª) Um número decimal não se altera quando se acrescentam ou se suprimem um ou mais zero à direita de sua parte decimal.

Exemplo: 1,2 = 1,20 = 1,200 = 1,2000...

2ª) Na multiplicação de um número decimal por 10, 100, 1000, ..., basta deslocar a vírgula para a direita uma, duas, três, ..., casas decimais.

Exemplo: Para resolver 2,52 x 10, basta deslocar a vírgula para a direita uma casa decimal: **25,2**.

3ª) Na divisão de um número decimal por 10, 100, 1000, ..., basta deslocar a vírgula para a esquerda uma, duas, três, ..., casas decimais.

Exemplo: Para resolver 152,4 ÷ 100, basta deslocar a vírgula para a esquerda duas casas decimais: = ***1,524***.

3.2. Adição e Subtração

A adição ou subtração de dois números decimais funciona da mesma forma da adição/subtração comum:

Os números devem ser posicionados um embaixo do outro, com a *vírgula logo abaixo da vírgula do outro*, e as casas correspondentes uma embaixo da outra

↓

As casas correspondentes devem ser somadas/subtraídas, começando da direita para a esquerda

↓

À medida que forem sendo formadas dezenas, estas devem ser transferidas para a próxima adição/subtração (das casas logo à esquerda)

↓

No caso específico da subtração, devemos, além de igualar as casas à direita da vírgula, *completar com zeros quando necessário*

3.3. Multiplicação

Devemos aplicar o mesmo procedimento da multiplicação comum, com o seguinte alerta:

FIQUE ATENTO!

Na multiplicação de números decimais, o **número de casas** decimais do resultado será igual à **soma do número de casas decimais dos dois números** sendo multiplicados.

1,75 (2 casas decimais)
x 1,5 (1 casa decimal)
0,875
+ 1,75
2,625 (3 casas decimais)

3.4. Divisão

A divisão de números decimais será facilitada por torná-la uma divisão de números inteiros. Nesse caso, o nosso objetivo é **eliminar as casas decimais** dos valores envolvidos na operação!

ESQUEMATIZANDO

Igualar o número de casas decimais do dividendo e do divisor

Multiplicar ambos os valores por uma potencia de 10 de modo a retirar todas as casas decimais presentes, obtendo dois números inteiros

Efetuar a divisão dos dois números inteiros normalmente

4. Números Primos

Um número natural é primo quando **possui apenas dois divisores diferentes: ele mesmo e o número 1** (unidade).

Veja alguns exemplos:

a) O número 19 é primo, pois existem exatamente dois divisores positivos, que são 1 e 19;

b) Já o número 91 não é primo, pois tem quatro divisores positivos, que são 1, 7, 13 e 91;

c) Por sua vez, o 2 é o único número primo que é par, porque possui dois divisores positivos (1 e 2).

d) O número 1 não é primo, porque possui somente um divisor positivo, que é ele próprio;

e) O número zero não é primo, já que apresenta infinitos divisores positivos.

4.1. Reconhecimento de um Número Primo

Para reconhecer se um número inteiro n é primo ou não, utilizamos o seguinte método:

1º) Dividimos n por todos os números primos positivos cujos quadrados sejam menores que o módulo de n;

2º) Concluímos que o número n será primo se, e somente se, nenhuma dessas divisões for exata.

Por exemplo, vamos investigar se o número 119 é primo. Primeiro, notamos que os números primos positivos cujos quadrados são menores que 119 são: 2, 3, 5 e 7. Pronto, agora dividimos tais números por 119:

119	2	119	3	119	5	119	7
19	59	29	39	19	23	49	17
1		2		4		0	

Assim, o número 119 não é primo, pois a última divisão foi exata (119 ÷ 7 = 17).

Outra estratégia que pode ser aplicada para verificar se um número é primo (por sinal bem parecida com a anterior), consiste em dividi-lo pela sucessão dos números primos até que o quociente seja menor ou igual ao divisor e o resto diferente de zero.

Para exemplificar vamos conferir se o número 103 é primo. Inicialmente fazemos as divisões pela sucessão de números primos:

103	2	103	3	103	5	103	7	103	**11**
03	51	13	34	03	20	33	14	04	**9**
1		1				5			

Assim, o número 103 é primo, pois na última divisão o quociente (9) é menor que o divisor (11) e a divisão não foi exata.

4.2. Números Compostos

São chamados de **compostos** os números que possuem **mais de dois divisores positivos**, de modo que **podem ser expressos como um produto de dois ou mais fatores**, todos primos. Isso vai ser bastante utilizado quando estudarmos o capitulo de MMC e MDC.

Por exemplo, o número 4 é composto, pois possui três divisores (1, 2 e 4);

4.3. Teorema Fundamental da Aritmética

O Teorema Fundamental da Aritmética afirma que **todos os números inteiros positivos maiores que 1 podem ser decompostos num produto de números primos**, por meio do processo de fatoração que revisaremos no tópico a seguir.

4.4. Decomposição em fatores primos

Todo número inteiro, não primo, maior que 1, pode ser decomposto ou reduzido de forma única como um produto de fatores primos. Para isso, existe uma regra prática, que consiste nos seguintes passos:

1º) Dividimos o número pelo seu menor divisor primo;

2º) A seguir, dividimos o quociente obtido pelo menor divisor primo desse quociente e assim sucessivamente até obter o quociente 1;

3º) O produto indicado da sucessão de primos obtidos á a decomposição em questão.

Para exemplificar, vamos decompor em fatores primos o número 360:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Então, a decomposição de 360 em fatores primos resulta em: 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 = $\mathbf{2^3 \times 3^2 \times 5}$.

5. MMC e MDC

É muito importante que você saiba calcular o **Mínimo Múltiplo Comum (MMC)** e o **Máximo Divisor Comum (MDC)**, pois se trata de tópico muito exigido nas provas de concursos, inclusive em questões que não cobram simplesmente o cálculo desses números mas a aplicação deles em casos práticos.

Nesse sentido, abordaremos o conceito de MMC e MDC, os métodos aplicados para a sua determinação, as propriedades envolvidas e, principalmente, as aplicações que esses números apresentam na resolução de problemas da matemática, funcionando como verdadeira ferramenta estratégica para encontrar a saída adequada para desafios presentes em nosso cotidiano.

5.1. Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Denominamos **Mínimo Múltiplo Comum (MMC)** de dois ou mais números inteiros e não nulos ao **menor número positivo que seja múltiplo de todos os números dados**.

Para se calcular o MMC entre n números, utilizamos o método da decomposição simultânea em fatores primos:

1º) Decompor todos os números em fatores primos simultaneamente até achar tudo 1

2º) Multiplicar todos os fatores primos utilizados

Por exemplo, vamos calcular o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) entre 15, 24 e 60. Para determinar o MMC entre dois ou mais números por meio do método da decomposição simultânea em fatores primos cumprimos as seguintes etapas:

1°) fazer a decomposição em fatores primos simultaneamente, até achar tudo 1.

Para este procedimento, decompomos, simultaneamente, os números, dividindo sucessivamente pelo menor fator primo e, no caso de algum dos números não ser divisível pelo fator primo, ele deve ser repetido no algoritmo.

15, 24, 60	2
15, 12, 30	2
15, 6, 15	2
15, 3, 15	3
5, 1, 5	5
1, 1, 1	

2°) Depois é só multiplicar os fatores, pois o MMC será o produto de todos os números primos encontrados à direita. Portanto, o MMC (15, 24, 60) = 2^3 x 3 x 5 = 120.

5.2. Máximo Divisor Comum (MDC)

Denominamos **Máximo Divisor Comum (MDC)** de dois ou mais números inteiros e não nulos ao **maior dos divisores comum a todos eles**.

Existem basicamente dois métodos para se calcular o MDC entre n números.

1º Método: decomposição isolada em fatores primos

Neste método, cumpriremos basicamente duas etapas:

1º) Decompor cada número em uma multiplicação de fatores primos

2º) Multiplicar os fatores comuns de menor expoente

Lembre-se de que no MDC só entram os **fatores comuns** e com o **menor expoente**!

FIQUE LIGADO!!!

- O MMC é o produto de todos os fatores com os maiores expoentes.
- O MDC é o produto dos fatores comuns com os menores expoentes.

2º método: decomposição simultânea em fatores primos (processo simplificado)

O **método da decomposição simultânea em fatores primos** é a principal e mais prática forma para determinar o **MDC** entre dois ou mais números, razão pela qual também é conhecido por **processo simplificado**. Basicamente, aplicaremos os seguintes passos:

1º) Decompor todos os números em fatores primos simultaneamente até achar tudo 1

2º) Multiplicar os fatores nas linhas onde houve divisão em TODOS os elementos.

5.3. Propriedades

Existem propriedades do MDC e do MMC que podem facilitar o seu cálculo em diversas situações, razão pela qual se torna importante que estejamos familiarizados com tais relações.

1) O MDC entre dois ou mais números primos entre si será sempre igual a 1.

2) O MMC de dois ou mais números primos entre si será sempre igual ao produto entre eles.

3) Dados dois ou mais números naturais deferentes de 0, se o maior deles é o múltiplo dos outros, então esse número será o MMC dos números dados:

MMC (a, n x a) = n x a

4) Dados dois números naturais deferentes de 0, se o menor deles é divisor do maior, então o menor número será o MDC dos números dados:

MDC (b, n x b) = b

5) O produto do MDC pelo MMC de dois números deferentes de 0 é igual ao produto desses mesmos números:

MDC (a, b) x MMC (a, b) = a x b.

6) O resultado do MMC e do MDC é afetado pelas operações de multiplicação e de divisão efetuadas nos valores iniciais:

MDC (a,b) = y então MDC (qa, qb) = qy (q ≠ 0)

MMC (c, d) = w, então MMC (qc, qd) = qw (q ≠ 0)

7) Dois números consecutivos são sempre primos entre si. Logo:

MDC (a, a + 1) = 1

MMC (a, a + 1) = a x (a + 1)

5.4. Aplicações

Até aqui aprendemos a efetuar o cálculo do MDC e do MMC e vimos algumas propriedades envolvidas. Entretanto, tarefa ainda mais importante é conseguir aplicar esse conhecimento a casos concretos, cobrados em provas de concursos públicos. Isto é, diante de uma questão proposta, quando se deve usar o MMC ou o MDC?

Em relação ao **MDC**, é possível perceber que nos seus valores está presente a **ideia de divisão**. Além disso, o objetivo da questão consistirá em **repartir uma quantidade em partes iguais** ou determinar o **maior tamanho possível** de determinado item.

Por sua vez, nos números relativos ao **MMC** é marcante a **ideia de tempo** ou período. De fato, é comum que os enunciados exijam do candidato o reconhecimento de **coincidência temporal** ou mesmo **quando determinado evento irá acontecer novamente**.

RESUMINDO

MDC	MMC
Ideia de divisão	Ideia de tempo
Repartir em partes iguais	Coincidência
Maior tamanho possível!	Quando irá acontecer novamente?

Suponha que dois colegas de trabalho, João e José, gostam de realizar festas em suas casas periodicamente. João costuma realizar festas de 9 em 9 dias, enquanto José costuma realizar festas de 15 em 15 dias. Sabendo que hoje houve festa na casa de ambos, daqui a quanto tempo as datas das festas de ambos coincidirão novamente?

Ora, se João dá festas de 9 em 9 dias, sua próxima festa será daqui a 9 dias, a seguinte daqui a 18, a outra daqui a 27, e assim por diante.

Já a próxima festa de José será daqui a 15 dias, depois daqui a 30, depois 45 etc.

Observe que os dias em que ambos darão festas devem ser um múltiplo de 9 e também de 15, isto é, múltiplos comuns de 9 e 15. Ou seja, estamos diante da necessidade de reconhecer uma **coincidência temporal** ou **quando determinado evento irá acontecer novamente**, de modo que a estratégia de resolução envolve uma aplicação do MMC.

De fato, a próxima festa ocorrerá no menor desses múltiplos, isto é, no mínimo múltiplo comum entre 9 e 15, que é **135**.

Portanto, a próxima vez em que as festas coincidirão ocorrerá daqui a **135 dias**.

Agora, digamos que temos um conjunto de 20 cães e 30 gatos. Queremos criar grupos de gatos e grupos de cães, sem misturá-los, porém todos os grupos devem ter o mesmo número de integrantes. Qual o menor número de grupos possível?

Para obter o menor número de grupos possível, precisamos dividir 20 e 30 pelo maior número possível.

Note que o objetivo da questão consiste em **repartir uma quantidade em partes iguais** ou determinar o **maior tamanho possível** de determinado item, de forma que a estratégia de resolução envolve uma aplicação do MDC.

Realmente, este maior número que divide tanto 20 quanto 30, sem deixar resto, é justamente o **Máximo Divisor Comum** entre 20 e 30.

Decompondo 20 em fatores primos, temos que 20 = 2^2 x 5. Temos também que 30 = 2 x 3 x 5. Portanto, MDC (20,30) = 2 x 5 = 10.

Portanto, devemos formar grupos de 10 elementos. Isto é, 2 grupos com 10 cães em cada, e 3 grupos com 10 gatos em cada. Assim, **o menor número de grupos possível é 5**.

6. Potenciação

Nos tópicos anteriores tivemos a oportunidade de estudar as operações matemáticas fundamentais: soma, subtração, multiplicação e divisão. Em decorrência delas, várias outras operações foram desenvolvidas, como é o caso da **potenciação**.

Em termos de cobrança em concursos públicos, a presente temática tem sido bem explorada pelas bancas examinadoras, seja de maneira isolada, seja em combinação com outros assuntos, como na Matemática Financeira. De toda forma, é essencial que o candidato conheça o conceito de potenciação, os principais casos e as propriedades envolvidas nessa operação matemática.

No início do ensino fundamental, você aprendeu que a multiplicação nada mais é que uma soma de várias parcelas iguais. Por exemplo:

$$5 + 5 + 5 + 5 = 5 \times 4$$

Da mesma forma, a **potência** é uma forma abreviada para uma multiplicação de vários fatores iguais. Observe:

$$2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 2^4 = 16$$

Assim, a potenciação equivale a uma **multiplicação de fatores iguais**. No caso apresentado, temos uma potência na qual o número 2 é a **base** e 4, o **expoente**. Logo, a base é o número que está sendo multiplicado, ao passo que o expoente indica quantos fatores iguais a esse número serão usados.

Na potenciação, multiplicamos a **base** por ela mesma quantas vezes mandar o **expoente**!

6.1. Propriedades

As propriedades que veremos a partir de agora nos auxiliarão a agilizar os cálculos das potências. Basicamente, temos 3 (três) casos em que toda potência se encaixa. Analisemos cada um separadamente.

6.1.1. Potência de um Número Real com Expoente Natural

De modo geral, sendo a um número real e n um número natural, tal que n > 1, teremos:

$$a^n = \underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,.\,\dots\,.\,a}_{(n\ \text{vezes})}$$

ACORDE!

Não se deve multiplicar a base pelo expoente! Na verdade, como já dito, o expoente representa apenas o número de vezes em que a base é tomada como fator, mas não é, ele próprio, um fator.

- **Expoente igual a 1**: A potência será sempre igual à base. Exemplo: $8^1 = 8$.

- **Expoente nulo (=0)**: A potência será sempre igual a 1. (Não se define a potência 0^0). Exemplo: $8^0 = 1$.

- **Base igual a 1**: A potência será sempre igual a 1. Exemplo: $1^8 = 1$.

- **Base nula (=0)**: A potência será sempre igual a 0. (Não se define a potência 0^0). Exemplo: $0^8 = 0$.

Quanto ao **sinal da potência**, temos as seguintes regras:

1) Quando o expoente é um número **par**, a potência será sempre um número **positivo**.

2) Quando o expoente é um número **ímpar**, a potência terá sempre o **sinal da base**.

3) Quando um número inteiro **negativo** com expoente par ou ímpar **não estiver entre parênteses** a potência será sempre **negativa**.

DESPENCA NA PROVA!

$$(-a)^n \neq -a^n$$

6.1.2. Potência de um Número Real com Expoente Negativo

Considere a um número real (a ≠ 0) e n um número inteiro negativo. Nesse caso, temos:

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Ou seja, a presente propriedade indica que, se o **expoente** for **negativo**, podemos **inverter a base e trocar o sinal do expoente**.

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

6.1.3. Potência com Expoente Racional

Quando tivermos uma potência com expoente fracionário do tipo $a^{m/n}$, com a pertencente ao conjunto dos números reais positivos, n pertencente ao conjunto dos números naturais, m > 0, ela pode ser representada na forma:

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Ou seja, a base torna-se o radicando, o numerador do expoente torna-se o expoente do radicando e o denominador do expoente torna-se o índice do radical.

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$$

6.2. Operações

1) Multiplicação de potências de mesma base: Conserva-se a base e somam-se os expoentes:

$$\boldsymbol{a^m \,.\, a^n = a^{m+n}}$$

2) Divisão de potências de mesma base: Conserva-se a base e subtraem-se os expoentes:

$$\boldsymbol{a^m \div a^n = a^{m-n}}$$

3) Potência de potência: Conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes:

$$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m\,.\,n}}$$

$$\boldsymbol{(a^m)^n \neq a^{m^n}}$$

4) Multiplicação de potências de bases diferentes e expoentes iguais: Conserva-se o expoente e multiplicam-se as bases:

$$\boldsymbol{a^m . b^m = (a.b)^m}$$

5) Divisão de potências de bases diferentes e expoentes iguais: Conserva-se o expoente e dividem-se as bases:

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

6) Soma e subtração de potências: **Não** existem regras específicas para esse caso. Assim, simplesmente calcula-se o valor de cada potência e efetuam-se as operações indicadas.

7) Comparação entre potências: Temos dois casos a considerar:

- **1º caso**: A base é maior do que um (**a > 1**).

  ✓ $a^m > a^n$, se m > n.
  ✓ $a^m < a^n$, se m < n.

- **2º caso**: A base está compreendida entre zero e um (**0 < a < 1**).

  ✓ $a^m > a^n$, se m < n.
  ✓ $a^m < a^n$, se m > n.

8) Potência de base 10: Toda potência de base 10 é igual a 1, seguido de tantos zeros quantas são as unidades do expoente.

9) Potência de um Número Decimal: Calcula-se a potência como se fosse um número inteiro e, no resultado, separa-se, da direita para a esquerda, tantas casas decimais quantas forem a do produto do expoente pelo número de casas decimais existentes no número dado.

6.3. Notação Científica

A **notação científica** é um modo de representação métrica muito útil porque permite escrever números muito extensos ou muito pequenos de uma maneira mais compacta, tornando os cálculos mais simples. Ao escrevermos um número em notação científica utilizamos o seguinte formato:

$$a \,.\, 10^b$$

Em que o coeficiente **a** é um número real denominado **mantissa**, cujo módulo é **igual ou maior que 1 e menor que 10** e o expoente **b**, que corresponde à **ordem de grandeza**, é um **número inteiro**.

TRANSFORMAÇÃO DE UM NÚMERO REAL EM NOTAÇÃO CIENTÍFICA

Contar o nº de casas decimais deslocadas até obter um dígito antes da virgula

Utilizar esse valor como expoente

Caso o deslocamento seja para a direita, o expoente será positivo; caso seja para a esquerda, o expoente será negativo

TRANSFORMAÇÃO DE UMA NOTAÇÃO CIENTÍFICA EM NÚMERO REAL

Deslocar a vírgula da mantissa para a direita, caso a ordem de grandeza seja positiva, ou para a esquerda, caso a ordem de grandeza seja negativa.

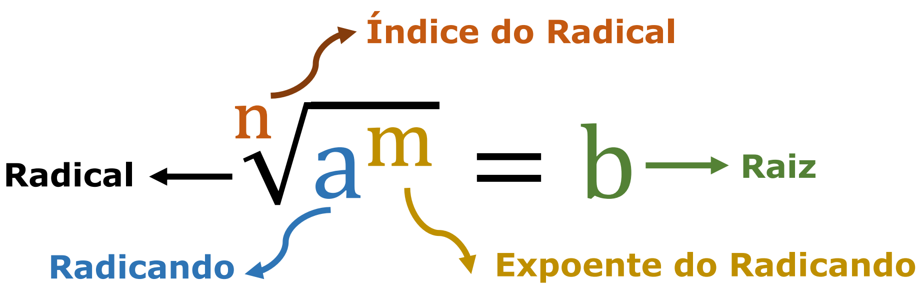
7. Radiciação

A **radiciação** é uma operação **inversa à potenciação**. Um número **b** é chamado de **raiz enésima exata** de um número **a**, se, e somente se:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad a = b^n$$

Para saber o resultado de determinada raiz basta pensarmos em um número que **deve ser multiplicado pela quantidade de vezes descrita pelo índice do radical e que esse produto tenha como resultado o valor do radicando**.

Elementos que compõem uma raiz:



O **radical** indica que se trata de uma radiciação, e o índice caracteriza a operação, isto é, o tipo de raiz que estamos trabalhando. Em geral, o radicando, junto de seu expoente, é o número sobre o qual somos questionados, e a raiz é o resultado.

7.1. Propriedades

Chegamos ao ponto principal deste tópico, já que a maioria das questões cobradas em concursos públicos explorando a radiciação são resolvidas por meio da aplicação das propriedades que estudaremos a seguir. Vejamos cada uma delas.

- **1ª Propriedade**: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$
- **2ª Propriedade**: $\sqrt[n]{a \,.\, b} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$
- **3ª Propriedade**: $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} \big/ \sqrt[n]{b}$
- **4ª Propriedade**: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\,.\,p]{a^{m\,.\,p}} = \sqrt[n \div q]{a^{m \div q}}$

- **5ª Propriedade**: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- **6ª Propriedade**: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

7.2. Operações

1) Adição e subtração: Somamos ou subtraímos os **coeficientes** dos radicais e juntamos ao resultado o **radical comum**.

2) Multiplicação ou divisão: Para multiplicar ou dividir dois ou mais radicais de mesmo índice, basta **multiplicar ou dividir os radicandos** e colocar o produto ou quociente obtido sob um **radical de mesmo índice dos radicais** dos fatores.

REDUÇÃO DE RADICAIS A UM MESMO ÍNDICE

1º passo) Acha-se o MMC dos índices dos radicais, que será o índice comum

2º passo) Divide-se o índice comum pelo índice de cada radical, multiplicando-se os quocientes obtidos pelos expoentes dos respectivos radicandos.

7.3. Método para extrair raiz quadrada

Para extrair a raiz quadrada de qualquer número **X**, pode ser aplicada a seguinte fórmula:

$$\sqrt{X} = \frac{(X + Q)}{2 \times \sqrt{Q}}$$

Em que **Q** corresponde ao quadrado mais próximo do número **X** que buscamos extrair a raiz quadrada.

Suponhamos que o nosso objetivo consiste em determinar a raiz quadrada de 150.

Inicialmente, analisamos qual é o **quadrado perfeito mais próximo** de 150. Conseguiu descobrir? Isso mesmo, é o 144, cuja **raiz quadrada** é 12.

Em seguida, precisamos ter em mente que trabalharemos com **três valores**: 1) o próprio 150, 2) o quadrado perfeito mais próximo dele, que é 144, e 3) a raiz quadrada desse quadrado perfeito.

Agora faremos um cálculo, com base numa fração, em que no numerador teremos sempre uma soma, cujas parcelas são o número que buscamos extrair a raiz quadrada e o quadrado perfeito mais próximo dele. Logo:

$$\frac{150+144}{\blacksquare}$$

Já o denominador começará sempre com 2 multiplicando um determinado número:

$$\frac{150+144}{\mathbf{2}\times ?}$$

E quem será o número faltante? Exatamente, a raiz quadrada do quadrado perfeito:

$$\frac{150+144}{2\times 12}=\frac{294}{24}=\mathbf{12,25}$$

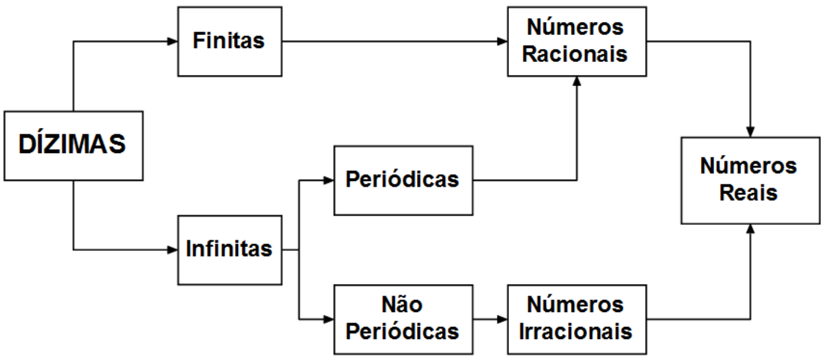
Portanto, a raiz quadrada de 150 é igual a 12,25. Se você conferir na sua calculadora, encontrará 12,247, então concluirá que chegamos a um resultado bem razoável, com uma aproximação muito boa.

8. Dízimas

O tópico **Dízimas Periódicas** é uma sequência natural do que revisamos em frações, em que analisamos sua estrutura, processo de simplificação e operações relacionadas, bem como do tópico **números decimais**.

Nesse sentido, veremos que se trata de assunto de fácil compreensão e exigido pelas bancas examinadoras nos mais diversos certames no âmbito do tópico Aritmética.

Nosso principal objetivo ao final deste capítulo é que você consiga distinguir dízimas simples das compostas e, principalmente, tenha condições de obter corretamente a **fração geratriz** de qualquer dízima periódica, seja ela simples ou composta, pois esse é o procedimento disparadamente mais cobrado nas provas de concursos públicos!



O **período da dízima** é uma sequência de algarismos que vem depois da vírgula e **se repete infinitamente**.

A fração (número racional) que deu origem a uma dízima periódica é denominada **fração geratriz**.

As dízimas são classificadas em:

- **Simples**: o período aparece imediatamente após a vírgula;
- **Compostas**: o período não aparece imediatamente após a vírgula.

FRAÇÃO GERATRIZ DE UMA DÍZIMA PERIÓDICA SIMPLES
Método das Somas das Partes

$$\boxed{\textbf{Número antes da vírgula}} + \boxed{\frac{\textbf{Período}}{\textbf{Tantos } \textbf{\textit{noves}} \textbf{ quanto for o número de algarismos do período}}}$$

FRAÇÃO GERATRIZ DE UMA DÍZIMA PERIÓDICA SIMPLES
Método da Multiplicação de Potências de 10

1º passo) Chamamos o número original de A.

2º passo) Multiplicamos cada lado por tantas potências de 10 quantos forem os algarismos do período.

3º passo) subtraímos as duas quantias anteriores

FRAÇÃO GERATRIZ DE UMA DÍZIMA PERIÓDICA COMPOSTA

$$\frac{\textbf{[parte não periódica][período] - parte não periódica}}{\textbf{[tantos \textit{noves} quanto for o número de algarismos do período][tantos \textit{zeros} quanto for o número de algarismos da parte não periódica]}}$$

Em outras palavras, no NUMERADOR, escrevemos tudo na ordem, sem vírgula e sem repetir. Em seguida, **subtraímos** tudo o que não se repete, na ordem e sem vírgula. Já no DENOMINADOR colocamos o valor “9” para cada item que se repete e inserimos o valor "0" para os **intrusos**, isto é, os algarismos da parte não periódica.

9. Resolução de Problemas Matemáticos

A **resolução de problemas** é uma habilidade fundamental, pois o uso da matemática é para basicamente resolver problemas, o que proporciona aos estudantes desenvolvimento da comunicação, da construção de aprendizagens significativas e da capacidade de aplicar os conceitos matemáticos na vida diária. Portanto, é amplamente recomendado que você enfrente esse tipo de exercício.

Contudo, como se resolve um problema matemático? Bem, a resolução de um problema é realizada em **cinco etapas**[1]. Isso é o que você sempre fez quando resolveu problemas matemáticos, só vamos a seguir explicar um pouco melhor cada uma dessas etapas e depois resolveremos problemas para ilustrá-las.

A **primeira** delas é a **compreensão**. Ou seja, inicialmente faz-se necessário entender o problema que está diante de você:

- Leu o problema? Entendeu as informações contidas no enunciado?
- Qual é a incógnita ou valor a ser determinado? Quais são os dados ou o que a questão te fornece para a solução?
- Quais são as condições? É possível satisfazer as condições? Elas são suficientes para determinar a incógnita? Ou são insuficientes? Ou redundantes? Ou contraditórias? Separe as condições em partes.

Depois disso, vem a **segunda** etapa, que consiste na **elaboração de um plano** ou estratégia. Aqui se exige do aluno realmente pensar no problema e ver qual é a maneira ideal para você abordá-lo e tentar resolvê-lo. Achar conexões entre os dados e a incógnita. Talvez seja conveniente considerar problemas auxiliares ou particulares, se uma conexão não for achada em tempo razoável. Use isso para "bolar" um plano ou estratégia de resolução do problema.

- Você já encontrou este problema ou algum parecido?
- Você conhece um problema semelhante? Você conhece teoremas ou fórmulas que possam ajudar?
- Olhe para a incógnita! Agora tente achar um problema familiar e que tenha uma incógnita semelhante.
- Aqui está um problema relacionado com o seu e que você já sabe resolver. Você consegue aproveitá-lo? Você pode usar seu resultado? Ou seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar de modo a viabilizar esses objetivos?
- Você consegue enunciar o problema de outra maneira?
- Se você não consegue resolver o problema dado, tente resolver um problema parecido. Você consegue imaginar um caso particular mais acessível? Um caso mais geral e mais acessível? Você consegue resolver alguma parte do problema? Mantenha apenas parte das condições do problema e observe o que ocorre com a incógnita, como ela varia agora? Você consegue obter alguma coisa dos dados? Você consegue imaginar outros dados capazes de produzir a incógnita? Você consegue alterar a incógnita ou os dados, ou ambos, de modo que a nova incógnita e os novos dados fiquem mais próximos?
- Você está levando em conta todos os dados? E todas as condições?

---

[1] O processo de resolução de problemas matemáticos aqui retratado é inspirado no livro "*A Arte de Resolver Problemas*", escrito por George Polya.

Agora, chegou a **terceira** etapa, que envolve a **execução** desse plano. É você colocar a mão na massa e resolver o problema, aplicando aquela estratégia que você pensou.

Nesse ponto, exige-se do aluno, além do conhecimento matemático, o uso da interpretação dos textos contidos nos enunciados. É comum nos depararmos com problemas em que é cobrado do candidato mais o entendimento do que se pede do que com os cálculos propriamente ditos.

Além disso, aqui enfrentaremos o desafio de converter a linguagem escrita em linguagem matemática, ou seja, em expressões numéricas.

Enfim, são problemas que testam não somente o conhecimento das várias vertentes matemáticas, como também a capacidade de interpretação de informações.

DICAS PARA INTERPRETAR INFORMAÇÕES EM PROBLEMAS ARITMÉTICOS[2]

1) Qual é o número...?

Provavelmente você já deve ter visto essa pergunta. Quando ela aparece, significa que precisamos encontrar o valor de um número, então vamos logo chamá-lo de **x**. Portanto, já escreva:

x = ?

Aliás, geralmente quando aparecem perguntas envolvendo pronomes interrogativos (como "qual" e "quanto"), significa que precisamos encontrar o **x** da questão.

2) E quando aparecem as preposições?

Em problemas matemáticos, as preposições como "de", "da" e "do" costumam indicar uma operação de **multiplicação**.

Por exemplo, se um problema pede 2/5 **de** x, isso significa que vamos fazer o produto entre 2/5 e x, obtendo a expressão:

$$\frac{2}{5} \cdot x = \frac{2x}{5}$$

Outra preposição que aparece bastante nos problemas matemáticos é a "por", que normalmente indica uma operação de **divisão**. Inclusive essa preposição também está "escondida" dentro do sinal % ("por cento"). Exemplo: 2 por 3 = $\frac{2}{3}$.

3) Verbos

Verbos como "é", "tem" e "equivale" significam **igualdade**. Para exemplificar esse caso de traduções para linguagem matemática, considere um problema em que é dito que Carlos e João têm juntos 50 anos. Aritmeticamente, traduzimos que:

C + J = 50

4) Antecessor e consecutivo

São outros termos bem frequentes nas questões matemáticas. E seu entendimento é bem simples:

- O **antecessor** de um número qualquer significa **x – 1**
- O **consecutivo** de um número qualquer significa **x + 1**

5) Oposto e inverso

Por fim, você pode encontrar também os seguintes termos:

- **Oposto** de um número qualquer significa **-x**
- **Inverso** de um número qualquer significa **1/x**

---

[2] Inspirado no artigo "*Como interpretar problemas matemáticos?*" em Só Matemática. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2019. Consultado em 02/09/2019 às 11:44. Disponível na Internet em https://www.somatematica.com.br/faq/interpretar.php

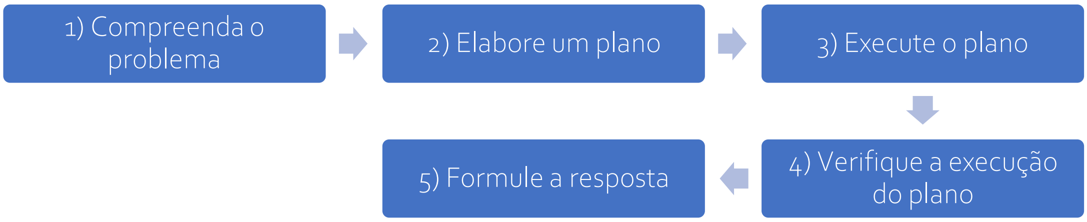
Aprendidas essas dicas de interpretação de um problema, vamos executar a estratégia. Ao fazer isso, analise cada passo. Você consegue mostrar claramente que cada um deles está correto?

Em seguida, na **quarta** etapa vamos fazer a **verificação** de como executamos a estratégia elaborada.

- Será que esse plano que você teve e a execução dele resultaram na resposta correta?
- Você consegue obter a solução de um outro modo?
- Qual a essência do problema e do método de resolução empregado?
- Em particular, você consegue usar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Por fim, na **quinta** e última etapa você irá simplesmente **formular a resposta** do problema. Ou seja, veja a pergunta apresentada no enunciado. Pode respondê-la numa frase simples, objetiva e direta?

Portanto, essas são as cinco etapas necessárias à resolução de um problema aritmético:



Agora, vamos resolver alguns problemas aplicando esse método.

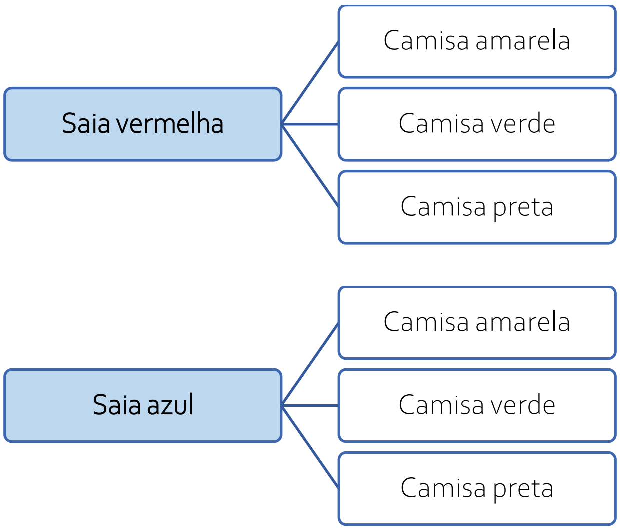
EXEMPLO 01: Laura é muito vaidosa e gosta de se vestir muito bem para qualquer ocasião. Para assistir às aulas do seu curso preparatório, ela comprou uma saia vermelha e outra azul, uma camisa amarela, uma verde e outra preta. Então, de quantas maneiras diferentes Laura poderá se vestir?

Estamos diante de uma típica questão de Raciocínio Matemático, de modo que teremos que aplicar as cinco etapas para a resolução de um problema aritmético.

A **primeira** coisa a se fazer é **compreender o problema**. Para isso, fazemos uma boa leitura do enunciado com vistas a entender bem as informações ali presentes.

Também precisamos separar os dados que o exercício nos forneceu daquilo que buscamos descobrir, isto é, a incógnita. Bem, repare que queremos descobrir de quantas maneiras diferentes Laura poderá se vestir. E quais dados o problema nos dá? Ele diz que ela comprou uma saia vermelha e outra azul, ou seja, duas saias, e uma camisa amarela, uma verde e outra preta, isto é, três camisas. Logo, foram duas saias e três camisas.

Na **segunda** etapa, entra em cena a **elaboração de um plano**. Então, precisamos pensar se na resolução do problema iremos adotar um esquema, ou uma tabela, ou uma equação, ou diagrama, ou então fazer um desenho. Nesse caso, optaremos por fazer um desenho. Indicaremos as saias que ela comprou (uma vermelha e uma azul) combinando cada uma com as camisas (uma amarela, uma verde e uma preta):



Agora, chegou a **terceira** etapa, que corresponde à **execução do plano**. Veja que por meio do esquema que fizemos já é possível resolver o problema. Com a saia vermelha, Laura pode combinar a camisa amarela, a camisa verde e a camisa preta; e o mesmo acontece com a saia azul. Ou seja, ela tem à sua disposição três opções com a saia vermelha e três opções com a saia azul, o que totaliza 3 + 3 = **6 maneiras** diferentes de se vestir. Dessa forma, conseguimos fazer a conversão da linguagem escrita em linguagem matemática, que fica evidente por meio da operação de soma.

Terminamos de resolver o problema? Calma, falta muito pouco. Em seguida, temos a **quarta** etapa, em que faremos a **verificação da execução plano**. A bem da verdade, já cumprimos essa etapa no momento em que elaboramos o esquema anterior, que nos permite graficamente concluir que realmente o resultado da operação descrita no enunciado é 6.

Nessa etapa, é oportuno avaliar se conseguiríamos resolver o problema de outra forma. Bem, nesse caso conseguiríamos sim. De fato, eu poderia usar o **princípio multiplicativo**. Como seria isso? Bem, são duas saias e três camisas, então era só fazer o produto entre 2 e 3 que daria certo também. Veja que essa resolução é até mais prática, porém é importante considerar outras maneiras de resolver o problema, nesse caso usando um esquema. Até porque tem aluno que entende melhor por meio de desenho, outros têm mais facilidade com a Matemática mais abstrata, de modo que é interessante dispor das diversas maneiras que podemos solucionar um exercício.

Por fim, concluímos a resolução com a **quinta** e última etapa, na qual **formularemos a resposta** do problema. Nesse ponto, voltamos ao enunciado e verificamos qual a pergunta que foi feita a nós: "*de quantas maneiras diferentes Laura poderá se vestir?*". É nisso que precisamos nos concentrar para responder de forma objetiva. Vamos fazer isso? A resposta será: **Laura poderá se vestir de seis maneiras diferentes**.

EXEMPLO 02: Fabiano levou para sua escola um saco de balas para dividir com os amigos. Aos primeiros que encontrou, deu metade das balas que trazia. Depois encontrou mais amigos e deu metade das que ainda tinha. E foi assim que chegou à sala dele só com 20 balas. Quantas balas tinha no saco antes de Fabiano o abrir?

Vamos agilizar nosso processo de resolução do problema.

Você compreendeu o exercício? Vamos adotar a estratégia de resolver esse problema do fim para o início. Inclusive esse método de resolução é conhecido como **princípio da regressão**, a qual estudaremos com mais detalhes nos princípios de contagem.

Veja que no final Fabiano acabou com 20 balas. Mas antes disso ele havia dado a metade das que possuía. E quantas eram? Aqui precisamos converter a linguagem escrita na linguagem matemática. Isso é simples. Pense conosco, se eu dei metade e ainda fiquei com vinte é porque anteriormente eu tinha 20 × 2 = 40 balas.

Continuamos o processo de executar as operações de trás para frente. E antes de ter essas 40 balas? Fabiano tinha feito a mesma coisa, isto é, havia dado metade do que tinha inicialmente, de modo que ele possuía 40 × 2 = **80 balas no saco fechado**. Chegamos ao resultado desejado!

Será que esse resultado faz sentido? Podemos verificá-lo seguindo agora o processo de resolução do início para o fim das operações, usando o valor que encontramos como resposta, e estando atentos se acharemos alguma contradição.

Inicialmente, havia 80 balas no saco (é essa a hipótese que estamos considerando). Como Fabiano deu a metade das balas aos primeiros amigos, sobraram 80 ÷ 2 = 40 balas. Ao encontrar mais amigos, deu metade das balas que tinha, de modo que ficou com 40 ÷ 2 = 20 balas. E foi exatamente essa a quantidade que ele chegou à sala de aula.

Portanto, verificamos que a nossa estratégia, a execução aplicada e o resultado a que chegamos estão corretos. Isso nos permite responder à pergunta do enunciado por afirmar que <u>antes de abrir o saco Fabiano dispunha de 80 balas</u>.

EXEMPLO 03: Carlos comprou uma televisão no valor de R$ 950,00, dividida em 10 prestações iguais. Ao pagar a 4º prestação, recebeu de presente de seu avô o restante do dinheiro para a quitação do aparelho. Quanto Carlos recebeu?

Vamos chamar de **x** o valor que Carlos recebeu de presente de seu avô. Essa é a nossa incógnita, o valor que desejamos calcular.

Quais foram os dados fornecidos? Bem, é dito que o valor do aparelho é igual a R$950,00. Também o enunciado informa que Carlos resolveu dividir o televisor em 10 prestações iguais. Logo, obtemos o valor de cada prestação fazendo a seguinte operação de divisão:

$$\frac{950}{10} = \boldsymbol{95\, reais}$$

Sabemos que Carlos efetuou o pagamento de 4 prestações, de modo que ainda faltam ser pagas 10 – 4 = 6 prestações, as quais correspondem às que o avô de Carlos resolveu pagar. Elas valem 95 × 6 = 570 reais.

Portanto, Carlos recebeu **R$ 570,00** de seu avô.

EXEMPLO 04: Quantas partes se obtêm dobrando uma folha ao meio por 8 vezes consecutivas?

Repare que o nosso objetivo consiste em determinar a quantidade de partes resultantes em se dobrar 8 vezes uma folha ao meio.

Vamos adotar a estratégia de descobrir uma regularidade ou padrão matemático no processo indicado, por meio da construção de uma **tabela**. Nessa tabela, vamos associar o número de dobras realizadas com a quantidade de partes obtida:

Dobras	Partes

Concorda que se a folha não tem nenhuma dobra, então há apenas uma parte, que corresponde à superfície dela? Vamos inserir essa informação na tabela:

Dobras	Partes
0	1

Quando eu faço uma dobra ao meio na folha, ela vai ficar dividida em duas. Na próxima dobra, que é a segunda consecutiva, a folha vai estar dividida em quatro partes. Na terceira dobra, a folha vai estar dividida em oito partes. Ou seja:

Dobras	Partes
0	1
1	2
2	4
3	8

Conseguiu perceber aqui uma regularidade? Sim, veja que os números contidos na coluna "partes" são formados multiplicando 2 por eles próprios. Esse é um padrão que estará presente durante todo o processo de dobra da folha! Assim, na quarta dobra, o que obteremos? Ora, seria o 2 multiplicado por ele mesmo quatro vezes, resultando em $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ partes. Seguindo o padrão, na oitava dobra, teríamos o 2 multiplicado por ele próprio oito vezes. Essa operação pode ser representada na forma de potência:

$$\mathbf{2^8 = 256}$$

Portanto, concluímos que a folha estaria dividida em **256 partes**.

EXEMPLO 05: Suponha que há um certo número de coelhos e de gaviões em duas gaiolas diferentes, totalizando 7 cabeças e 22 patas. São quantos coelhos e quantos gaviões?

Qual a estratégia podemos aplicar na resolução desse problema? Vamos resolver associando-o a um problema análogo mais simples.

Desse modo, podemos simplesmente ignorar que tem coelhos, vamos tratar só dos gaviões. Sabemos que são 7 cabeças, de forma que tem 7 animais lá dentro, concorda? Então seriam 7 gaviões, que têm 14 patas ao todo.

Gavião 1	Gavião 2	Gavião 3	Gavião 4	Gavião 5	Gavião 6	Gavião 7	Total
2 patas	2 patas	2 patas	2 patas	2 patas	2 patas	2 patas	14 patas

Veja que isso está errado, porque eu preciso obter 22 patas. Ou seja, estão faltando 22 – 14 = 8 patas. Assim, devemos distribuir essas oito patas pelos coelhos, que são animais com 4 patas.

Vamos substituir alguns dos gaviões por coelhos. Em cada gavião, já contabilizamos 2 patas, o que nos permite deduzir que são quatro coelhos, com 4 × 4 = 16 patas ao todo. E são quantos gaviões? Como há sete cabeças, vão ter que ser três gaviões.

Gavião 1	Gavião 2	Gavião 3	Coelho 1	Coelho 2	Coelho 3	Coelho 4	Total
2 patas	2 patas	2 patas	4 patas	4 patas	4 patas	4 patas	22 patas

Portanto, concluímos que há **4 coelhos e 3 gaviões** na gaiola.

APOSTA ESTRATÉGICA

A ideia desta seção é apresentar os pontos do conteúdo que mais possuem chances de serem cobrados em prova, considerando o histórico de questões da banca em provas de nível semelhante à nossa[3].

Nesse sentido, eu jogaria todas as minhas fichas na cobrança de questões envolvendo a **resolução de problemas aritméticos**, que exigem do candidato a correta aplicação das operações fundamentais da matemática.

[3] Vale deixar claro que nem sempre será possível realizar uma aposta estratégica para um determinado assunto, considerando que às vezes não é viável identificar os pontos mais prováveis de serem cobrados a partir de critérios objetivos ou minimamente razoáveis.

QUESTÕES ESTRATÉGICAS

Nesta seção, apresentamos e comentamos uma amostra de questões objetivas selecionadas estrategicamente: são questões com nível de dificuldade semelhante ao que você deve esperar para a sua prova e que, em conjunto, abordam os principais pontos do assunto.

A ideia, aqui, não é que você fixe o conteúdo por meio de uma bateria extensa de questões, mas que você faça uma boa revisão global do assunto a partir de, relativamente, poucas questões.

1. (VUNESP/PM-SP/Soldado/2018) Em uma gaveta há 24 canetas, sendo 1/6 delas verdes, 3/8 vermelhas, e as demais azuis. O número de canetas azuis que há nessa gaveta é

(A) 11. (B) 9. (C) 7. (D) 10. (E) 8.

RESOLUÇÃO:

O enunciado informa que há um total de 24 canetas, das quais (1/6) x 24 = 4 são verdes e (3/8) x 24 = 9 são vermelhas.

Assim, o total de canetas **azuis** é 24 – 4 – 9 = **11**.

Gabarito: A.

2. (VUNESP/PM-SP/Soldado/2018) Para participar de uma festa são cobrados um ingresso de R$ 80,00 e um preço fixo de R$ 6,00 por qualquer tipo de latinha de bebida. Se uma pessoa gastou nessa festa, com o ingresso e as bebidas, um total de R$ 134,00, então o número de latinhas de bebida consumidas por ela foi

(A) 10. (B) 8. (C) 6. (D) 9. (E) 7.

RESOLUÇÃO:

Conforme os dados apresentados no enunciado, o total gasto com bebidas foi 134 – 80 = **54 reais**.

Visto que cada bebida custa 6 reais, então ele consumiu 54/6 = **9 latinhas**.

Gabarito: D.

3. (VUNESP/ISS São José dos Campos/Auditor Tributário/2018) Em um posto de combustíveis, o preço de um litro de gasolina é R$ 4,50, e o preço de um litro de etanol é R$ 2,70. Se o custo de um litro de uma mistura de determinadas quantidades desses dois combustíveis é R$ 3,24, então o número de litros de etanol necessários para formar 10 litros dessa mistura será igual a

(A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 4. (E) 3.

RESOLUÇÃO:

Suponha que vamos montar 1 litro de mistura.

Se usarmos o volume A de álcool (em litros), devemos utilizar o volume de 1 – A de gasolina (também em litros).

O preço de 1 litro da mistura é dado somando-se os preços das partes com gasolina e com álcool:

$$(1 - A) \times 4{,}50 + A \times 2{,}7 = 3{,}24$$

$$4{,}5 - 4{,}5A + 2{,}7A = 3{,}24$$

$$1{,}8A = 1{,}26$$

$$A = 1{,}26/1{,}8 = 0{,}70 \text{ litro}$$

Ou seja, em 1 litro da mistura, teremos 0,70 litro de álcool. Em 10 litros da mistura, teremos 0,7 x 10 = 7 litros de álcool.

Gabarito: A.

4. (VUNESP – TJ-SP/Enfermeiro/2019) Saí de casa com uma certa quantia comigo. Gastei metade do que tinha e em seguida dei R$ 3,00 de gorjeta. Continuei e gastei metade do que ainda tinha e novamente dei R$ 3,00 de gorjeta. Além dessas duas vezes, fiz exatamente a mesma coisa outras duas vezes. Ao final estava com R$ 17,00. Sendo assim, havia saído de casa com

(A) R$ 298,00 (B) R$ 344,00 (C) R$ 384,00 (D) R$ 362,00 (E) R$ 280,00

RESOLUÇÃO:

Podemos aplicar nesta questão o **princípio da reversão ou regressão**. Para isso, o que era divisão por dois (para ficar metade) vira multiplicação por dois, e o que era subtração de 3 reais (gorjeta) vira soma de 3 reais.

No final, eu tinha 17 reais. Somando os 3 que dei de gorjeta, chego a 20 reais. Multiplicando por 2, temos 40 reais.

Repetindo o processo, somamos 3 reais, chegando a 43, e multiplicamos por 2, chegando a 86.

Repetindo o processo, somamos 3 reais, chegando a 89, e multiplicamos por 2, chegando a 178. Somamos mais 3 reais, chegando a 181, e multiplicamos por 2, chegando a **362 reais**, que é o valor que eu tinha inicialmente.

Gabarito: D.

5. (VUNESP/Pref de Barretos – SP/Agente Admin/2018) Em um tanque há 3 torneiras, A, B e C, todas com defeito e que pingam sem parar. A torneira A pinga a cada 20 segundos, a torneira B pinga a cada 35 segundos e a torneira C pinga a cada 15 segundos. Sabendo que as 3 torneiras pingaram juntas às 8 horas e 54 minutos, e que permaneceram assim o dia todo, sem que alguém tivesse mexido nelas, então, o próximo horário em que as 3 torneiras voltarão a pingar juntas será às

A) 8 horas e 58 minutos.

B) 9 horas e 01 minuto.

C) 9 horas e 06 minutos.

D) 9 horas e 12 minutos.

E) 9 horas e 15 minutos.

RESOLUÇÃO:

O nosso objetivo consiste em determinar quando as 3 torneiras voltarão a pingar juntas. Ou seja, estamos diante da necessidade de reconhecer uma **coincidência temporal** ou **quando determinado evento irá acontecer novamente**, de modo que a estratégia de resolução envolve uma aplicação do **MMC**.

Assim, o MMC entre os valores das frequências que cada torneira pinga é dado por:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{15, 20, 35} & 2 \\ 15, 10, 35 & 2 \\ 15, 5, 35 & 3 \\ 5, 5, 35 & 5 \\ 1, 1, 7 & 7 \\ 1, 1, 1 & \text{MMC } (15, 20, 35) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = \mathbf{420} \end{array}$$

Ou seja, as três torneiras voltarão a pingar juntas 420 segundos ou 7 minutos após a primeira vez em que isso ocorre. Dessa forma, o próximo horário em que as 3 torneiras voltarão a pingar juntas será às:

8h e 54 min + 7 minutos= **9 h e 01 min**

Gabarito: B.

6. (VUNESP/IPSM/Ana de Gestão Mun/2018) Participarão de um congresso 256 funcionários da empresa A, 416 funcionários da empresa B e 656 funcionários da empresa C. Esses funcionários serão divididos em grupos, de modo que, em cada grupo:

- haja o mesmo número de participantes;
- haja o maior número possível de participantes;
- sejam todos da mesma empresa.

Divididos dessa maneira, o total de grupos obtidos será

A) 48. B) 54. C) 75. D) 83. E) 96.

RESOLUÇÃO:

O nosso objetivo consiste em formar grupos com a mesma quantidade de pessoas, mas que haja o maior número possível de pessoas em cada um deles. Ou seja, estamos diante da necessidade de **repartir uma quantidade em partes iguais** ou determinar o **maior tamanho possível** de determinado item, de forma que a estratégia de resolução envolve uma aplicação do **MDC**.

Assim, o MDC entre as quantidades dos funcionários é dado por:

256, 416, 656	**2**
128, 208, 328	**2**
64, 104, 164	**2**
32, 52, 82	**2**
16, 26, 41	2
8, 13, 41	2
4, 13, 41	2
2, 13, 41	2
1, 13, 41	13
1, 1, 41	41
1, 1, 1	

Agora, multiplicamos os fatores em que houve divisão em todos os elementos, encontrando o **MDC (256, 416, 656)** = 2^4 = **16**. Dessa maneira, teremos no máximo **16 pessoas em cada grupo**.

Como cada grupo terá funcionários de uma mesma empresa, dividimos a quantidade de pessoas de cada empresa pelo número máximo de pessoas que pode haver em cada grupo:

- A: 256 ÷ 16 = 16
- B: 416 ÷ 16 = 26
- C: 656 ÷ 16 = 41

Portanto, serão formados 16 + 26 + 41 = **83 grupos**.

Gabarito: D.

7. (VUNESP/Pref de Guarulhos/Ag Esc/2016) Um total de 100 crianças, sendo 40 meninos e as demais meninas, será dividido em grupos, todos com o mesmo número total de crianças e compostos por um número mínimo de meninos e um número mínimo de meninas, de modo que cada uma das 100 crianças participe apenas de um grupo. Dessa forma, o número total de grupos que será formado é

a) 4. b) 5. c) 10. d) 20. e) 25.

RESOLUÇÃO:

Inicialmente a questão informa que temos 100 crianças, sendo 40 meninos e 60 meninas, que serão divididos em grupos, com o mínimo de crianças possível em cada um. Então, como se trata de uma divisão, precisamos calcular o **MDC**:

40, 60	**2**
20, 30	**2**
10,15	2
5, 15	3
5, 5	**5**
1, 1	

Agora, multiplicamos os fatores em que houve divisão em todos os elementos, encontrando o MDC:

MDC (40, 60) = 2 x 2 x 5 = **20**

Dessa maneira, teremos no máximo **20 grupos**, com 2 meninos (40/20 = 2) e 3 meninas (60/20 = 3) em cada um deles.

Gabarito: D.

8. (VUNESP/PM-SP/Soldado/2018) Uma pessoa toma 3 medicamentos diferentes: A, B e C. O medicamento A ela toma a cada 4 horas, o medicamento B, a cada 6 horas, e o medicamento C, a cada 12 horas. Sabendo que às 9 horas do dia 1o de agosto essa pessoa tomou os 3 medicamentos juntos, o próximo dia e horário em que essa pessoa tomará esses 3 medicamentos juntos novamente será em

(A) 1º de agosto, às 12 horas.

(B) 2 de agosto, às 12 horas.

(C) 1º de agosto, às 24 horas.

(D) 2 de agosto, às 09 horas.

(E) 1º de agosto, às 21 horas.

RESOLUÇÃO:

A questão envolve uma aplicação de **MMC**, por tratar de coincidência entre determinados eventos.

Repare que 12 é múltiplo de 4 e 6, de modo que o mmc(4, 6, 12) = 12.

Assim, a pessoa toma os três medicamentos juntos a cada 12 horas.

A pessoa tomou os três medicamentos às 9 horas do dia 1º de agosto. Ela tomará os três remédios juntos 12 horas depois: às **21 horas do dia 1º de agosto.**

Gabarito: E.

9. (VUNESP/Pref de Suzano/Prof Educ Básica/2015) O máximo divisor comum de 18 e N é 6. Sabendo-se que o mínimo múltiplo comum de 18 e N é 36, é correto afirmar que o produto 18N é igual a

a) 162. b) 180. c) 198. d) 216. e) 234.

RESOLUÇÃO:

Aos números naturais se aplica a seguinte propriedade: o **produto do MDC pelo MMC** de dois números deferentes de 0 é igual ao **produto** desses mesmos números. Ou seja:

MDC (a, b) x MMC (a, b) = a x b

Dessa maneira, ao aplicarmos essa propriedade aos números apresentados no enunciado, obtemos:

$$MDC(18, N) \times MMC(18, N) = 18 \times N$$

$$6 \times 36 = 18N$$

$$\mathbf{18}\boldsymbol{N} = \mathbf{216}$$

Gabarito: D.

10. (VUNESP - ETJ/TJM SP/2011) Ao longo de um dia, um supermercado fez vários anúncios dos produtos A, B e C, todos eles com o mesmo tempo de duração. Os tempos totais de aparição dos produtos A, B e C foram, respectivamente, iguais a 90s, 108s e 144s. Se a duração de cada anúncio, em segundos, foi a maior possível, então, a soma do número de aparições dos três produtos, nesse dia, foi igual a

a) 14. b) 15. c) 17. d) 18. e) 19.

RESOLUÇÃO:

Devemos encontrar a duração de cada anúncio, sendo que é a maior possível. Assim, deve ser o **MDC entre 90, 108 e 144**.

90	108	144	2
45	54	72	2
45	27	36	2
45	27	18	2
45	27	9	3
15	9	3	3
5	3	1	3
5	1	1	5
1	1	1	

MMC = $2x3^2=18$

Agora ficou tranquilo, pois para saber quantas vezes cada um apareceu, basta **dividir o tempo total de aparição pelo tempo de cada anúncio**, a saber 18:

- A: 90 ÷ 18 = 5 aparições
- B: 108 ÷ 18 = 6 aparições
- C: 144 ÷ 18 = 8 aparições

Logo, o total de aparições foi 5 + 6 + 8 = **19**, o que torna a **Letra E** a alternativa correta.

Gabarito: E.

11. (VUNESP/TJ-SP/Escrevente/2015) Para a montagem de molduras, três barras de alumínio deverão ser cortadas em pedaços de comprimento igual, sendo este o maior possível, de modo que não reste nenhum pedaço nas barras. Se as barras medem 1,5 m, 2,4 m e 3 m, então o número máximo de molduras quadradas que podem ser montadas com os pedaços obtidos é

a) 3 b) 6 c) 4 d) 5 e) 7

RESOLUÇÃO:

A questão exige a formação de barras com tamanhos iguais e o maior possível. Logo, estamos diante de um caso de **MDC**.

Então, vamos fatorar os números envolvidos:

- 15 = **3** x 5
- 24 = 2 x 2 x 2 x **3**
- 30 = 2 x **3** x 5

Assim, o MDC = 3, que corresponde ao tamanho das barras, de modo que:

- 15/3 = 5 barras
- 24/3 = 8 barras
- 30/3 = 10 barras

Somando os resultados, obtemos 5 + 8 + 10 = **23 barras**. E, visto que as molduras são quadradas, precisamos dividir esse valor por quatro. Ao fazermos isso, teremos **5 molduras**, restando ainda 3 barras.

Gabarito: D.

12. (VUNESP/UNESP/Ass Adm/2016) Gilberto e Guilherme treinam bicicleta juntos em um circuito de 3240 metros de extensão. Após o aquecimento, saem juntos do início do trajeto às 9:00h e encerram o treinamento após se encontrarem outras seis vezes no início do trajeto. Supondo que durante todo o treinamento, a cada segundo, Gilberto e Guilherme percorrem 6 metros e 9 metros, respectivamente, então é correto afirmar que o treino se encerrará às

a) 11h. b) 10h 48min. c) 10h 32min. d) 10h 25min. e) 10h 04min.

RESOLUÇÃO:

A extensão do circuito é de **3.240 metros**. Foi dito que, a cada segundo, Gilberto e Guilherme percorrem 6 metros e 9 metros, respectivamente. Logo, o tempo que cada um leva para dar uma volta completa fica:

- **Gilberto**: 3.240 / 6 = 540 segundos.
- **Guilherme**: 3.240 / 9 = 360 segundos.

Agora vamos calcular de quanto em quanto tempo os dois se encontram na largada, por meio do **MMC**:

540, 360	2
270, 180	2
135, 90	2
135, 45	3
45, 15	3
15, 5	3
5, 5	5
1, 1	

$= 2^3 \times 3^3 \times 5 =$ **1.080**

Então, a cada 1.080 segundos ou **18 minuntos** (1.080 ÷ 60 = 18) eles se encontram no início do trajeto. Além disso, temos a informação de que eles fazem isso **seis vezes**, gastando no total **1 hora e 48 min** (18 min x 6 = 108 min). E, por fim, considerando que Gilberto e Guilherme saem juntos do início do trajeto às 9:00h, podemos concluir que o treino se encerrará às:

9h + 1h 48' = **10h e 48 min**

Gabarito: B.

13. (VUNESP/TJM-SP/Escrevente/2017) Em um pequeno mercado, o dono resolveu fazer uma promoção. Para tanto, cada uma das 3 caixas registradoras foi programada para acender uma luz, em intervalos de tempo regulares: na caixa 1, a luz acendia a cada 15 minutos; na caixa 2, a cada 30 minutos; e na caixa 3, a luz acendia a cada 45 minutos. Toda vez que a luz de uma caixa acendia, o cliente que estava nela era

premiado com um desconto de 3% sobre o valor da compra e, quando as 3 luzes acendiam, ao mesmo tempo, esse desconto era de 5%. Se, exatamente às 9 horas de um determinado dia, as luzes das 3 caixas acenderam ao mesmo tempo, então é verdade que o número máximo de premiações de 5% de desconto que esse mercado poderia ter dado aos seus clientes, das 9 horas às 21 horas e 30 minutos daquele dia, seria igual a

a) 8. b) 10. c) 21. d) 27. e) 33.

RESOLUÇÃO:

A questão trata da coincidência do acendimento de luzes em três caixas registradoras de um mercado, conforme o tempo que cada uma foi programada, que a depender da combinação envolvida serão disponibilizados descontos aos clientes.

Daí, a princípio precisamos calcular o **MMC** entre os intervalos de acendimento das luzes de cada caixa:

45, 30, 15	2
45, 15, 15	3
15, 5, 5	3
5, 5, 5	5
1, 1, 1	= $2 \times 3^2 \times 5 =$ **90**

Assim, a cada **90 minutos** ou **1 hora e meia** as lâmpadas dos três caixas se acendem ao mesmo tempo. E, visto que a primeira vez que isso acontece é às 9h e o mercado funciona até às 21h30, temos as seguintes ocorrências da premiação de 5% de desconto:

- 09h00min - 1ª premiação
- 10h30min - 2ª premiação
- 12h00min - 3ª premiação
- 13h30min - 4ª premiação
- 15h00min - 5ª premiação
- 16h30min - 6ª premiação
- 18h00min - 7ª premiação
- 19h30min - 8ª premiação
- 21h00min - 9ª premiação

Desse modo, no período informado as três luzes se acenderam simultanemanente **9 vezes**.

E, por fim, considerando que temos três em funcionamento, o **número máximo de premiações de 5% de desconto** que esse mercado poderia ter dado aos seus clientes foi de 3 x 9 = **27**.

Gabarito: D.

14. (VUNESP/São J dos Campos/Ana Gest Mun/2015) Antônio criou uma senha com dois números inteiros positivos A e B, nessa ordem, ambos com dois dígitos. Para a criação da senha, ele utilizou os seguintes critérios:

- A razão entre o mínimo múltiplo comum de A e B e o máximo divisor comum de A e B é 30;
- O mínimo múltiplo comum de A e B supera o máximo divisor comum de A e B em 145 unidades;
- A é menor que B, e a diferença B – A é mínima.

Conhecidos esses critérios, pode-se concluir corretamente que a soma A + B dos números utilizados por Antônio para a criação dessa senha é igual a

a) 45. b) 55. c) 65. d) 75. e) 85.

RESOLUÇÃO:

Conforme as informações do enunciado, temos:

$$\frac{MMC(A,B)}{MDC(A,B)} = 30 \ \rightarrow MMC(A,B) = 30MDC(A,B) \ \ (\mathbf{I})$$

$$MMC(A,B) = MDC(A,B) + 145 \ \ (\mathbf{II})$$

Agora, vamos substituir (II) em (I):

$$MDC(A,B) + 145 = 30MDC(A,B)$$

$$\boldsymbol{MDC(A,B)} = \frac{145}{29} = \mathbf{5}$$

E, para encontrarmos o MMC entre A e B, substituímos o MDC em (II):

$$\boldsymbol{MMC(A,B)} = 5 + 145 = \mathbf{150}$$

Fatorando este MMC de 150, temos: **2 x 3 x 5 x 5**.

Levando em conta que o MDC é 5, o fator comum na fatoração destes dois números é o próprio número 5. Já o outro 5, o 2 e o 3 vão aparecer na fatoração de apenas um deles, de forma que a diferença entre eles seja **mínima** segundo informação do enunciado. Então, a fatoração deles deve ficar assim:

- **A** = 25 = 5 x 5 = **25**
- **B** = 2 x 3 x 5 = **30**

Assim, garantimos que **B seja maior que A** e que haja uma **mínima diferença** entre os dois números.

Por fim, a soma dos dois números que formam a senha de Antônio fica:

$$\boldsymbol{A + B} = 25 + 30 = \mathbf{55}$$

Gabarito: B.

15. (VUNESP/UNESP/Ass Adm/2016) Sejam x e y dois números naturais tais que MDC(x,105) = 1, o MMC(x,21) = 168 e o MDC (x, y) = 4. Então, sabendo que y é maior que x, porém é menor que o dobro de x, pode-se afirmar que y é igual a

a) 4. b) 8. c) 12. d) 16. e) 20.

RESOLUÇÃO:

Foi dito que o **MMC (x,21) = 168**. Então, ao fazermos a multiplicação entre **x** e **21**, devemos encontrar **168**:

$$x \times 21 = 168$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{168}{21} = \mathbf{8}$$

Perceba que esse resultado respeita a condição de que o **MDC (x, 105) = 1**, pois **8** e **105** são números primos entre si.

Em seguida o enunciado afirma que o **MDC (x, y) = 4**, especificando que **y** é maior que **x**, porém é menor que o dobro de **x**. Logo, o valor de **y** está <u>entre 9 e 15</u>.

Bem, o MDC entre dois números envolve decompô-los e pegar os fatores repetidos de menor expoente. Assim, como o resultado do **MDC entre x e y é 4**, necessariamente na fatoração do número **y** devemos ter **2^2**. Assim, vamos analisar os números que estão no intervalo de interesse:

- **Não** pode ser o 9, porque é 3^2;
- **Não** pode ser o 10, porque fica 2 x 5;
- **Não** pode ser 11, pois é primo;
- **Pode ser o 12**, já que é 2^2 x 3;
- **Não** pode ser 13, visto que é primo;
- **Não** pode ser 14, pois é 2 x 7;
- **Não** pode ser 15, já que é 3 x 5;

Portanto, o número **y** só pode ser **12**.

Gabarito: C.

16. (Vunesp/Sargento/PM-SP/2014) Três equipes, A, B e C, participam de uma competição promovida por um colégio. Uma das tarefas dessas equipes é resolver a seguinte expressão matemática:

$$E = \sqrt{\left(\frac{(-2)^3 + 5^2}{2^{-1}}\right) \times \left(\frac{3^0 \times \sqrt{144}}{6}\right) - 2^2}$$

A equipe vencedora receberá uma pontuação que corresponde ao valor da expressão E elevado ao cubo. O número de pontos que a equipe vencedora receberá será

a) 512. b) 256. c) 128. d) 64.

RESOLUÇÃO:

Precisamos resolver a expressão apresentada e, sem seguida, elevá-la ao cubo, a fim de determinar o número de pontos que a equipe vencedora receberá. Logo:

$$E = \sqrt{\left(\frac{(-2)^3 + 5^2}{2^{-1}}\right) \times \left(\frac{3^0 \times \sqrt{144}}{6}\right) - 2^2}$$

$$\boldsymbol{E} = \sqrt{\left(\frac{-8+25}{\frac{1}{2}}\right) \times \left(\frac{1 \times 12}{6}\right) - 4} = \sqrt{(17 \times 2) \times 2 - 4} = \sqrt{64} = \mathbf{8}$$

Terminamos? Não! O enunciado exige que o resultado da expressão **E** seja **elevado ao cubo**:

$$8^3 = \mathbf{512}$$

Gabarito: A.

Considerações Finais

Finalizamos aqui os assuntos desta aula inaugural. Espero que tenha gostado de nossa primeira aula e que, juntos possamos terminar essa jornada! Será dessa maneira que conduziremos nossas aulas: teoria resumida, muitos esquemas e várias questões.

Neste encontro tivemos diversas questões atualizadas de concursos públicos. Isso faz muita diferença no seu aprendizado e no conhecimento da banca examinadora do seu concurso.

Caso surjam dúvidas não deixe de entrar em contato comigo.

Então é isso! Obrigado e **aguardo você na próxima aula**!

Um forte abraço e bons estudos!

Alex Lira

http://www.facebook.com/alexliraprof
Insta: http://www.instagram.com/professoralexlira
YouTube: youtube.com/professoralexlira

LISTA DE QUESTÕES ESTRATÉGICAS

1. (VUNESP/PM-SP/Soldado/2018) Em uma gaveta há 24 canetas, sendo 1/6 delas verdes, 3/8 vermelhas, e as demais azuis. O número de canetas azuis que há nessa gaveta é

(A) 11. (B) 9. (C) 7. (D) 10. (E) 8.

2. (VUNESP/PM-SP/Soldado/2018) Para participar de uma festa são cobrados um ingresso de R$ 80,00 e um preço fixo de R$ 6,00 por qualquer tipo de latinha de bebida. Se uma pessoa gastou nessa festa, com o ingresso e as bebidas, um total de R$ 134,00, então o número de latinhas de bebida consumidas por ela foi

(A) 10. (B) 8. (C) 6. (D) 9. (E) 7.

3. (VUNESP/ISS São José dos Campos/Auditor Tributário/2018) Em um posto de combustíveis, o preço de um litro de gasolina é R$ 4,50, e o preço de um litro de etanol é R$ 2,70. Se o custo de um litro de uma mistura de determinadas quantidades desses dois combustíveis é R$ 3,24, então o número de litros de etanol necessários para formar 10 litros dessa mistura será igual a

(A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 4. (E) 3.

4. (VUNESP – TJ-SP/Enfermeiro/2019) Saí de casa com uma certa quantia comigo. Gastei metade do que tinha e em seguida dei R$ 3,00 de gorjeta. Continuei e gastei metade do que ainda tinha e novamente dei R$ 3,00 de gorjeta. Além dessas duas vezes, fiz exatamente a mesma coisa outras duas vezes. Ao final estava com R$ 17,00. Sendo assim, havia saído de casa com

(A) R$ 298,00 (B) R$ 344,00 (C) R$ 384,00 (D) R$ 362,00 (E) R$ 280,00

5. (VUNESP/Pref de Barretos – SP/Agente Admin/2018) Em um tanque há 3 torneiras, A, B e C, todas com defeito e que pingam sem parar. A torneira A pinga a cada 20 segundos, a torneira B pinga a cada 35 segundos e a torneira C pinga a cada 15 segundos. Sabendo que as 3 torneiras pingaram juntas às 8 horas e 54 minutos, e que permaneceram assim o dia todo, sem que alguém tivesse mexido nelas, então, o próximo horário em que as 3 torneiras voltarão a pingar juntas será às

A) 8 horas e 58 minutos.

B) 9 horas e 01 minuto.

C) 9 horas e 06 minutos.

D) 9 horas e 12 minutos.

E) 9 horas e 15 minutos.

6. (VUNESP/IPSM/Ana de Gestão Mun/2018) Participarão de um congresso 256 funcionários da empresa A, 416 funcionários da empresa B e 656 funcionários da empresa C. Esses funcionários serão divididos em grupos, de modo que, em cada grupo:

- haja o mesmo número de participantes;
- haja o maior número possível de participantes;
- sejam todos da mesma empresa.

Divididos dessa maneira, o total de grupos obtidos será

A) 48. B) 54. C) 75. D) 83. E) 96.

7. (VUNESP/Pref de Guarulhos/Ag Esc/2016) Um total de 100 crianças, sendo 40 meninos e as demais meninas, será dividido em grupos, todos com o mesmo número total de crianças e compostos por um número mínimo de meninos e um número mínimo de meninas, de modo que cada uma das 100 crianças participe apenas de um grupo. Dessa forma, o número total de grupos que será formado é

a) 4. b) 5. c) 10. d) 20. e) 25.

8. (VUNESP/PM-SP/Soldado/2018) Uma pessoa toma 3 medicamentos diferentes: A, B e C. O medicamento A ela toma a cada 4 horas, o medicamento B, a cada 6 horas, e o medicamento C, a cada 12 horas. Sabendo que às 9 horas do dia 1o de agosto essa pessoa tomou os 3 medicamentos juntos, o próximo dia e horário em que essa pessoa tomará esses 3 medicamentos juntos novamente será em

(A) 1º de agosto, às 12 horas.

(B) 2 de agosto, às 12 horas.

(C) 1º de agosto, às 24 horas.

(D) 2 de agosto, às 09 horas.

(E) 1º de agosto, às 21 horas.

9. (VUNESP/Pref de Suzano/Prof Educ Básica/2015) O máximo divisor comum de 18 e N é 6. Sabendo-se que o mínimo múltiplo comum de 18 e N é 36, é correto afirmar que o produto 18N é igual a

a) 162. b) 180. c) 198. d) 216. e) 234.

10. (VUNESP - ETJ/TJM SP/2011) Ao longo de um dia, um supermercado fez vários anúncios dos produtos A, B e C, todos eles com o mesmo tempo de duração. Os tempos totais de aparição dos produtos A, B e C

foram, respectivamente, iguais a 90s, 108s e 144s. Se a duração de cada anúncio, em segundos, foi a maior possível, então, a soma do número de aparições dos três produtos, nesse dia, foi igual a

a) 14. b) 15. c) 17. d) 18. e) 19.

11. (VUNESP/TJ-SP/Escrevente/2015) Para a montagem de molduras, três barras de alumínio deverão ser cortadas em pedaços de comprimento igual, sendo este o maior possível, de modo que não reste nenhum pedaço nas barras. Se as barras medem 1,5 m, 2,4 m e 3 m, então o número máximo de molduras quadradas que podem ser montadas com os pedaços obtidos é

a) 3 b) 6 c) 4 d) 5 e) 7

12. (VUNESP/UNESP/Ass Adm/2016) Gilberto e Guilherme treinam bicicleta juntos em um circuito de 3240 metros de extensão. Após o aquecimento, saem juntos do início do trajeto às 9:00h e encerram o treinamento após se encontrarem outras seis vezes no início do trajeto. Supondo que durante todo o treinamento, a cada segundo, Gilberto e Guilherme percorrem 6 metros e 9 metros, respectivamente, então é correto afirmar que o treino se encerrará às

a) 11h. b) 10h 48min. c) 10h 32min. d) 10h 25min. e) 10h 04min.

13. (VUNESP/TJM-SP/Escrevente/2017) Em um pequeno mercado, o dono resolveu fazer uma promoção. Para tanto, cada uma das 3 caixas registradoras foi programada para acender uma luz, em intervalos de tempo regulares: na caixa 1, a luz acendia a cada 15 minutos; na caixa 2, a cada 30 minutos; e na caixa 3, a luz acendia a cada 45 minutos. Toda vez que a luz de uma caixa acendia, o cliente que estava nela era premiado com um desconto de 3% sobre o valor da compra e, quando as 3 luzes acendiam, ao mesmo tempo, esse desconto era de 5%. Se, exatamente às 9 horas de um determinado dia, as luzes das 3 caixas acenderam ao mesmo tempo, então é verdade que o número máximo de premiações de 5% de desconto que esse mercado poderia ter dado aos seus clientes, das 9 horas às 21 horas e 30 minutos daquele dia, seria igual a

a) 8. b) 10. c) 21. d) 27. e) 33.

14. (VUNESP/São J dos Campos/Ana Gest Mun/2015) Antônio criou uma senha com dois números inteiros positivos A e B, nessa ordem, ambos com dois dígitos. Para a criação da senha, ele utilizou os seguintes critérios:

- A razão entre o mínimo múltiplo comum de A e B e o máximo divisor comum de A e B é 30;
- O mínimo múltiplo comum de A e B supera o máximo divisor comum de A e B em 145 unidades;
- A é menor que B, e a diferença B – A é mínima.

Conhecidos esses critérios, pode-se concluir corretamente que a soma A + B dos números utilizados por Antônio para a criação dessa senha é igual a

a) 45. b) 55. c) 65. d) 75. e) 85.

15. (VUNESP/UNESP/Ass Adm/2016) Sejam x e y dois números naturais tais que MDC(x,105) = 1, o MMC(x,21) = 168 e o MDC (x, y) = 4. Então, sabendo que y é maior que x, porém é menor que o dobro de x, pode-se afirmar que y é igual a

a) 4. b) 8. c) 12. d) 16. e) 20.

16. (Vunesp/Sargento/PM-SP/2014) Três equipes, A, B e C, participam de uma competição promovida por um colégio. Uma das tarefas dessas equipes é resolver a seguinte expressão matemática:

$$E = \sqrt{\left(\frac{(-2)^3 + 5^2}{2^{-1}}\right) \times \left(\frac{3^0 \times \sqrt{144}}{6}\right) - 2^2}$$

A equipe vencedora receberá uma pontuação que corresponde ao valor da expressão E elevado ao cubo. O número de pontos que a equipe vencedora receberá será

a) 512. b) 256. c) 128. d) 64.

Gabarito

GABARITO

1. A
2. D
3. A
4. D
5. B
6. D
7. D
8. E
9. D
10. E
11. D
12. B
13. D
14. B
15. C
16. A

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.