

Eletrônico



Estratégia
CONCURSOS

Aula

Física p/ ENEM - RETA FINAL 2019 (Com Videoaulas)

Professor: Vinicius Silva

Sumário

1. Introdução	4
1. Conceitos iniciais de Cinemática	5
1.1 Referencial	5
1.2 Tempo	7
1.3 Móvel	8
1.3.1 Ponto material	9
1.3.2 Corpo Extenso	10
1.4 Posição, Variação da posição e Espaço percorrido	11
1.5 Movimento e Repouso	14
1.6 Trajetória	15
2. Velocidade escalar média	17
2.1 Diferença entre velocidade média e velocidade instantânea	20
2.2 Unidades de velocidade	22
1. Movimento Retilíneo e Uniforme	24
3.1 Conceito	24
3.2 Classificação do MRU	27
3.3 Equação Horária do MRU	30
3.4 Gráficos do MRU	35
3.4.1 Gráfico S x t do MRU progressivo	36
3.4.2 Gráfico S x t do MRU retrógrado	38
3.4.3 Gráfico V x t do MRU progressivo	39
3.4.4 Gráfico V x t do MRU retrógrado	41
3.4.5 Propriedade do gráfico V x t do MRU	42
Movimento Retilíneo e Uniformemente Variado – MRUV.	43



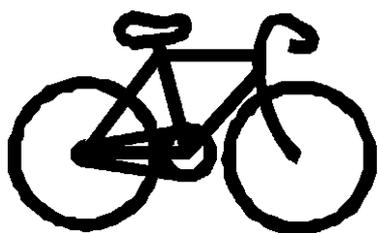
4.1 Conceito.....	44
4.2 Classificação do MRUV.....	51
5. Equação da velocidade.....	53
6. Equação horária do espaço	55
7. Equação de Torricelli.....	60
8. Gráficos	62
8.1 Gráfico do MRUV ($V \times t$).....	62
8.2 Gráfico do MRUV ($S \times t$)	64
8.3 Gráfico MRUV ($a \times t$).	70
Bloco 3 – Cinemática Vetorial	72
1. Cinemática Vetorial	72
2. Grandezas Cinemáticas Vetoriais	72
3. Movimento Relativo	84
4. Velocidade Relativa	86
4.1 Cálculo da velocidade relativa para dois corpos na mesma direção.....	86
4.2. Cálculo da velocidade relativa para velocidades perpendiculares	90
5. Movimentos Circulares	92
5.1 Conceito:.....	92
5.2 Espaço angular	93
5.2.1 Relação entre S e φ	93
5.3 Velocidade angular	94
5.3.1 Relação entre velocidade angular e velocidade linear	95
5.4 Aceleração centrípeta no movimento circular	96
5.5 Movimento Circular e Uniforme (MCU).....	97
5.6 Período	99
5.7 Frequência	100



5.8. Relação entre período e frequência	102
5.9 Relação entre Velocidade Angular e Período.....	102
5.10 Relação entre Velocidade Angular e frequência.	103
5.11 Transmissão de movimentos circulares	105
6. Movimento vertical no vácuo	110
6.1 Queda Livre.....	112
6.1.1 Cálculo do tempo de queda.....	114
6.1.2 Cálculo da velocidade final	115
6.2 Lançamento vertical para cima	116
6.2.1 Cálculo do tempo de subida:	118
6.2.2 Cálculo da altura máxima	122
6.3. Lançamento vertical para baixo:	123
6.4. Lançamento horizontal no vácuo	125
6.4.1 Cálculo do tempo de queda.....	128
6.4.2 Cálculo do alcance horizontal	130
6.5. Lançamento Oblíquo.....	133
6.5.1 A decomposição da velocidade inicial	137
6.5.2 Cálculo do tempo de subida, do tempo de subida e do tempo total	138
6.5.3 Cálculo da altura máxima	140
6.5.4 Cálculo do alcance horizontal	141
6.5.4.1 Alcance máximo	144
EXERCÍCIOS COMENTADOS	148
A) 0,7.....	151
B) 1,4.....	152
C) 1,5.....	152



As bicicletas possuem uma corrente que liga uma coroa dentada dianteira, movimentada pelos pedais, a uma coroa localizada no eixo da roda traseira, como mostra a figura. 157



.....	157
<i>O número de voltas dadas pela roda traseira a cada pedalada depende do tamanho relativo destas coroas.</i>	157
09. (ENEM – 2001)	164
Exercícios da aula	184
09. (ENEM – 2001)	191
12. GABARITO	200

1. INTRODUÇÃO

A mecânica a ser estudada nesse curso é a mecânica newtoniana, ou mecânica clássica, vamos estudar os fenômenos clássicos da mecânica de Isaac Newton, vamos descobrir como os movimentos dos corpos ocorre e como estudar as suas causas e consequências.

Ao final teremos nos blocos de questões duas questões do último ENEM, de 2017, então veja que os conceitos abordados nessa aula serão de suma importância.



Bloco 1:

1. CONCEITOS INICIAIS DE CINEMÁTICA

Vamos iniciar com alguns conceitos básicos de cinemática que serão muito importantes para o entendimento de todo estudo do movimento

Esses conceitos, de agora em diante, serão abordados sempre que necessário, então fique ligado porque vamos utilizá-los durante toda a parte de mecânica dessa obra.

Eles nos ajudarão no embasamento de outros temas e ainda são cobrados em algumas questões simples, questões teóricas sobre o estudo dos movimentos que vivem caindo na prova do ENEM, mas que sempre deixam os candidatos na dúvida.

1.1 REFERENCIAL

Referencial é um **sistema de referência** em relação ao qual são se estuda o movimento dos corpos.



Professor, o conceito parece simples, mas eu nunca entendi aquela célebre frase: "depende do referencial"



Calma Aderbal, não se preocupe que eu vou tentar tirar a sua dúvida, que também pode ser a do nosso colega.

Quando estamos estudando algum fenômeno ou grandeza, a depender do referencial adotado, ou seja, do ponto de referência adotado, esse fenômeno ou grandeza apresenta comportamentos distintos, dizemos que aquilo que está sendo estudado depende do referencial.

Para ficar mais claro, vejamos um exemplo:

Imagine a situação hipotética de uma perseguição policial na qual uma **viatura** que tem seu velocímetro marcando **100km/h** persegue um **veículo suspeito** cujo velocímetro marca **90km/h**.

Nessa situação uma pergunta poderia ser feita: **“Qual a velocidade da viatura policial”?**

A resposta mais coerente seria a célebre frase que o Aderbal perguntara: **“depende do referencial”**.

Se a pergunta for: em relação à **Terra** ou a qualquer observador fixo na **Terra**, a resposta é simples e direta: **$V = 100\text{km/h}$** .

Agora se a pergunta fosse: em relação ao veículo suspeito, a resposta seria um pouco diferente, pois, para o veículo suspeito, a situação se passa como se a viatura se aproximasse apenas com **$100\text{km/h} - 90\text{km/h} = 10\text{km/h}$** , pois os 90km/h que a viatura possui do seu total de 100km/h não influenciam em nada **em relação ao referencial** em movimento do veículo suspeito.

Viu como é fácil entender o que é referencial. Referencial é um sistema de referência em relação ao qual se estuda um movimento.

Outras grandezas da cinemática **além da velocidade** também variam de acordo com o referencial adotado. Vamos ver isso adiante, nos próximos itens.



1.2 TEMPO

Tempo é um conceito muito primitivo, associamos ao tempo uma sucessão de eventos que acontecem.

Não precisamos de muitos comentários por aqui, vamos apenas diferenciar duas coisas bem simples que são o **instante de tempo** e o **intervalo de tempo**.

a) Instante de tempo:

Instante de tempo é um momento no qual aconteceu alguma coisa durante uma sucessão de eventos.

Observe o exemplo abaixo:

Em uma viagem pela rodovia **BR 116** um veículo passou pelo marco do **Km 310** às **10h50min10s** medido no relógio de pulso do motorista.

Podemos afirmar, no exemplo acima que o veículo passou pelo marco **Km 310** no instante **10h50min10s**, pois foi neste momento que aconteceu o evento passagem do veículo pelo marco quilométrico. Simples assim.

b) Intervalo de tempo:

Por outro lado, intervalo de tempo é um pouco diferente de instante de tempo. Toda grandeza física representada por um intervalo é escrita com uma letra grega, o famoso Δ "delta".

Portanto, o intervalo de tempo seria representado no papel da seguinte forma:



Δt

Ocorre que todo intervalo de uma grandeza é a subtração da grandeza final pela grandeza inicial, assim o intervalo de tempo seria:

$$\Delta t = t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}}$$

Podemos concluir que intervalo de tempo é o instante de tempo final subtraído do instante de tempo inicial.

Veja que o Δt é sempre positivo, pois o tempo não para, sempre passa para frente, nunca regressando, logo o tempo final sempre será maior que o tempo inicial de um evento.

1.3 MÓVEL

Móvel é um conceito muito simples, em diversas questões de ENEM a banca pode se referir a esse termo, que nada mais é do que um corpo que pode se movimentar de acordo com os ditames que o problema especificar em seu enunciado.

Um móvel pode ser um **bloco**, um **veículo**, um **helicóptero**, uma **pessoa**, etc.

Os móveis são separados em dois grandes subgrupos, que são os pontos materiais e os corpos extensos.



1.3.1 PONTO MATERIAL

Ponto material é um conceito um pouco mais difícil de entender, mas não se preocupe que vamos tornar a sua vida fácil.

Ponto material é um móvel ou um corpo cujas suas **dimensões não são importantes/relevantes para a análise do problema.**

Um exemplo bem simples: Uma **formiga** caminhando num campo de futebol da magnitude do **maracanã**.

É claro que o tamanho da formiga não será relevante para saber se ela está mais próxima da linha de fundo ou do círculo central do campo.

Já pensou se em cada problema desse você tivesse que responder assim: "a pata da frente da formiga está a uma distância de X metros da trave enquanto que a pata traseira está a uma distância de $X + 0,0000001$ mm. Os problemas seriam realmente impraticáveis.

Outro exemplo bem simples, que veremos em breve nesta obra é a **ultrapassagem de móveis**, esse sim um exemplo muito comum em provas de ENEM.

Quando queremos analisar o tempo que leva para um corpo ultrapassar outro, é interessante que você saiba se estamos lidando com um **corpo extenso** ou com um **ponto material**, pois se estivermos tratando de um ponto material, a ultrapassagem será completada quando um corpo alcançar o outro, não se levando em conta as dimensões de cada um deles na análise do problema.

Veja as figuras abaixo e responda em qual delas temos um ponto material.



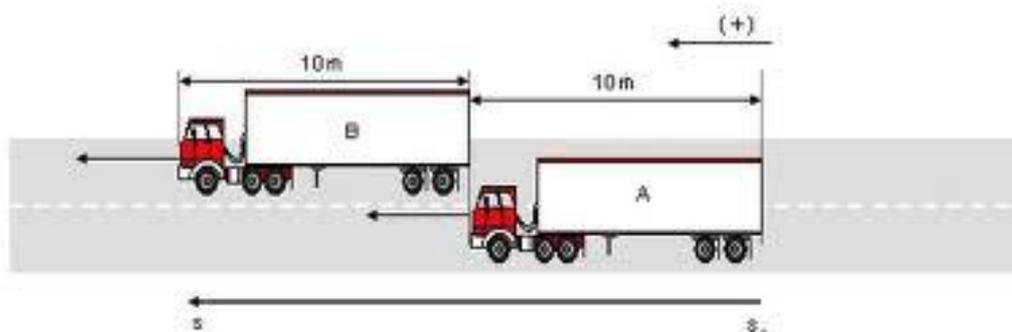


Figura 1

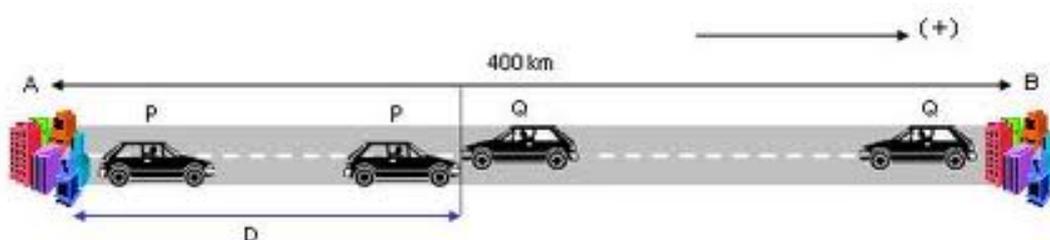


Figura 2

Resposta: É na figura 2 que temos pontos materiais, pois as dimensões dos veículos nem foram citadas na figura, e não devem importar na resolução de problemas envolvendo a cinemática de seus movimentos.

1.3.2 CORPO EXTENSO

Após entender o ponto material, fica muito mais fácil de compreender que o corpo extenso é o oposto. Se um ponto material é um móvel ou corpo cujas dimensões não são relevantes para a resolução dos problemas, o corpo extenso apresenta dimensões consideráveis.



No maracanã, uma formiga tem dimensões irrelevantes e por isso é tratada como ponto material. Por outro lado, um helicóptero pousado sobre o mesmo campo tem dimensões relevantes em um problema de Física.

No último exemplo do tópico anterior, podemos notar que no caso da figura 1 os caminhões são tratados como corpos extensos, pois suas dimensões são relevantes na resolução dos problemas, inclusive a figura apresenta o valor do comprimento do caminhão, informação muito importante para, por exemplo, o cálculo do tempo de ultrapassagem, muito cobrada em provas de ENEM.

1.4 POSIÇÃO, VARIAÇÃO DA POSIÇÃO E ESPAÇO PERCORRIDO

Posição é a medida da distância que um corpo guarda da origem de um referencial, medida ao longo dele. Pode ser **positiva ou negativa**, de acordo com a origem do sistema de referência. Geralmente simbolizada pela letra "**S**"

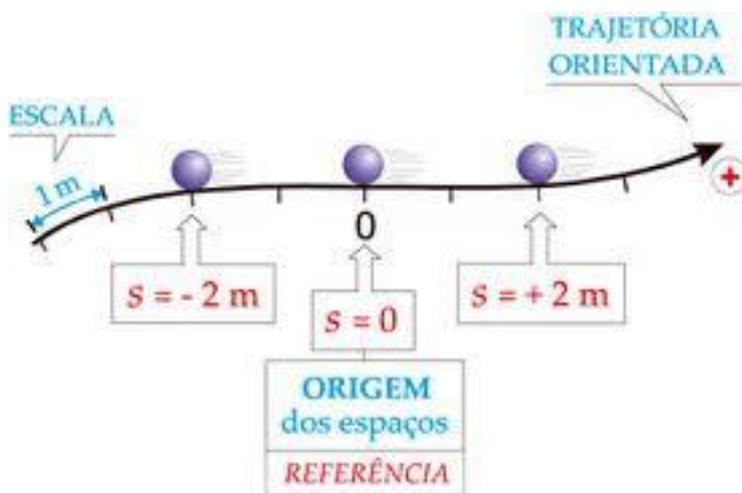


Figura 3

Note, no desenho acima, que uma das posições da bola é **S = +2m**.



Podemos ter ainda posições negativas ou nulas, como no caso do móvel posicionado antes da origem ou sobre ela.

Varição da posição, por sua vez, é o famoso ΔS , que nada mais é do que a **diferença entre a posição final e a posição inicial de um móvel** quando em movimento sobre uma trajetória em um determinado referencial. Observe a figura abaixo:

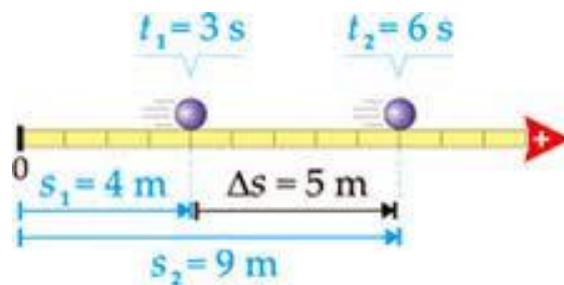


Figura 4

A posição final do corpo é $S_F = 9\text{m}$ enquanto que a posição inicial é $S_0 = 4\text{m}$. Portanto, a variação da posição ou $\Delta S = 9\text{m} - 4\text{m} = 5\text{m}$.

Basta você subtrair as posições.

Note, deste conceito, que podemos ter três situações distintas para o ΔS :

- **Positivo:** Quando a posição final é maior que a inicial. Nesse caso o corpo está se movendo no sentido positivo da trajetória.
- **Negativo:** Quando a posição final é menor que a inicial. Nesse caso o corpo está se movendo no sentido negativo da trajetória.
- **Nulo (zero!):** Quando as posições final e inicial são iguais. Nesse caso o corpo sai e volta para a mesma posição.



Por outro lado, espaço percorrido é o **espaço efetivo** (sem levar em conta se o corpo está a favor ou contra a trajetória, verificando apenas a **distância efetivamente percorrida**) que o corpo percorre quando em movimento em um determinado sistema de referência. Observe a figura abaixo:

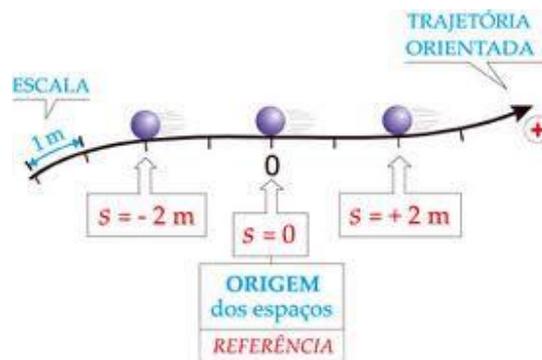


Figura 5

Nela, podemos afirmar que o corpo ao se mover da posição $S_0 = +2\text{m}$ para a posição $S_F = -2\text{m}$, percorreu uma distância efetiva de 4m.

Assim, no cálculo o espaço percorrido ou distância percorrida, **não se levam em conta sinais ou sentidos positivos ou negativos**. Todas as distâncias são consideradas em módulo.

A consequência mais direta é o fato de que a distância percorrida é, se houver movimento em relação a um referencial, sempre positiva.

Veja que se o corpo parte da posição +2m e volta para ela, perfazendo a trajetória acima, ou seja, indo até a posição -2m, o seu ΔS é nulo, pois o corpo saiu e voltou para a mesma posição. No entanto, o espaço percorrido não foi nulo, muito pelo contrário, o espaço percorrido foi de 4m (ida) + 4m (volta) = 8m (total)



1.5 MOVIMENTO E REPOUSO

Esses dois conceitos devem gerar muita confusão na sua cabeça, e agora você vai ver como nunca foi tão fácil entender movimento e repouso.

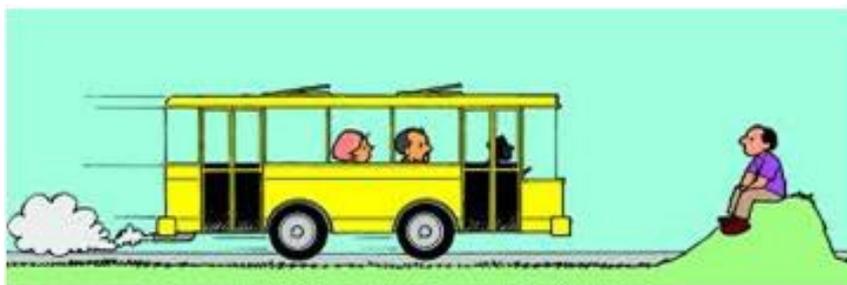
Você deve se lembrar do conceito de **referencial**. Se não lembrar volte algumas páginas para refrescar a memória. Acredito que o conceito de posição você também se lembra, afinal de contas acabamos de ver no item anterior.

Movimento e repouso então são duas situações físicas as quais podemos resumir em dois conceitos bem simples:

- **Movimento:** Um corpo está em movimento em relação a um referencial **R**, se a sua **posição muda** com o passar do tempo, em relação a **R**.
- **Repouso:** Um corpo está em repouso em relação a um referencial **R**, se a sua **posição não muda** com o passar do tempo, em relação a **R**.

Observe que esses dois conceitos dependem do **referencial adotado**.

Fixado o referencial, basta ver se a posição do corpo muda ou se se mantém constante ao longo do tempo.



Na figura acima, podemos fazer algumas observações:

- O ônibus, amarelo, encontra-se em movimento em relação ao observador fixo na Terra, pois sua **posição vai diminuindo em relação ao homem sentado** (fixo na Terra).
- O ônibus encontra-se em repouso em relação a um observador fixo dentro do ônibus, pois a posição do ônibus é sempre a mesma para quem está parado dentro do ônibus.
- O Senhor de camisa roxa encontra-se em repouso em relação à terra, pois sua posição não muda em relação à Terra. Por outro lado o Senhor de camisa roxa encontra-se em movimento em relação ao ônibus, pois a medida que o tempo passa a sua posição muda em relação ao ônibus, ele vai ficando mais próximo do ônibus.
- As duas pessoas que se encontram dentro do ônibus encontram-se em repouso uma em relação a outra, pois suas posições se mantêm as mesmas.
- As pessoas dentro do ônibus encontram-se em movimento em relação à Terra, pois suas posições mudam com o passar do tempo.

Ufa! Viram quantas possibilidades de situações de movimento e repouso podemos ter nessa situação aparentemente simples.

1.6 TRAJETÓRIA

Esse é o último conceito básico que precisamos aprender antes de adentrar nos **cálculos de velocidade média**.

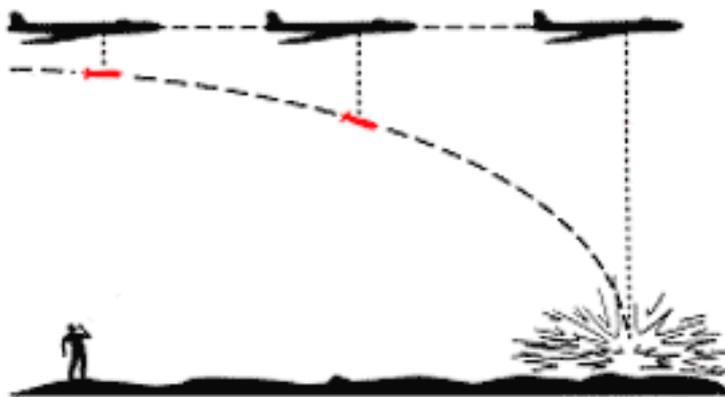


Trajatória é um conceito bem tranquilo. Podemos defini-la como sendo a linha geométrica que o corpo descreve em relação a um referencial quando em movimento em relação a esse referencial.

A trajetória pode assumir o formato de diversas figuras geométricas como, por exemplo, **retas, curvas, elipses, parábolas, etc.**

Note que é mais um conceito que **depende do referencial** adotado, ou seja, a trajetória de um corpo pode ser "**A**" em relação ao **referencial 1**, ao passo que pode ser "**B**" em relação ao **referencial 2**.

Para ficar mais claro vamos a um exemplo:



Na figura acima, um avião deixa cair uma bomba para que exploda na Terra.

Se eu lhe perguntasse qual a trajetória da bomba, qual seria a sua resposta?





Ora professor, eu lhe responderia com outra pergunta: "em relação a quem"?

Exatamente Aderbal, a trajetória é um conceito **relativo**, portanto, precisamos saber o **referencial** para responder à pergunta.

Pois bem, em relação à Terra, qual seria a trajetória da bomba?

Em relação à Terra, é fácil: basta notar que o corpo além da **queda vertical**, sofrerá um movimento na **horizontal**, devido a velocidade do avião, que é compartilhada pela bomba.

Assim, a trajetória será uma **curva parabólica**, em relação à Terra.

Por outro lado, a trajetória da bomba em relação ao piloto do avião ou a qualquer um que esteja dentro dele será uma reta vertical, pois aquele movimento horizontal que a bomba sofre, o avião e todos que estão dentro dele também sofrem, assim não se nota o movimento horizontal da bomba de dentro do avião, apenas o vertical.

Percebeu que a trajetória de um móvel depende do referencial.

2. VELOCIDADE ESCALAR MÉDIA

É a partir daqui que talvez você comece a ter dificuldades e meu papel é fazer as coisas ficarem fáceis para você, afinal de contas a nossa obra procura ser o mais didática possível, de possível.



Velocidade média é um conceito fácil, que você provavelmente já utilizou no seu dia a dia. Imagine a situação abaixo descrita, a qual tem relação direta com o conceito de velocidade média.

“Em uma viagem, você já deve ter feito a seguinte afirmação: se eu mantiver uma velocidade média de X km/h chego ao meu destino em Y horas”.

Você talvez não saiba, mas nessa situação você utilizou o conceito de velocidade média. Veja abaixo o conceito.

“Velocidade média é a variação da posição ocorrida em um referencial por unidade de tempo”.

Matematicamente,

$$V = \frac{\Delta S_{\text{total}}}{\Delta t_{\text{total}}}$$

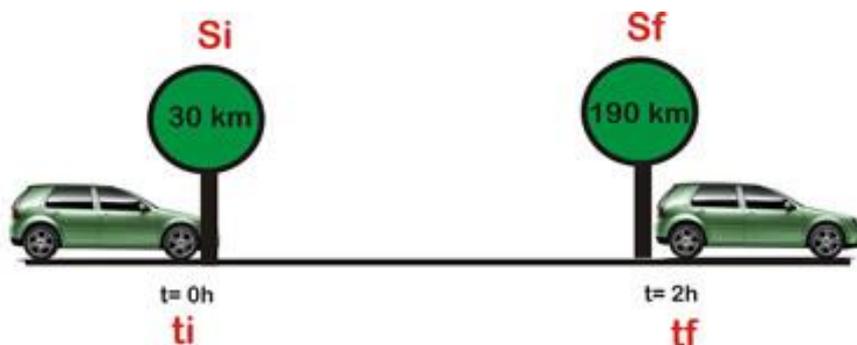
Parece simples, e é simples mesmo.

No exemplo da viagem, o que você fez foi calcular o tempo, e não a velocidade média, mas tudo se passa da mesma forma. Você conhecia a velocidade média e a distância e assim efetuou um cálculo simples para obter o intervalo de tempo que levaria para percorrer a distância em questão.

Portanto, o que devemos fazer para calcular a velocidade média de um corpo é dividir o ΔS_{total} pelo Δt_{total} .

Observe o exemplo prático abaixo:





Qual é a velocidade média do veículo representado na figura acima?

É simples mesmo. Basta calcular o ΔS_{total} e dividi-lo pelo Δt_{total} .

Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \frac{\Delta S_{\text{total}}}{\Delta t_{\text{total}}} \\ \Rightarrow V &= \frac{S_{\text{final}} - S_{\text{inicial}}}{t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}}} \\ \Rightarrow V &= \frac{190\text{km} - 30\text{km}}{2\text{h} - 0\text{h}} \\ \Rightarrow V &= \frac{160\text{km}}{2\text{h}} \\ \Rightarrow V &= 80\text{km/h} \end{aligned}$$

As questões mais difíceis de velocidade média são aquelas em que o percurso é dividido em várias partes, obrigando o aluno a fazer vários cálculos.

Nesse tipo de questão, basta você ir com calma calculando em partes o intervalo de tempo e o ΔS correspondente.



2.1 DIFERENÇA ENTRE VELOCIDADE MÉDIA E VELOCIDADE INSTANTÂNEA

Observe que a velocidade média calculada no último exemplo do item anterior (80km/h) não nos permite afirmar que durante todo o intervalo de tempo de 2h o veículo desenvolveu essa velocidade de modo constante. Provavelmente, em virtude de condições adversas de trânsito o veículo deve ter desenvolvido velocidades menores e por vezes maiores que a velocidade média de 80km/h.

É daí que nasce o conceito de velocidade instantânea.

Velocidade instantânea seria a velocidade que o corpo possui num determinado **instante de tempo**, e você já sabe o que é instante de tempo, é aquele momento considerado em si só.



Professor, onde eu posso observar a velocidade instantânea?

Caro Aderbal, a velocidade instantânea é aquela que aparece no velocímetro do seu carro.

Observe um exemplo que ocorre comigo com frequência:

Moro atualmente em Juazeiro do Norte, no interior do Ceará, região do Cariri. Em minhas viagens com a família para Fortaleza (visitar os pais) geralmente levo **6 horas** para percorrer os **540km** que separam as duas cidades na trajetória da **BR 116**.



20
200



Qual é a velocidade média desenvolvida por min durante uma de minhas viagens de carro para Fortaleza?

Basta aplicar a fórmula vista acima:

$$V = \frac{\Delta S_{\text{total}}}{\Delta t_{\text{total}}}$$
$$\Rightarrow V = \frac{540\text{km}}{6\text{h}}$$
$$\Rightarrow V = 90\text{km/h}$$

Portanto, na média, percorri **90km** a cada **hora**.

Mas vocês acham mesmo que com mulher e filha dentro do carro é possível percorrer a cada hora noventa quilômetros, durante um trajeto de 540km? A resposta é negativa!

Geralmente durante uma viagem longa temos algumas paradas para reabastecimento, alimentação, etc.

Então como é possível desenvolver uma velocidade média de 90km/h?

É simples, basta desenvolver velocidades instantâneas maiores durante o movimento, isso significa que em alguns vários momentos da viagem eu desenvolvi velocidades instantâneas de 100km/h, 120km/h, 140km/h, para compensar os momentos de paradas e de velocidades reduzidas.

Acredito que agora você compreendeu o conceito de velocidade média e sua diferença em relação à velocidade instantânea.



2.2 UNIDADES DE VELOCIDADE

Esse é outro tema muito importante que aparece sempre em provas para fazer você errar, algo que doravante não acontecerá mais.

Existem várias unidades de velocidade e você deve estar atento para a transformação entre elas.

A unidade utilizada pelo Sistema Internacional (SI) é o **m/s (metro por segundo)**.

Essa unidade, no entanto, não é a mais usual. No nosso dia a dia as velocidades são expressas na maioria das vezes em **Km/h**.

A unidade do resultado será dada de acordo com os dados fornecidos na questão. Se em uma questão são fornecidas distâncias em **Km** e tempos em **h**, a resposta será em **Km/h**. Por outro lado, se as distâncias foram expressas em **m** e os tempos em **s**, a velocidade será fornecida em **m/s**.

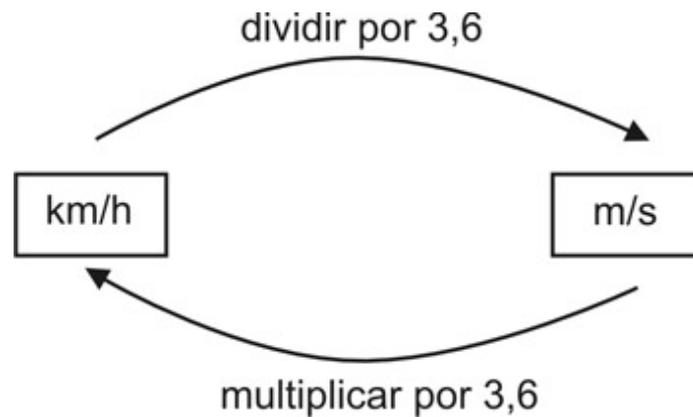


Professor, mas se na questão ele fornecer os dados em uma unidade e pedir a resposta em outra? Como eu faço?

Boa pergunta!



É isso que gera muitos erros. O candidato bem preparado então deve transformar as unidades, e isso é feito de acordo com o quadro abaixo:



Exemplos:

- $36\text{km/h} = 10\text{m/s}$
- $72\text{km/h} = 20\text{m/s}$
- $108\text{km/h} = 30\text{m/s}$
- $54\text{km/h} = 15\text{m/s}$

Eu não recomendaria, a princípio, transformar a distância, depois transformar o tempo e finalmente dividir um pelo outro. Prefira transformar o resultado.

Existem outras unidades menos comuns, mas que poderemos abordar durante as questões.



Bloco II:

1. MOVIMENTO RETILÍNEO E UNIFORME

O movimento retilíneo e uniforme é um dos movimentos que são cobrados em no **ENEM**, para estudá-lo você precisa estar afiado em velocidade média, que foi o assunto que acabamos de tratar.

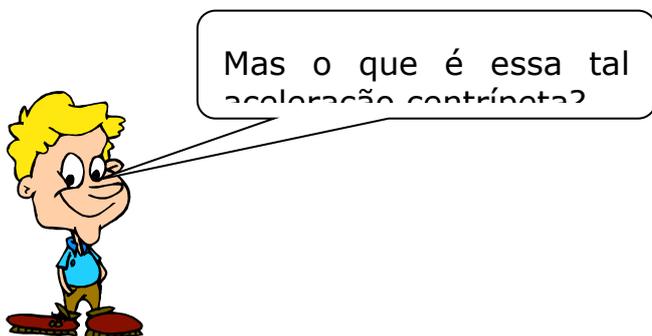
No seu dia a dia, você certamente já se deparou com situações envolvendo veículos em **MRU**.

3.1 CONCEITO

O **Movimento Retilíneo e Uniforme – MRU** é aquele movimento cuja **trajetória é retilínea** e o módulo da **velocidade** se mantém **constante** durante todo o movimento.

Desse conceito podemos tirar duas conclusões:

a) Pelo fato de a trajetória ser retilínea, podemos afirmar que não há curvas no movimento. Assim a **aceleração centrípeta do corpo é nula**.



Esse assunto será abordado nos próximos blocos, mas vale a pena explicar apenas que aceleração centrípeta é uma das **componentes** da aceleração e ela só existe quando a **trajetória é curvilínea** (possui curvas) como não temos curvas, não temos aceleração centrípeta.

b) Pelo fato de a velocidade se manter constante em módulo, então podemos afirmar que o movimento **não terá aceleração tangencial**.



Professor, mas o que é essa tal aceleração tangencial?

A **aceleração tangencial** é a componente da aceleração que aparece em trajetórias retilíneas (retas) ou curvilíneas (possui curvas), mas que tem por função a **modificação do módulo** (valor, intensidade) da velocidade.

Assim, a conclusão a que chegamos é que no **MRU não há** aceleração de **nenhuma natureza**, seja ela tangencial ou centrípeta.

Portanto, o vetor **velocidade** manter-se-á **constante em módulo, direção e sentido**.

Como a velocidade se mantém constante, podemos afirmar também que a **velocidade média é sempre a mesma**, ou seja, a **velocidade média é sempre igual à velocidade instantânea**, que por sua vez é constante também, durante todo o movimento.

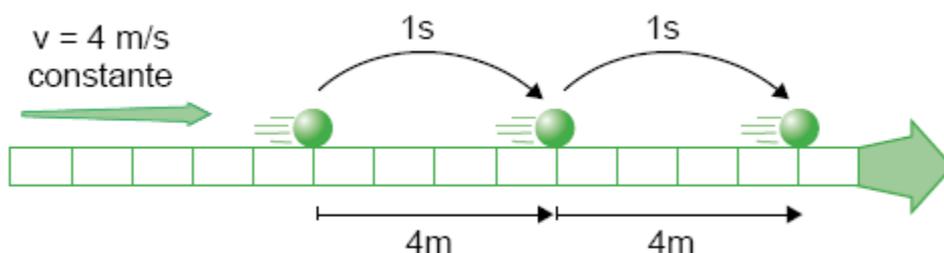
O **MRU** pode ser representado esquematicamente na forma abaixo:





Qualquer que seja o instante de tempo, a velocidade instantânea terá sempre o mesmo módulo, a mesma direção e também o mesmo sentido.

Desse conceito podemos concluir que para **intervalos de tempos iguais**, teremos sempre o mesmo **ΔS ou espaço percorrido** (no caso do MRU não há distinção entre ΔS e espaço percorrido). Veja a representação gráfica abaixo.



Note que para intervalos de tempos iguais a **1s**, temos sempre o mesmo **ΔS** ou espaço percorrido de **4m**.

Essa é uma das principais consequências do **MRU**, e pode ser cobrada em uma questão teórica contextualizada com a prática em qualquer prova, principalmente provas contextualizadas como a do **ENEM**.



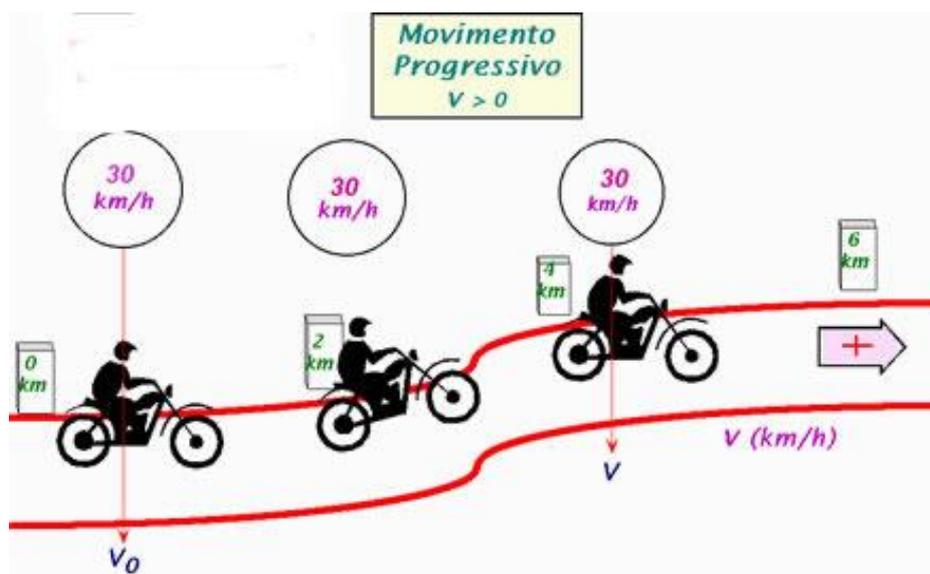
Esses exemplos ilustram bem o conceito do **MRU** que você deve ter em mente no momento da prova, bem como para situar-se nos mais diversos tipos de movimento que serão estudados no decorrer do nosso curso.

3.2 CLASSIFICAÇÃO DO MRU

O **MRU** pode ser classificado de acordo com o sentido do movimento em dois tipos. Veja.

a) Movimento Progressivo:

É o movimento no qual o móvel percorre a trajetória no sentido positivo das posições. Simplificadamente, a favor da trajetória.



Na figura acima podemos afirmar que a velocidade do corpo é sempre a mesma (30 km/h) e também que a motocicleta move-se a favor da trajetória, em movimento progressivo.

Note que no movimento progressivo as posições do corpo aumentam com o tempo, de modo que as posições finais são sempre maiores que as iniciais. (**S_{final} > S_{inicial}**).

Da observação acima podemos chegar à seguinte conclusão:

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$
$$V = \frac{S_{\text{final}} - S_{\text{inicial}}}{\Delta t}, \text{ como } S_{\text{final}} > S_{\text{inicial}} \text{ e } \Delta t > 0 \text{ (sempre)}$$
$$\Rightarrow V > 0$$

Portanto, a conclusão a que chegamos é que em todo movimento progressivo a velocidade é positiva.

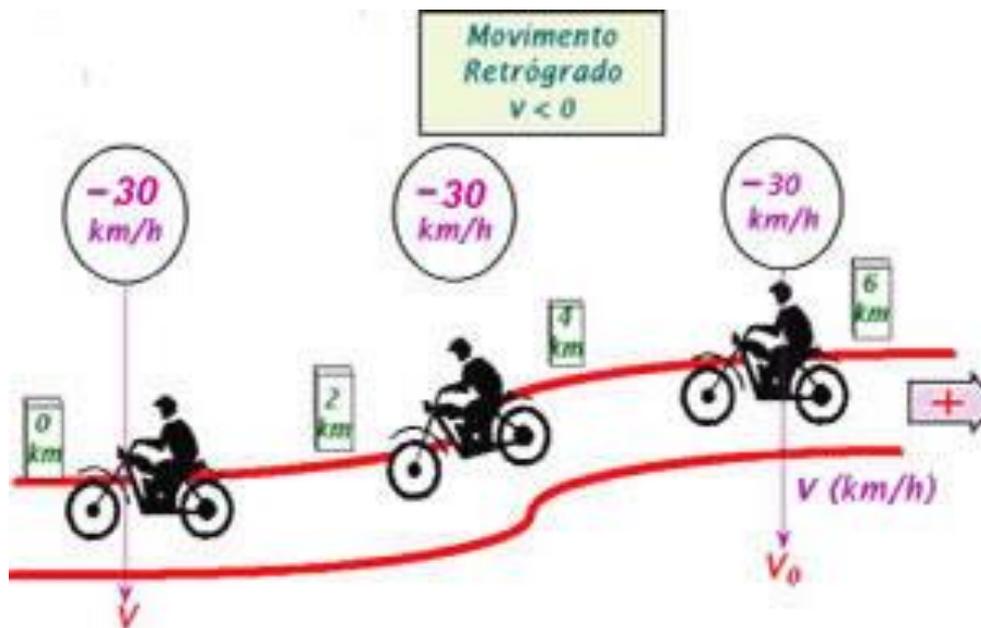
MOVIMENTO PROGRESSIVO $\rightarrow V > 0$

b) Movimento retrógrado:

No movimento retrógrado, os conceitos se invertem.

É o movimento no qual o móvel percorre a trajetória no sentido negativo das posições. Simplificadamente, contra a trajetória.





Na figura acima podemos afirmar que a velocidade do corpo é sempre a mesma (-30km/h) e também que a motocicleta move-se contra a trajetória, em movimento retrógrado.

Note que no movimento retrógrado as posições do corpo diminuem com o tempo, de modo que as posições finais são sempre menores que as iniciais. ($S_{\text{final}} < S_{\text{inicial}}$).

Da observação acima podemos chegar à seguinte conclusão:

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$
$$V = \frac{S_{\text{final}} - S_{\text{inicial}}}{\Delta t}, \text{ como } S_{\text{final}} < S_{\text{inicial}} \text{ e } \Delta t > 0 \text{ (sempre)}$$
$$\Rightarrow V < 0$$

Portanto, a conclusão a que chegamos é que em todo movimento retrógrado a velocidade é negativa.



MOVIMENTO RETRÓGRADO $\rightarrow V < 0$

É fundamental que você, candidato, não confunda a classificação acima estudada com outro conceito que é o de **movimento acelerado** e **retardado**, estes últimos são dois conceitos bem distintos, que serão estudados em um momento posterior de nossa aula, quando estivermos lidando com os movimentos variados.

3.3 EQUAÇÃO HORÁRIA DO MRU

Nesse ponto iremos estudar a equação horária do **MRU**, será através dela que vamos determinar a **posição** de um corpo de acordo com o **tempo**.

Fazendo uso da equação horária ou equação do espaço no **MRU**, poderemos determinar a **posição do móvel em quaisquer instantes de tempo**, para isso bastam ser conhecidas a **velocidade** do corpo (que é constante) e a **posição inicial** dele.

a) Velocidade do corpo (**V**):

Esse conceito é simples, já vimos que a velocidade de um corpo em **MRU** é sempre constante, e essa velocidade é a sua própria velocidade média.

b) Posição inicial (**S₀**):

A posição inicial de um móvel em **MRU** é a posição que o móvel ocupa no início da contagem dos tempos, ou seja, é a posição que o corpo ocupa quando **t₀ = 0**.





Ah professor, esse S_0 é aquele que é sempre igual à zero?

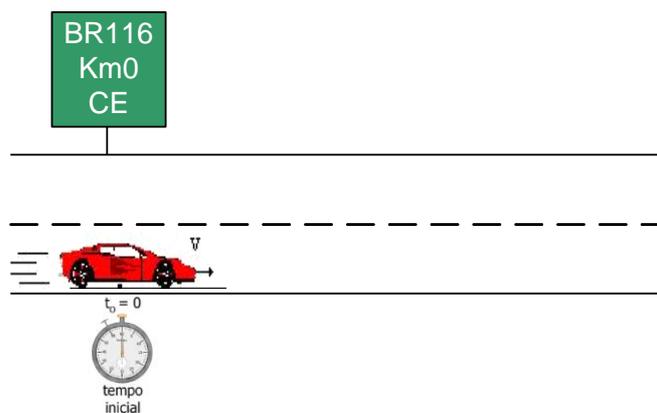
Não Aderbal, cuidado com o S_0 ! A posição inicial não necessariamente é igual à zero, mas pode ser.

Entenda bem, a posição inicial é o lugar que um móvel encontra-se quando o movimento começa a ser estudado, e essa posição pode ou não ser igual a zero.

Observe os exemplos abaixo:

Exemplo:

Um automóvel encontra-se inicialmente no km 0 da BR116 na rotatória da Avenida Aguanambi (que é o marco zero da BR116).

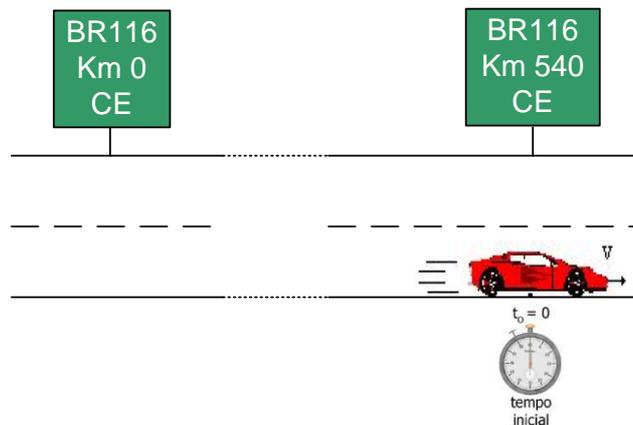


O espaço inicial, caso o movimento do corpo comece a ser estudado quando ele passar pelo km0 será igual à zero, ou seja, **$S_0 = 0$** .



Exemplo:

Por outro lado, caso o movimento do veículo comece a ser estudado quando este se encontrar na cidade de Juazeiro do Norte, no Ceará, então a posição inicial do automóvel não será igual à zero. Veja.

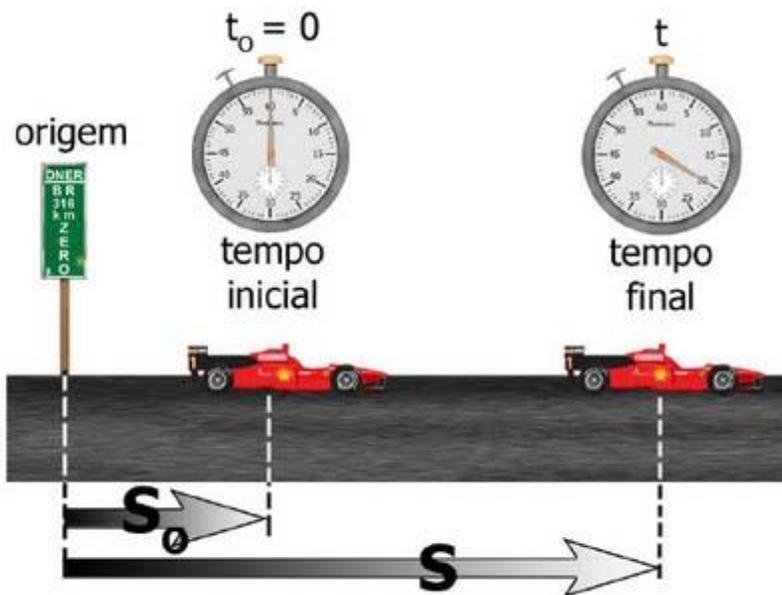


No caso acima o espaço inicial ou a posição inicial do móvel é igual a 540 km, ou seja, **S₀ = 540 km.**

Portanto, não pense que o S₀ será sempre igual a zero!

Vistos esses conceitos de posição inicial e velocidade, vamos à demonstração da equação horária ou equação da posição de um corpo em **MRU.**





Na figura acima o carrinho do Felipe Massa sai da posição S_0 e depois, num instante de tempo t qualquer, movendo-se com velocidade constante V , ele encontra-se numa posição S .

Nossa tarefa é encontrar uma equação que relacione os termos negritos do parágrafo acima.

Então, vamos partir do conceito, que é o fato de a **velocidade ser constante** o tempo inteiro.

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow \Delta S = V \cdot \Delta t$$
$$\Rightarrow S - S_0 = V(t - t_0)$$
$$\Rightarrow S = S_0 + V \cdot (t - t_0), \text{ como na maioria dos movimentos } t_0 = 0$$
$$\Rightarrow S = S_0 + V \cdot t$$



Chegamos assim à famosa fórmula:

$$\Rightarrow S = S_0 + V \cdot t$$

Perceba que essa fórmula irá nos fornecer os valores de **S** (posição) para quaisquer instantes de tempo que você quiser.

Observe alguns exemplos:

S_0	V	$S = S_0 + Vt$
3 m	2 m/s	$S = 3 + 2t$
6 m	-3 m/s	$S = 6 - 3t$
0 m	4 m/s	$S = 4t$

Na equação da primeira linha:

➤ $S = 3 + 2t$

S	T
3 m	0
7 m	2s
23 m	10s

Assim, você pode calcular qualquer **S**, conhecendo o valor de **t**.



Outra aplicação prática da equação horária é o **encontro de móveis e ultrapassagem de corpos**.

Várias questões de prova envolvem esse fenômeno.

Na ultrapassagem de móveis, caso eles sejam **pontos materiais**, ela ocorrerá quando as **posições** de ambos forem **iguais**.

Portanto, nas questões de ultrapassagem, podemos determinar as equações das posições de cada um dos móveis e depois igualamos as equações a fim de encontrar o instante de tempo no qual os corpos se encontram.

Nos exercícios comentados vamos nos deparar com muitas questões desse tipo.

3.4 GRÁFICOS DO MRU

O **MRU** pode ser representado graficamente, aliás, todo movimento pode ser estudado graficamente. Nesse ponto você precisará lembrar alguns conceitos das aulas de matemática, precisamente de funções do 1º grau.

No último ponto da aula chegamos à equação horária ou equação da posição de um móvel quando em **MRU**.

$$\Rightarrow S = S_0 + V \cdot t$$

Essa equação pode ter o seu comportamento estudado por meio de um gráfico no plano xOy , onde nos eixos "x" e "y" estarão postados os valores de "t" e "S" respectivamente.

Assim, substituindo, teremos:



$$\Rightarrow y = S_0 + V \cdot x$$
$$\Rightarrow y = a + b \cdot x$$

Os valores de S_0 e V são constantes e, portanto, podem ser substituídos pelas letras "a" e "b", que representam constantes.

Da última equação, podemos concluir que o gráfico no plano xOy será uma **reta**, pois a função horária passou a ser uma **função do primeiro grau**.

Vamos agora detalhar em cada tipo de movimento o gráfico correspondente.

3.4.1 GRÁFICO S X T DO MRU PROGRESSIVO

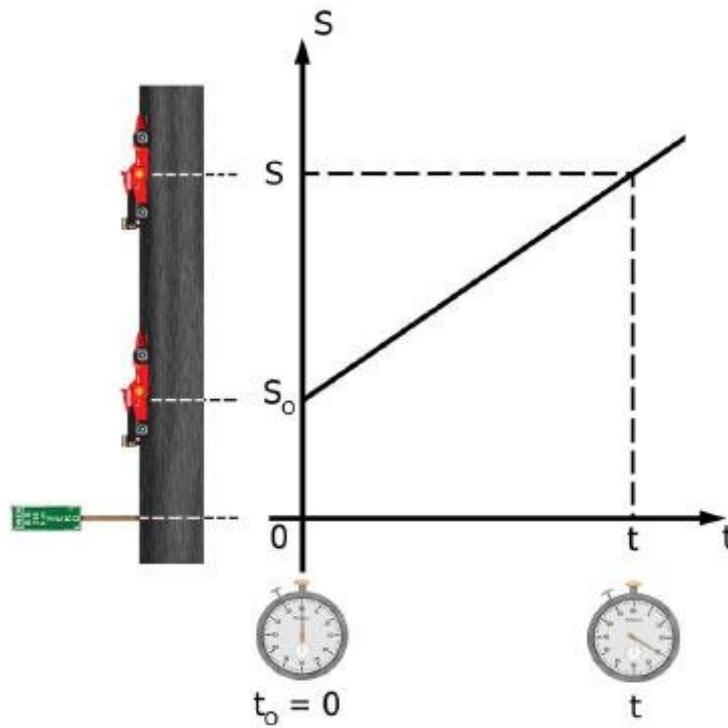
No MRU progressivo, a velocidade é sempre positiva, se você não se lembra desse detalhe, volte algumas páginas, onde foi detalhada toda a classificação do MRU.

Assim, como temos $V > 0$, para qualquer "t", $b > 0$.

$$\Rightarrow y = a + b \cdot x$$

Logo a reta será crescente.

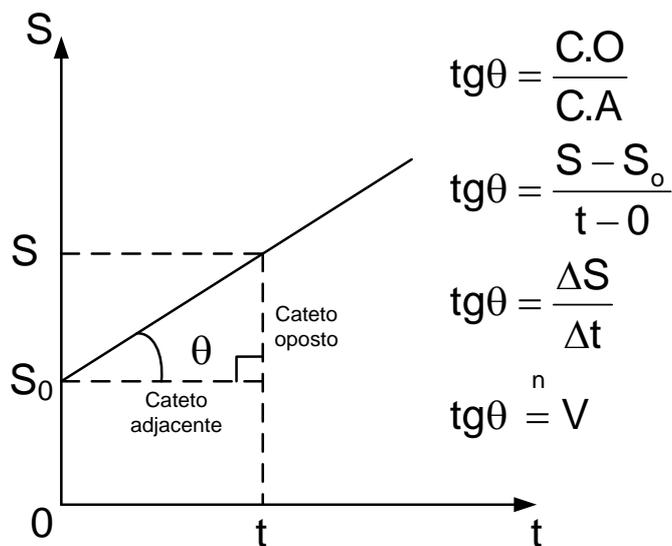




O gráfico acima representa um **MRU progressivo**.

É importante verificar que a inclinação da reta está diretamente ligada à velocidade constante do móvel. Veja.





Portanto, a velocidade constante do móvel em MRU é numericamente igual à tangente do ângulo de inclinação da reta do gráfico (S x t).

Essa propriedade será bastante utilizada nos exercícios e questões de prova.

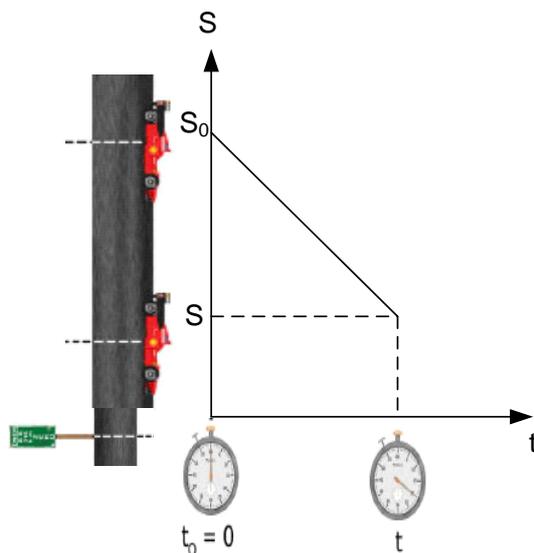
3.4.2 GRÁFICO S X T DO MRU RETRÓGRADO

No caso do **MRU retrógrado**, o móvel percorre a trajetória no sentido contrário ao sentido positivo dos espaços (marcha à ré).

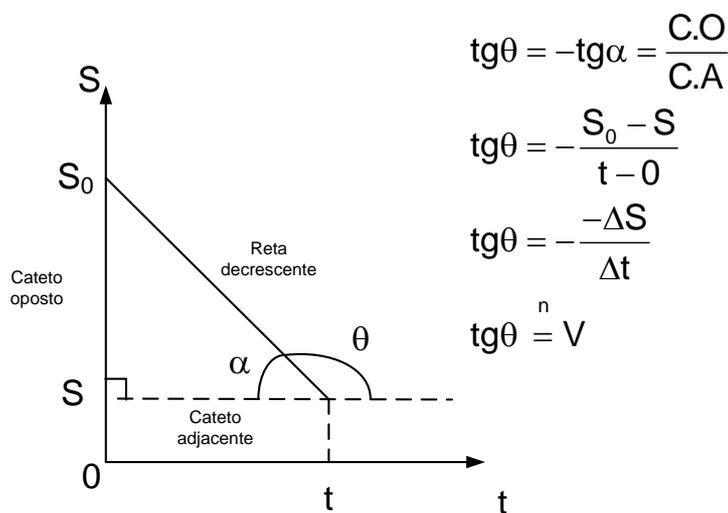
A diferença é que à medida que o tempo passa, os espaços diminuem, pois o móvel está se movendo contra a trajetória.

O gráfico continuará sendo uma reta, só que desta vez será uma reta decrescente. Veja.





Em relação à observação que fiz no gráfico do movimento progressivo, podemos afirmar que a mesma observação também é válida para o caso do movimento retrógrado. Veja.



Assim, fica provado que a propriedade continua válida.

3.4.3 GRÁFICO $V \times T$ DO MRU PROGRESSIVO

Agora vamos estudar o gráfico $V \times t$ do MRU.



Nesse gráfico a análise matemática é bem mais simples, pois a velocidade do móvel é constante.

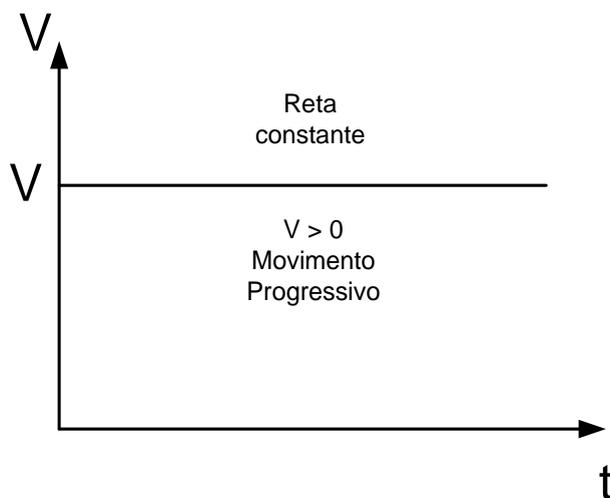
Assim,

$$V = K \text{ (constante)}$$

Mais uma vez vamos postar os valores de t no eixo "x" e o respectivo valor de V constante no eixo "y".

$$V = K \text{ (constante)}$$
$$y = K$$

No gráfico, temos:



Ou seja, não há dificuldades em analisar o gráfico, pois será sempre uma reta constante, paralela ao eixo dos tempos, uma vez que não haverá variação do módulo da velocidade em um **MRU**.



O detalhe que você deve ficar atento é ao fato de que a reta estará posicionada acima do eixo vertical, pois o movimento é do tipo progressivo ($V > 0$).

3.4.4 GRÁFICO $V \times T$ DO MRU RETRÓGRADO

Caro leitor, nesse ponto a única diferença é que no movimento retrógrado a velocidade é negativa.



Professor, por que no movimento progressivo a velocidade é positiva e no retrógrado ela é negativa?

Aderbal, isso foi provado na parte de classificação dos movimentos, mas vou "quebrar seu galho" e lhe dar essa "colher de chá".

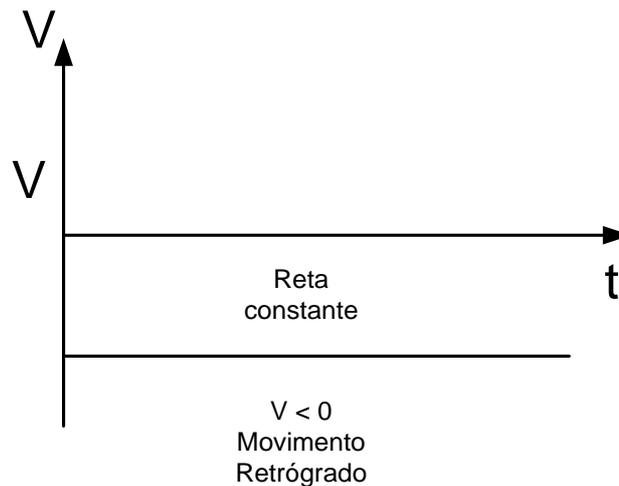
Não se esqueça de que a velocidade está diretamente ligada ao fato de o movimento estar a favor ou contra a trajetória.

- A favor da trajetória: $V > 0$ (progressivo)
- Contra a trajetória: $V < 0$ (retrógrado)



Voltando ao gráfico do **MRU retrógrado**, estávamos falando acerca da velocidade negativa no movimento retrógrado.

Assim, o gráfico tem a seguinte representação:



A reta estará posicionada abaixo do eixo dos tempos, por ter a velocidade sempre valores negativos.

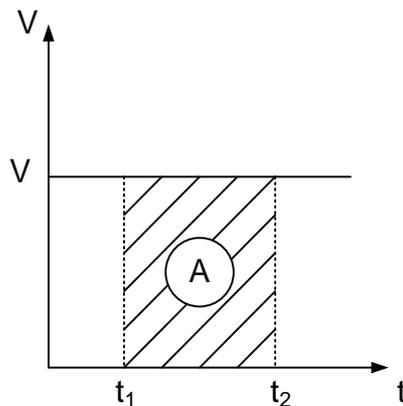
3.4.5 PROPRIEDADE DO GRÁFICO $V \times T$ DO MRU

Para finalizar o assunto de Gráficos do MRU, temos que demonstrar uma propriedade importante que existe no gráfico $V \times t$.

Acima, ficou claro que o gráfico $V \times t$ é uma reta paralela ao eixo dos tempos. Agora vamos verificar uma propriedade importante que será utilizada na resolução de algumas questões.

Vamos calcular a área abaixo do gráfico (lembre-se de que a área será o produto da base pela altura do retângulo).





$$A = b \times h$$

$$A = (t_2 - t_1) \times V$$

$$A = \Delta t \times V$$

$$A = \Delta S$$

Portanto, podemos afirmar que no **gráfico V x t** do **MRU** a área sob o gráfico é numericamente igual ao ΔS .

$$A = \Delta S$$

MOVIMENTO RETILÍNEO E UNIFORMEMENTE VARIADO – MRUV.

Como já foi dito anteriormente o **MRUV** é um movimento muito importante, ele está envolvido em frenagens e acelerações, de modo que a **velocidade será sempre variável**, é muito comum a análise de cenas de acidentes de trânsito no qual um perito, por exemplo, faz uma estimativa de velocidade do veículo a partir da marca de frenagem na pista, e você vai aprender a fazer isso nas próximas páginas.



Professor, então se o movimento tiver velocidade variável então ele é um MRUV?

Cuidado Aderbal!



Nem todo movimento que possui velocidade variável será um **MRUV**, mas todo **MRUV** possui velocidade variável.



Professor, isso tá parecendo raciocínio lógico.

Pois é Aderbal, parece mesmo, mas para você entender bem essa história de velocidade variável, você precisa é conhecer o conceito de **MRUV**. Vamos ao conceito.

4.1 CONCEITO

O MRUV tem como conceito o seguinte: "É aquele movimento que possui **trajetória retilínea** e **aceleração constante**".

Veja que o próprio nome já te dá uma dica:

M → **Movimento**

R → **Retilíneo** → **trajetória é uma reta**

U → **Uniformemente** → **variação uniforme**

V → **Variado** → **velocidade variável**

Vamos por partes:



a) Trajetória retilínea: isso significa que a trajetória é uma reta, fato simples de se entender pela própria etimologia da palavra. Isso vai gerar uma consequência já vista anteriormente, que é o fato de a **aceleração centrípeta ser nula**.



Professor, essa tal aceleração centrípeta é aquela responsável pela mudança na direção do movimento?

Exatamente Aderbal!

É bem previsível que se a trajetória é retilínea, então não pode haver a aceleração centrípeta, uma vez que esta é responsável pela mudança na direção do movimento e a direção será sempre a mesma (reta).

b) Aceleração constante: A aceleração é um conceito que você precisa conhecer antes de prosseguirmos no conceito.

***Aceleração**

A aceleração trabalhada neste ponto é a **aceleração tangencial**, ou seja, tangente à trajetória e tem a função de **modificar o módulo da velocidade**.

Assim, a **aceleração é a grandeza cinemática responsável pela medida do aumento ou redução no valor da velocidade do móvel, de acordo com o tempo**.

Podemos resumir o conceito de aceleração como a grandeza física que nos indica o ritmo com que a velocidade escalar de um móvel varia (aumentando ou diminuindo).



A aceleração escalar média corresponde à aceleração escalar que o móvel poderia ter mantido constante num certo intervalo de tempo.



Professor, e como eu calculo essa aceleração tangencial que vamos trabalhar no MRUV?

Boa pergunta Aderbal!

Para calcular essa aceleração é muito simples, basta memorizar a fórmula abaixo:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

É bem previsível a fórmula acima, basta você lembrar-se do conceito de aceleração, que é a grandeza responsável pela medida da variação da velocidade, a fórmula então traduz a variação da velocidade no intervalo de tempo correspondente.

A aceleração é, portanto, a medida da taxa de variação da velocidade no tempo.

No Sistema Internacional (SI), a unidade para a aceleração escalar média é o metro por segundo por segundo (m/s/s), que abreviamos por m/s^2 . Outras unidades podem ser utilizadas, tais como cm/s^2 e km/h^2 .

Visto o conceito de aceleração, vamos a alguns exemplos para fixar a ideia de aceleração:



Exemplo (VINÍCIUS SILVA): Um automóvel trafega na BR116 e é observado por um radar móvel quando passa pelo KM25, às 08:00, na cidade de Horizonte, com uma velocidade de 15m/s. Ao passar pelo KM145, às 09:30, sua velocidade foi verificada pelo radar fixo do posto policial, que registrou o valor de 162km/h. Qual foi a aceleração média do veículo no seu trajeto de Horizonte até Russas?

Questão simples, mas que está rodeada de detalhes que devem ser bem explicados.

Primeiramente veja que o enunciado solicitou o cálculo da aceleração média, que é a aceleração suposta constante em todo o intervalo de tempo, o conceito aqui é semelhante ao de velocidade média. Vamos ao cálculo, depois voltamos a explicar essa história de aceleração média.

Partindo da fórmula que foi colocada, temos:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Precisamos encontrar a variação da velocidade que é a subtração da velocidade final da inicial, assim:

$$\Delta V = V_{FINAL} - V_{INICIAL} = \frac{162}{3,6} m/s - 15m/s = 30m/s$$

Observe que a velocidade em km/h foi transformada para m/s, de acordo com o que já foi explicado nesse capítulo.

Logo, a velocidade aumentou 30m/s durante o trajeto do veículo.



A variação do tempo é simples também, basta subtrair os instantes de tempo final do inicial. Vejamos.

$$\Delta V = t_{FINAL} - t_{INICIAL} = 09:30 - 08:00 = 1:30 = 90 \text{ min} = 90 \times 60 = 5400 \text{ s}$$

Para obtermos a aceleração, basta aplicar a fórmula:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{30 \text{ m/s}}{5400 \text{ s}} = 0,0056 \text{ m/s}^2$$

Ou seja, a velocidade aumentou em média, 0,0056m/s a cada segundo que se passou. O valor acima foi pequeno por conta do intervalo de tempo, geralmente as acelerações são calculadas em curtos intervalos de tempo da ordem dos segundos.

Exemplo (VINÍCIUS SILVA): O condutor de um automóvel de passeio envolvido em um acidente relatou ao Policial Rodoviário de plantão que trafegava com uma velocidade de 72km/h no momento em que avistou o caminhão parado na pista e freou bruscamente, contudo o espaço entre os veículos não foi suficiente para evitar o acidente, pois o automóvel ao colidir estava a uma velocidade de 10m/s. Considerando que o tempo decorrido desde a pisada no freio e a colisão foi de 5s, calcule a aceleração do veículo, suposta constante.

Trata-se de mais um bom exemplo de aceleração em movimentos variados, nesse problema vamos continuar aplicando a fórmula da aceleração.

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Vamos calcular a variação da velocidade, uma vez que a variação do tempo foi fornecida quase que diretamente (5s).



$$\Delta V = V_{FINAL} - V_{INICIAL} = 10m/s - \frac{72}{3,6}m/s = -10m/s$$

Mais uma vez, tivemos de transformar uma das velocidades dadas em km/h em m/s.

Portanto a aceleração será dada por:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{-10m/s}{5s} = -2m/s^2$$

O significado dessa aceleração é que a velocidade do corpo diminuiu (sinal negativo) 2m/s a cada segundo que passou.

Bom, esses dois exemplos ilustram bem a ideia de aceleração e o cálculo básico do seu valor.

Assim, podemos concluir o seguinte:

- Se $a > 0 \rightarrow V$ aumenta
- Se $a < 0 \rightarrow V$ diminui

Agora vamos voltar ao item "b" do conceito de **MRUV**.

Estávamos afirmando que o MRUV é um movimento cuja aceleração é constante.

Portanto, a variação da velocidade em um **MRUV** pode ser considerada constante com o tempo, ou seja, a velocidade aumenta ou diminui de maneira uniforme.





Professor, é por isso
que o MRUV é
**uniformemente
variado?**

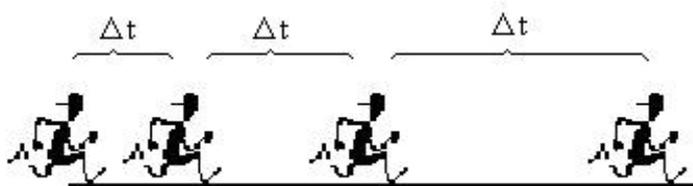
Exatamente Aderbal!

O **MRUV** tem esse nome porque a velocidade varia de maneira uniforme e isso quer dizer que a aceleração é constante. Essa ideia tem que ficar bem sedimentada na sua cabeça.

Lembre-se de que no **MRU**, para tempo iguais tínhamos espaços iguais percorridos pelo móvel. No **MRUV** as coisas mudam um pouco e os espaços podem aumentar ou diminuir com o tempo.

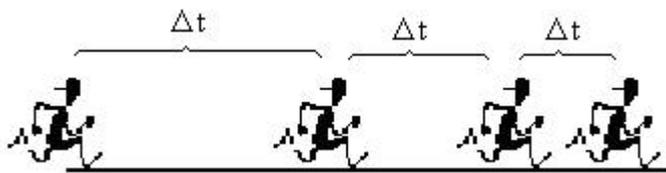
No esquema abaixo você verifica que no MRUV os espaços podem diminuir ou aumentar de acordo com a situação apresentada.

- Quando V aumenta \Rightarrow espaços maiores no mesmo intervalo de tempo.
- Quando V diminui \Rightarrow espaços menores no mesmo intervalo de tempo.



Nesse caso como a pessoa **AUMENTA** o seu deslocamento no mesmo intervalo de tempo então a **velocidade da pessoa aumenta**.





Nesse caso a pessoa em MRUV **DIMINUI** o seu deslocamento no mesmo intervalo de tempo, então a **velocidade da pessoa diminui**.

4.2 CLASSIFICAÇÃO DO MRUV

Na classificação do MRUV vamos ter que levar em conta 2 parâmetros para classificá-lo. Vamos analisar a **VELOCIDADE** e a **ACELERAÇÃO**, já que no MRUV $a \neq 0$. De acordo com essas duas grandezas, podemos ter um movimento **ACELERADO** ou **RETARDADO**, observe os passos que devemos acompanhar para uma boa classificação:

- 1º Passo: Analisar a velocidade do movimento, se positiva (a favor da trajetória) ou negativa (contra a trajetória).
- 2º Passo: Analisar a aceleração do movimento, se positiva ou negativa.

- 3º Passo:

{ Se **V** e **a** tem o mesmo sinal \Rightarrow movimento **acelerado**

Se **V** e **a** tem sinais contrários \Rightarrow movimento **retardado**





Professor, então pode ser que eu tenha um movimento com $a < 0$ e mesmo assim pode ser um movimento acelerado? Como é essa

Exatamente Aderbal!

Pode ser que tenhamos um movimento com aceleração negativa e mesmo assim ele pode ser acelerado, pois de acordo com o que foi exposto acima, um **movimento acelerado** não é aquele que tem aceleração positiva, e sim aquele que possui **velocidade** e **aceleração** com o **mesmo sinal**.

É muito importante que seja entendido esse conceito de classificação, pois é muito comum bons alunos escorregarem nesta casca de banana e acharem que por ter aceleração positiva o movimento necessariamente deve ser acelerado.

Podemos montar a seguinte tabela:

VELOCIDADE	ACELERAÇÃO	MOVIMENTO
POSITIVA (+)	POSITIVA (+)	ACELERADO E PROGRESIVO
NEGATIVA (-)	NEGATIVA (-)	ACELERADO E RETRÓGRADO
POSITIVA (+)	NEGATIVA (-)	RETARDADO E PROGRESSIVO
NEGATIVA (-)	POSITIVA (+)	RETARDADO E RETRÓGRADO

A conclusão é:



- Movimento **acelerado**: **|V| aumenta** com o tempo.
- Movimento **retardado**: **|V| diminui** com o tempo.

5. EQUAÇÃO DA VELOCIDADE

Neste item vamos aprender a equação da velocidade, demonstrá-la a partir do conceito de **MRUV**.



Professor, por que temos uma equação da velocidade para o MRUV e para o MRU não?

Ótima pergunta Aderbal!

É simples, o motivo: no **MRU** a velocidade é constante, não precisa de equação para estudar o seu comportamento com o tempo. Por outro lado, no **MRUV** a velocidade é variável, cabendo uma equação para estudar a sua variação de acordo com o tempo.

Vamos partir do conceito de aceleração constante. Se a aceleração é constante, então a aceleração média também é constante, assim:



$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$
$$\Delta V = a.\Delta t$$
$$V - V_0 = a.(t - t_0),$$
$$V = V_0 + a.t, \text{ para } t_0 = 0$$

Chegamos à equação da velocidade de um **MRUV**.

$$V = V_0 + a.t$$

Essa equação é muito parecida com a equação da posição de um **MRU** a diferença é que no **MRUV**, quem é constante é a **aceleração** e não a **velocidade**, portanto, partimos de dois conceitos diferentes para chegar à equação.

De posse dessa fórmula, podemos encontrar a velocidade do corpo qualquer que seja o instante de tempo.

Observe os exemplos abaixo:

V_0	a	Equação $V = V_0 + a.t$
2 m/s	3 m/s ²	$V = 2 + 3.t$ (SI)
5 m/s	-2 m/s ²	$V = 5 - 2.t$ (SI)
-3 m/s	-4 m/s ²	$V = -3 - 4.t$ (SI)
0	-2 m/s ²	$V = -2.t$ (SI)



0	1,0 m/s ²	$V = 1,0.t$ (SI)
---	----------------------	------------------

Vamos tomar as duas primeiras equações e calcular alguns valores para a velocidade, dado o tempo.

Equação $V = V_0 + a.t$	T	V
$V = 2 + 3.t$ (SI)	1s	5m/s
$V = 2 + 3.t$ (SI)	4s	14m/s
$V = 5 - 2.t$ (SI)	2s	1m/s
$V = 5 - 2.t$ (SI)	10s	-15m/s

6. EQUAÇÃO HORÁRIA DO ESPAÇO

A equação horária do espaço é a equação que relacionará as posições de acordo com o tempo.

Existem diversas formas de se demonstrar a equação do espaço para um móvel que executa um **MRUV**, vamos utilizar uma propriedade gráfica vista nas páginas anteriores, que serve para todo tipo de gráfico, você entenderá melhor no item em que explicaremos o gráfico da velocidade em função do tempo.

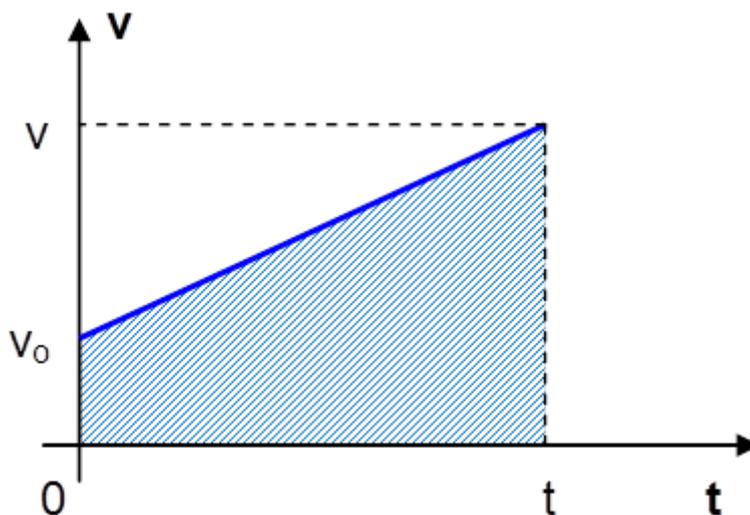
O gráfico da velocidade em função do tempo será obtido mediante a equação da velocidade vista no item anterior.

$$V = V_0 + a.t$$



Na equação acima, caso postássemos os valores de \mathbf{V} no eixo \mathbf{y} e de \mathbf{t} no eixo \mathbf{x} , teríamos uma reta inclinada de acordo com o sinal da aceleração, que neste caso é o coeficiente angular da reta. (os detalhes gráficos serão explicados no item correspondente, não se preocupe em entender o gráfico nesse momento, apenas aceite).

Assim, o gráfico será uma reta da seguinte forma:



A propriedade do gráfico de que vamos precisar é a área sob o gráfico, numericamente igual à variação do espaço, ou seja, $\Delta\mathbf{S} = \mathbf{Área}$.



$$A = \frac{(B+b)}{2} \cdot h$$
$$\Rightarrow \Delta S = \frac{(V+V_0)}{2} \cdot t, \text{ como } V = V_0 + a \cdot t$$
$$\Rightarrow \Delta S = \frac{(V_0 + a \cdot t + V_0)}{2} \cdot t$$
$$\Rightarrow S - S_0 = V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$
$$\Rightarrow S = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

Utilizamos a área do trapézio e chegamos a equação horária da posição.

Essa equação relaciona a posição (espaço) e o tempo para um móvel que executa um MRUV. Observe que se trata de uma equação do 2º grau em **t**.

Caso tenhamos a equação podemos também retirar dela dados importantes acerca do movimento, observe a tabela abaixo onde constam alguns exemplos de equações horárias:

S_0	V_0	a	Equação
1 m	3 m/s	4 m/s ²	$S = 1 + 3t + 2t^2$ (SI)
0	7 m/s	8 m/s ²	$S = 7t + 4t^2$
0	3 m/s ²	-2 m/s ²	$S = 3t - t^2$
0	0	6 m/s ²	$S = 3t^2$
5 m	0	-12 m/s ²	$S = 5 - 6t^2$



Note que o número que **acompanha o termo "t"** é igual à **velocidade inicial V_0** , já o número que acompanha o **termo t^2** é igual a **$a/2$** (metade da aceleração) e o **termo independente** é igual à posição inicial **S_0** .

Exemplo: Um automóvel trafega em MRUV segundo a função horária

$S = 12 - 8t + 4.t^2$, no S.I. Determine:

- a) a sua posição inicial, a sua velocidade inicial e a sua aceleração;
- b) a função horária da velocidade;
- c) o instante em que o móvel inverte o sentido do movimento;
- d) qual a sua posição no instante 10s;
- e) classifique o movimento para o instante $t = 3s$.

Vamos lá!

a) Facilmente identificamos **S_0** (termo independente), **V_0** (termo que acompanha t) e **a** (dobro do termo que acompanha t^2).

$S_0 = 12m$; $V_0 = -8m/s$; $a = 8m/s^2$.

b) Para obter a equação da velocidade, basta aplicar na fórmula já vista $V = V_0 + a.t$, assim:

$$V = -8 + 8.t.$$

c) para saber o instante em que o móvel, inverte o sentido do movimento, basta raciocinar: o móvel inverte o sentido do movimento a partir do momento em que ele para, atingindo assim velocidade nula. A pergunta pode ser refeita da seguinte forma: "em que instante a velocidade é nula"?



Para saber em que **t**, a **V** é nula, basta igualar a equação da velocidade a zero.

Assim,

$$V = -8 + 8.t. \Rightarrow 0 = -8 + 8.t \Rightarrow 8.t = 8 \Rightarrow t = 1s.$$

d) Para saber a posição do corpo basta substituir o tempo $t = 10s$ na equação da posição fornecida.

Assim,

$$S = 12 - 8t + 4.t^2 \Rightarrow S = 12 - 8.10 + 4.10^2 = 332m.$$

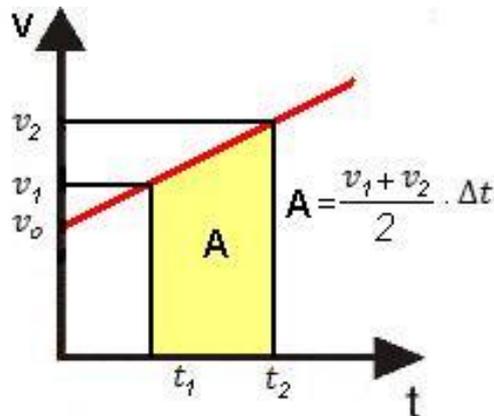
e) para $t = 3s \Rightarrow V = -8 + 8.3 = 16m/s$ (positiva). Como a aceleração é também positiva temos as duas grandezas positivas. Portanto o movimento é acelerado no instante $t = 3s$.

Com esse exemplo nós concluímos a equação da horária da posição no **MRUV**.

***Observação Importante**

Para concluir esse ponto, preciso ainda lhe mostrar uma observação importante acerca da velocidade média em um **MRUV**.





Observando o gráfico acima, podemos fazer a adaptação abaixo:

$$A = \Delta S = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow V_{MÉDIA} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Portando, a velocidade média em um **MRUV** é igual à média das velocidades final e inicial em um intervalo de tempo.

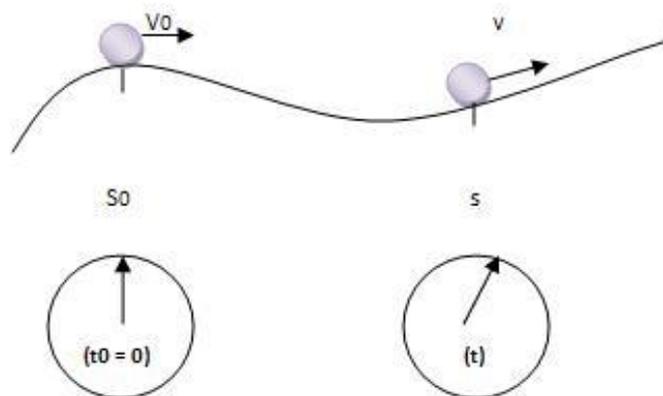
Cuidado com a propriedade acima, pois é válida somente para o **MRUV**.

7. EQUAÇÃO DE TORRICELLI

A equação de Torricelli estabelece uma relação direta entre velocidades, aceleração e variação da posição (ΔS) de um móvel que executa um **MRUV**, note que **não há** a variável **tempo nessa equação**, veja a demonstração abaixo:

É muito comum a utilização da equação de Torricelli em **frenagens** e **acelerações** sem o conhecimento do tempo, mas apenas da variação do espaço.





Tomemos as duas equações que foram demonstradas anteriormente:

1. $V = V_0 + a.t$
2. $S = S_0 + V_0.t + at^2/2$

Isolemos o tempo na primeira equação obtendo: $t = (V - V_0)/a$. Substituímos na segunda equação:

$$\begin{aligned} S - S_0 &= V_0 \frac{(V - V_0)}{a} + \frac{a}{2} \left[\frac{(V - V_0)}{a} \right]^2 \\ \Rightarrow \Delta S &= \frac{V_0 V}{a} - \frac{V_0 V_0}{a} + \frac{a}{2} \left[\frac{V^2 - 2V V_0 + V_0^2}{a^2} \right] \\ \Rightarrow \Delta S &= \frac{V_0 V}{a} - \frac{V_0 V_0}{a} + \frac{V^2}{2a} - \frac{V_0 V}{a} + \frac{V_0^2}{2a} \\ \Rightarrow \Delta S &= \frac{(V^2 - V_0^2)}{2a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$$



OBSERVAÇÃO: O sinal da aceleração deve ser levado em consideração na equação acima, ou seja, quando o movimento tiver aceleração negativa o termo $2a\Delta S$ deve ser acompanhado de um sinal negativo.

8. GRÁFICOS

Os gráficos que vamos aprender sobre **MRUV** serão em número de 3.

Vamos aprender o gráfico de **V x t**, no qual observaremos o comportamento da velocidade com o tempo.

O gráfico **S x t** também será estudado, aprenderemos nesse ponto como a posição do corpo varia com o tempo.

Finalmente, vamos aprender o gráfico de **a x t**, no qual vamos estudar a aceleração de acordo com o tempo.

8.1 GRÁFICO DO MRUV (V x T)

Sabemos que a equação que rege a variação da velocidade com o tempo no **MRUV** é a seguinte:

$$V = V_0 + a.t$$

Logo, temos uma equação do primeiro grau (função do primeiro grau) que, quando disposta em um gráfico de eixos ortogonais, resulta em uma reta.

A inclinação da reta será dada pelo valor de "a" que é o seu **coeficiente angular**, V_0 é o seu **coeficiente linear**, o valor onde a reta intercepta o eixo Y.



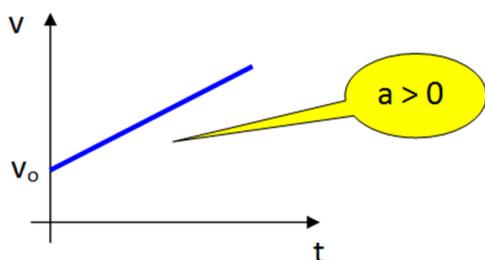


Gráfico I

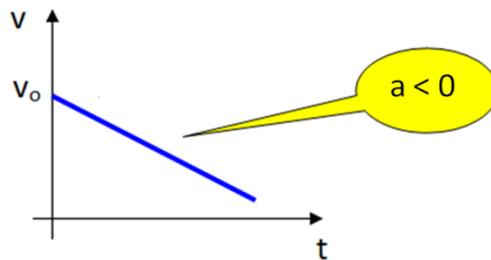
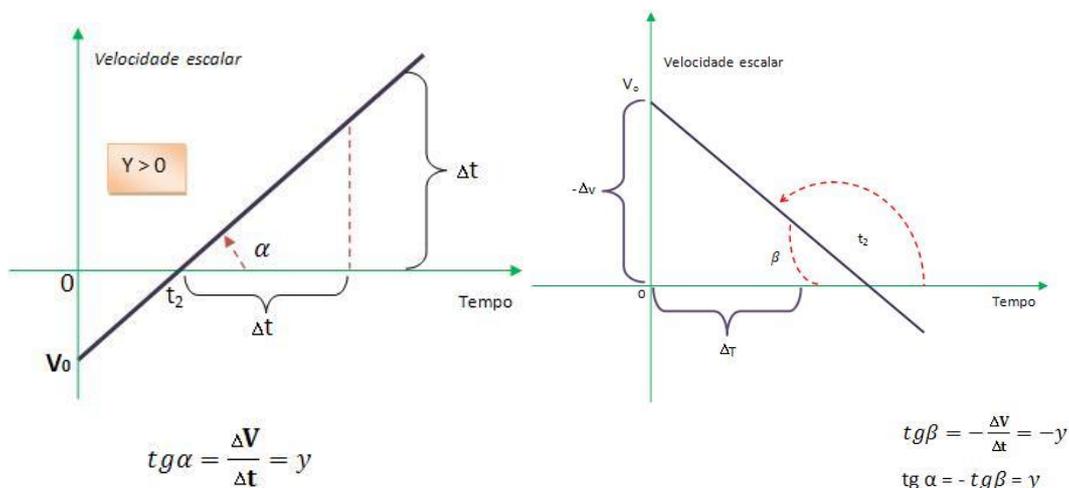


Gráfico II

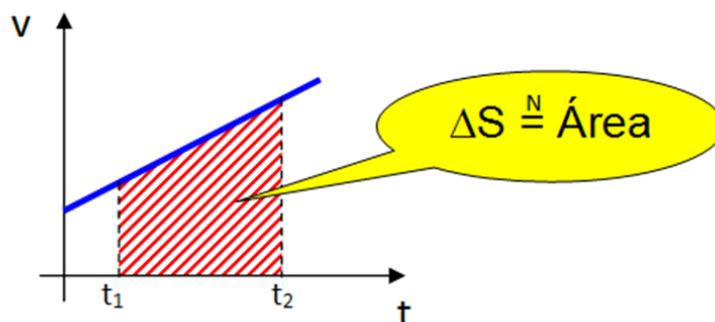
Note que a aceleração, por tratar-se do coeficiente angular da reta, será dado pela $\text{tg}(\theta)$, onde θ é o ângulo entre a reta e o eixo horizontal. (lembre-se de que a tangente de um ângulo agudo é positiva enquanto que a tangente de um ângulo obtuso é negativa).



Portanto, uma das propriedades do gráfico ($V \times t$) é a tangente do ângulo de inclinação.

Outra propriedade importante é a mesma que já foi abordada anteriormente e envolve o gráfico $V \times t$ e a área sob o gráfico. Veja.





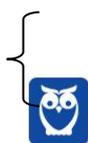
“No gráfico de velocidade contra tempo, a área sob o gráfico é numericamente igual ao ΔS do móvel”.

*OBSERVAÇÕES:

- A propriedade acima leva em consideração o sinal de ΔS , ou seja, quando o gráfico estiver **abaixo do eixo dos tempos**, considera-se um valor **negativo** para ΔS . Fisicamente significaria um movimento com velocidade negativa, logo o móvel estaria se deslocando contra a trajetória, o que significaria um valor negativo para ΔS , já que a posição final é menor que a inicial, o corpo estaria se movimentando em “marcha à ré”.
- A propriedade acima se estende a todos os gráficos de velocidade contra tempo, não apenas para uma reta (MRUV), todos os gráficos de velocidade contra tempo admitem tal propriedade, até mesmo o do MRU, conforme foi visto anteriormente.

8.2 GRÁFICO DO MRUV (S X T)

Lembrando que a equação que rege o movimento uniformemente variado é:
$$S = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$
, podemos afirmar que o gráfico de S contra t é uma parábola que terá sua concavidade definida pelo sinal da aceleração.



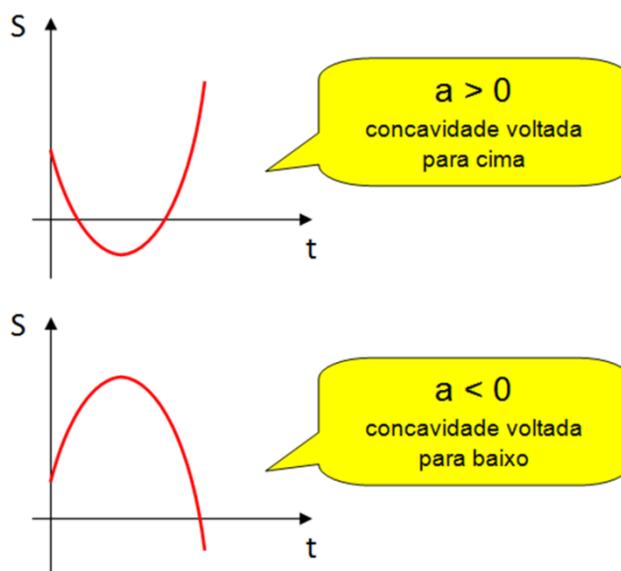
- **a positiva** \Rightarrow **para cima.**
- **a negativa** \Rightarrow **para baixo.**

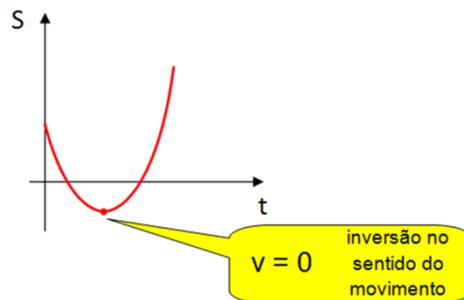
Nesse ponto recomendo que você faça uma revisão no estudo da função do segundo grau. A equação da posição é um exemplo da função do 2º grau.

Alguns conceitos como concavidade e vértice você vai lembrar caso faça essa revisão.

Os gráficos então podem ser de dois tipos:

- Concavidade para cima
- Concavidade para baixo





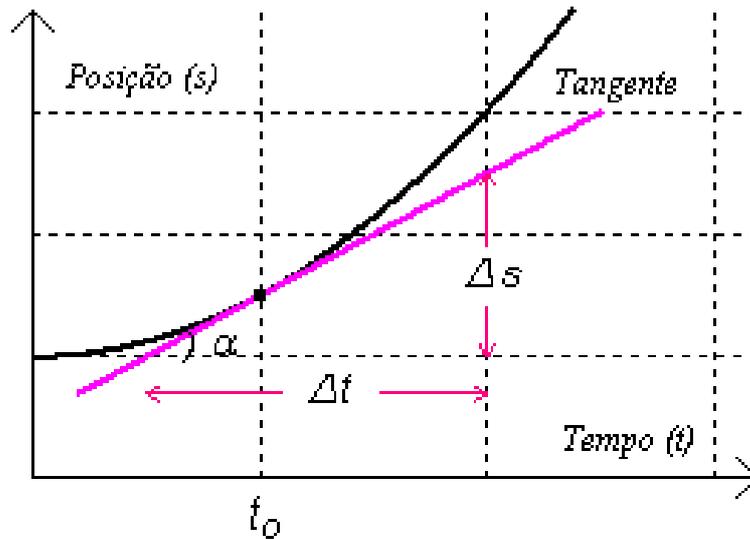
*Propriedade Importante:

Foi dito anteriormente que a velocidade é dada pela tangente do ângulo formado pelo gráfico da posição contra tempo no **MRU**.

Agora vamos "expandir" essa propriedade para o gráfico de posição contra tempo no **MRUV**, mesmo que o gráfico seja uma curva, podemos afirmar que a tangente da inclinação é numericamente igual à velocidade, o detalhe é que a velocidade no **MRU é constante**, então em qualquer instante a velocidade é sempre a mesma.

Por outro lado, no **MRUV a velocidade é diferente em cada instante**, logo teremos que calcular a tangente em cada instante, por exemplo, se quisermos a velocidade no instante 3s, deveremos calcular a velocidade naquele instante, que terá um valor distinto da velocidade no instante 5s, por exemplo.

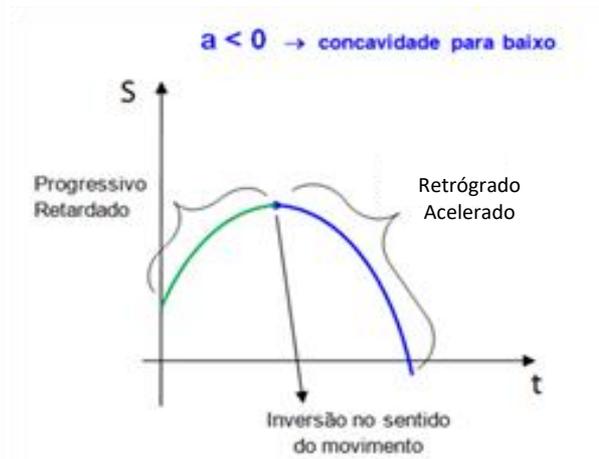




Acima representamos um gráfico de $S \times t$, para calcular a velocidade no instante " t_0 " basta calcular a tangente do ângulo α .

Em outro instante de tempo a inclinação da reta é diferente, motivo pelo qual a velocidade também o será, o movimento é variado.

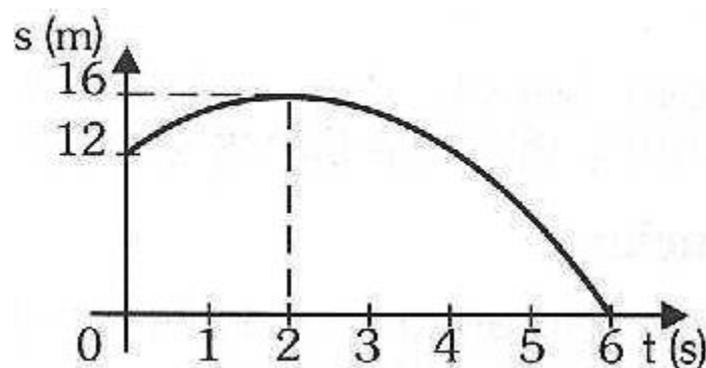
Os gráficos também estão presentes na classificação do **MRUV**. Veja os gráficos abaixo, nos quais se apresenta um resumo dos tipos de movimento e o gráfico correspondente.



***Observação:**

- No gráfico acima você notou que há um ponto em que a velocidade é nula, ou seja, um ponto no qual há uma inversão do movimento que antes possuía velocidade negativa e a partir de então passa a ter velocidade positiva (A) e vice e versa.

Exemplo: O gráfico representa a posição de um móvel em movimento retilíneo de aceleração constante.



a) Qual a posição inicial?

A posição inicial é o S , quando $t = 0$.

Basta dar uma olhadinha no gráfico e verificar que $S_0 = 12\text{m}$, pois é nesse ponto que o gráfico intercepta o eixo y .

b) Qual o instante em que o móvel muda de sentido?

A mudança de sentido ocorre no vértice da parábola, na qual a velocidade muda de sinal, a tangente do ângulo deixa de ser positiva e passa a ser negativa, pois a inclinação da tangente passa de aguda para obtusa.

Logo, $t = 2\text{s}$.



Lembre-se: no vértice da parábola o movimento sofre mudança de sentido.

Se não houver o trecho do vértice, significa que não houve inversão do movimento e a velocidade do corpo não foi nula em nenhum momento.

c) Determine a função horária das posições.

A função horária da posição será dada por:

$$S = S_0 + V_0t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow S = 12 + V_0t + \frac{at^2}{2}$$

Vamos determinar os valores de "V₀" e "a".

Lembre-se de que no item **b** você afirmou que a velocidade é nula quando t = 2s.

$$V = V_0 + a.t$$

$$0 = V_0 + a.2$$

$$\mathbf{2a = -V_0 \text{ ou } V_0 = -2a}$$

Para **S = 0, t = 6s**

$$0 = 12 + V_0.6 + a.6^2/2$$

$$0 = 12 + 6.V_0 + 18a \text{ (dividindo toda a equação por 6)}$$

$$0 = 2 + V_0 + 3a$$

$$0 = 2 + -2a + 3a$$

$$\mathbf{a = -2m/s^2}$$

$$\mathbf{V_0 = -2.(-2) = 4m/s}$$



$$\text{Logo, } S = 12 + 4t + \frac{-2t^2}{2}$$
$$S = 12 + 4t - t^2$$

d) Ache a velocidade do móvel no instante de 3s.

Substituindo na equação da velocidade:

$$V = V_0 + a.t \Rightarrow V = 4 - 2t, \text{ para } t = 3s \Rightarrow V = 4 - 2.3 = \mathbf{-2m/s.}$$

Veja que no exemplo acima a aceleração é negativa, o que condiz com a concavidade do gráfico apresentado.

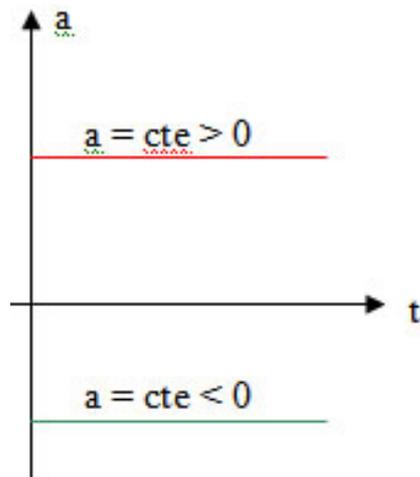
Verifique também que, quando $t = 3s$, o móvel já inverteu o sentido do seu movimento, resultando em uma velocidade negativa.

8.3 GRÁFICO MRUV (A X T).

O gráfico da aceleração é o mais simples, como se trata de uma grandeza que não sofre variação com o tempo, **por ser constante no MRUV**, então:

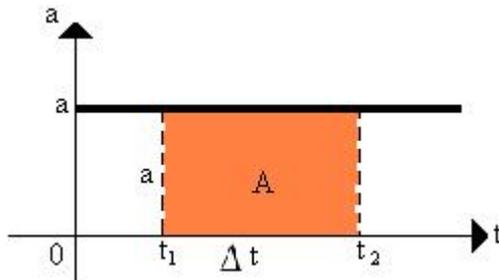
$$a = k \text{ (função constante)}$$





*Propriedade Importante

- No gráfico de $a \times t$ temos uma propriedade importante que é a da área sob o gráfico, a **área** é numericamente igual à ΔV .



- Atenção! Para acelerações negativas, elas darão como resultado "áreas negativas", o que implica em $\Delta V < 0$, nada mais normal já que a **aceleração é negativa**.



BLOCO 3 – CINEMÁTICA VETORIAL

1. CINEMÁTICA VETORIAL

A cinemática vetorial é, na verdade, o estudo do movimento dos corpos do ponto de vista vetorial, e para isso devemos conhecer o bem os **vetores**, assunto que foi bastante estudado no nosso capítulo 1.

2. GRANDEZAS CINEMÁTICAS VETORIAIS

As principais grandezas da cinemática escalar que são a **posição e também a variação da posição, o que você conheceu como ΔS ; a velocidade escalar e a aceleração escalar** ganham nova cara aqui no estudo da cinemática vetorial, uma vez que as grandezas agora terão **direção e sentido**, não importando apenas o módulo da grandeza.

Vamos iniciar os estudos conhecendo a primeira grandeza que é o vetor deslocamento:

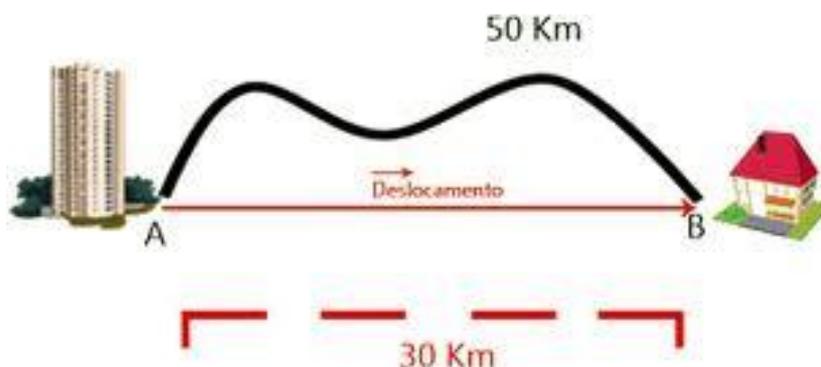
a) Vetor Deslocamento ou Deslocamento Vetorial

O vetor deslocamento de um corpo é, na verdade o **deslocamento real** que o corpo teve no plano.

Vetorialmente falando, poderíamos dizer que o vetor deslocamento de um corpo é o vetor que tem como **origem o local de partida e liga em linha reta esse essa origem ao ponto de chegada.**



Veja na figura abaixo uma trajetória bem maluca, parecida com a de uma estrada e o vetor deslocamento do corpo.



Note que o deslocamento efetivo do corpo foi apenas de 30km, pois o vetor que liga o ponto A (apartamento) ao ponto B (casa) tem módulo igual a 30km, diferentemente do espaço percorrido pelo automóvel na estrada (trajetória) que liga a casa ao apartamento, que foi de 50km, tendo em vista que a curva preta é maior que a reta vermelha.



Professor, eu percebi que o deslocamento vetorial é menor que o deslocamento escalar, isso é sempre verdade?

Boa observação Aderbal, mas isso nem sempre é verdade, temos uma situação em que o vetor deslocamento se confunde com o deslocamento escalar, e essa situação é justamente quando a **trajetória do corpo é uma reta**.



Portanto, cuidado com o enunciado, quando ele vier com aqueles itens clássicos: “em **toda** trajetória é correto afirmar que o deslocamento vetorial é menor que o deslocamento escalar”.

Atente para esse tipo de pegadinha! O item acima estaria **incorreto**, pois em trajetória retilínea as duas grandezas tem a mesma magnitude.

A unidade do vetor deslocamento, no SI, é o metro (m), pois se trata de uma grandeza cuja dimensão é o comprimento.

Bom, as principais observações acerca do deslocamento vetorial e sua distinção em relação ao deslocamento escalar foram feitas acima, agora você tem de exercitar. A propósito vamos fazer um exemplo.

Exemplo 1: Um veículo, ao deslocar-se dentro da cidade, parte de uma praça P em busca de uma oficina Q para verificar o funcionamento do motor e sofre a seguinte sequência de deslocamentos:

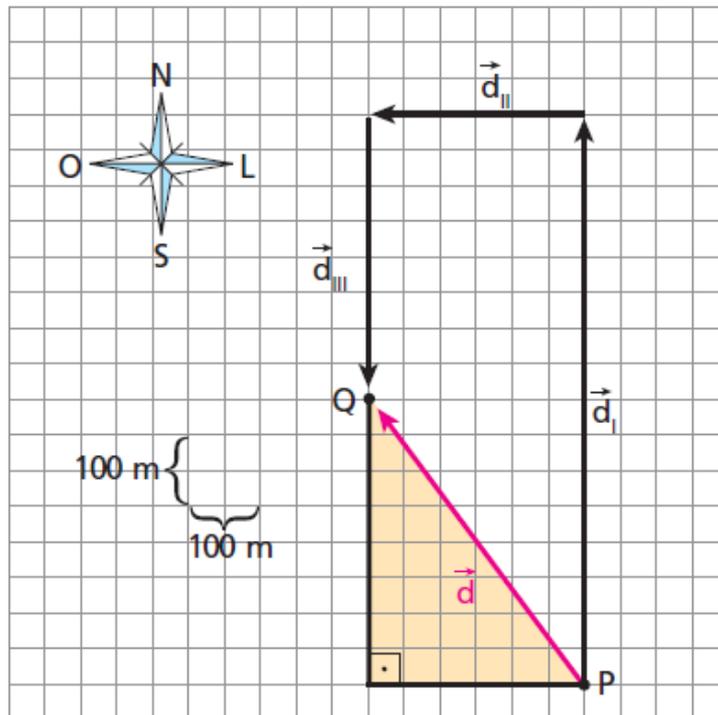
- I. 800 m para o Norte;
- II. 300 m para o Oeste;
- III. 400 m para o Sul.

1. Sabendo que a duração do movimento é de 8 min 20 s, pode-se afirmar que o módulo do seu deslocamento vetorial da praça P até a oficina Q é de 500m.

Comentário: Item correto!

Observe o desenho esquemático abaixo no qual podemos observar o trajeto completo do veículo em seu movimento descrito acima:





Observe que podemos afirmar que o vetor deslocamento do corpo foi o vetor vermelho, enquanto que os vetores pretos compõem o deslocamento escalar do corpo em sua trajetória completa.

Para determinar o módulo do vetor deslocamento, basta aplicar o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} |\vec{d}|^2 &= 300^2 + 400^2 \\ |\vec{d}|^2 &= 250.000 \\ |\vec{d}| &= 500m \end{aligned}$$

Perceba que o módulo do deslocamento vetorial é bem diferente do módulo do deslocamento escalar, que no caso será:



$$800m + 300m + 400m = 1500m$$

b) Velocidade vetorial média

A velocidade vetorial média é outro conceito que você precisa estar de olho para o ENEM.

A velocidade vetorial média é um conceito simples, pois leva em conta o que você acabara de aprender acerca de **deslocamento vetorial**.

A velocidade vetorial média é a **razão (divisão)** entre o deslocamento vetorial e o intervalo de tempo em que esse deslocamento ocorreu.

Assim a fórmula para o cálculo da velocidade vetorial média é:

$$\vec{V} = \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t}$$

Em módulo:

$$|\vec{V}| = \frac{|\Delta \vec{S}|}{\Delta t}$$

A unidade, no SI, será o **m/s**, lembrando que pode ocorrer de aparecer uma unidade usual como o **km/h**, mas você já sabe transformar. Caso tenha esquecido a tabelinha de transformação, volte algumas páginas e verifique o macete onde mostramos como transformar de km/h para m/s e vice e versa.



- O módulo será dado pela fórmula acima.
- A **direção** será dada sempre pela **direção do vetor deslocamento**.
- O **sentido** também será o mesmo do **vetor deslocamento**.

Compreendida essa ideia inicial de velocidade vetorial média, vamos fazer uma pequena observação.

OBS.: Como o deslocamento vetorial tem módulo menor ou, no máximo, igual ao do deslocamento escalar, a velocidade vetorial média obedecerá também à seguinte desigualdade:

$$|\vec{V}| \leq |V|$$

Exemplo 2: Um veículo, ao deslocar-se dentro da cidade, parte de uma praça P em busca de uma oficina Q para verificar o funcionamento do motor e sofre a seguinte sequência de deslocamentos:

- I. 800 m para o Norte;
- II. 300 m para o Oeste;
- III. 400 m para o Sul.

2. Sabendo que a duração do movimento é de 8 min 20 s, pode-se afirmar que o módulo de sua velocidade vetorial média e de sua velocidade escalar média são iguais a, respectivamente, 3,0m/s e 1,0m/s.

Comentário: Item incorreto!

Veja que a velocidade vetorial média tem módulo sempre menor ou, no máximo, igual ao da velocidade escalar média.



Assim, o item é incorreto sem necessitar de nenhum cálculo para chegar a essa conclusão. Fique atento que na sua prova, aparecerão itens dessa natureza, que permitem ao aluno bem embasado marcar com tranquilidade sem precisar utilizar fórmulas ou muita matemática.

Mas vamos comprovar os valores das velocidades médias vetorial e escalar:

No exemplo 1 foram calculados tanto o deslocamento vetorial, como o escalar, agora fica fácil determinar as velocidades, basta dividir os respectivos valores por Δt . Vejamos:

$$\begin{aligned} |\vec{V}| &= \frac{|\Delta \vec{S}|}{\Delta t} \\ |\vec{V}| &= \frac{500m}{(8.60 + 20)s} \\ |\vec{V}| &= \frac{500m}{500s} \\ |\vec{V}| &= 1,0m / s \end{aligned}$$

Com relação à velocidade escalar, basta calcular de acordo com o deslocamento escalar:



$$|V| = \frac{|\Delta S|}{\Delta t}$$
$$|V| = \frac{1500m}{(8.60 + 20)s}$$
$$|V| = \frac{1500m}{500s}$$
$$|V| = 3,0m / s$$

c) Aceleração tangencial

A aceleração tangencial pode aparecer em qualquer tipo de trajetória, seja ela retilínea ou curvilínea.

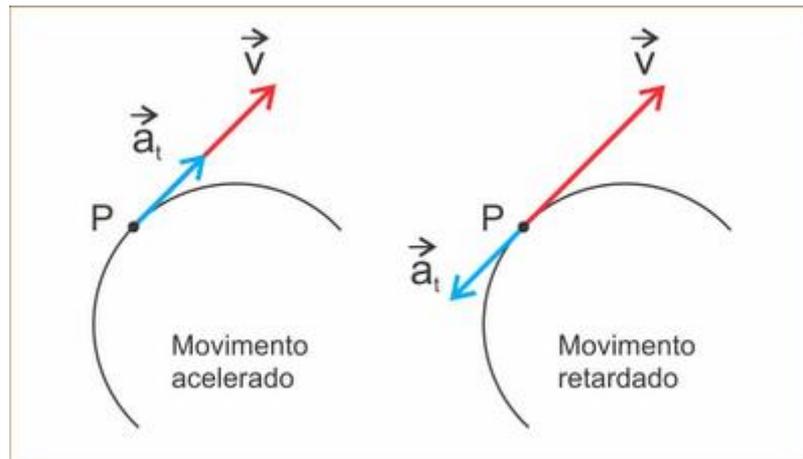


Professor, mas por que essa especificação quanto à aceleração, ela tem algo de especial?

Aderbal, a **aceleração tangencial** serve apenas para **aumentar ou diminuir o módulo da velocidade de um corpo**. Portanto, só existe aceleração tangencial se o corpo aumentar ou diminuir a sua velocidade.

Observe abaixo a representação da aceleração tangencial nos dois tipos de movimento que vamos considerar:





Assim, podemos caracterizar a aceleração tangencial da seguinte forma:

- Direção: tangente à trajetória.
- Sentido:

{	A favor da velocidade: movimento acelerado .
	Contra a velocidade: movimento retardado .
- Módulo: O **módulo** da **aceleração tangencial** será o mesmo módulo da **aceleração escalar**.

Assim:
$$|\vec{a}| = \frac{|\Delta V|}{\Delta t}$$

Ou seja, a aceleração que estávamos acostumados a calcular até agora, na verdade era a aceleração tangencial, uma vez que as trajetórias eram sempre retilíneas, não admitindo outro tipo de aceleração, que veremos adiante.

A unidade da aceleração tangencial é simples: no SI, **m/s²**.



d) Aceleração centrípeta:

A aceleração centrípeta, por sua vez, tem uma função diferente da aceleração tangencial no movimento, **a função da centrípeta é manter o movimento do corpo em uma trajetória curvilínea**, ou seja a função da aceleração centrípeta é mudar a direção e por consequência o sentido do vetor velocidade.

Assim, podemos afirmar que sempre que a trajetória for curvilínea, haverá resultante centrípeta.

Na trajetória retilínea nunca haverá resultante centrípeta, pois não há curva, portanto não haverá necessidade de manter o corpo em nenhuma curva.

A resultante centrípeta tem algumas características que passaremos agora a entender:

- **Direção: radial**, ou seja, a direção da aceleração centrípeta é a direção do raio no ponto considerado.
- **Sentido:** sempre apontando para o **centro da curva**.
- **Módulo:** vamos verificar a fórmula a seguir.

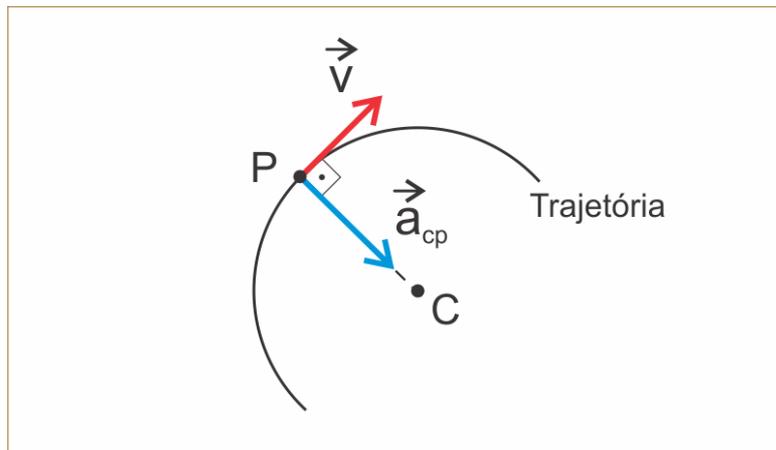
A módulo da aceleração centrípeta pode ser demonstrado para o caso particular do MCU, vou preferir não mostrar essa demonstração, pois foge aos objetivos dessa obra. Vamos ao que interessa que é a fórmula da aceleração centrípeta e a sua aplicação.

$$|\vec{a}_{ctp}| = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$$



Onde $|\vec{v}|$ representa o módulo da velocidade do corpo no instante considerado e R representa o raio da trajetória curvilínea.

Representando a aceleração centrípeta, poderíamos fazê-lo da forma em que você observa na figura abaixo:



Mas também podemos aplicar a fórmula da aceleração centrípeta usando uma relação que você aprenderá na segunda parte desse capítulo, que é o conceito de velocidade angular. Será mostrado que a velocidade angular é a velocidade linear dividida pelo raio da trajetória, o que nos permite escrever:

$$|\vec{a}_{cp}| = \frac{|\vec{v}|^2}{R}, \text{ onde } |\vec{v}| = \omega.R$$

assim:

$$|\vec{a}_{cp}| = \frac{(\omega R)^2}{R}$$

$$|\vec{a}_{cp}| = \frac{\omega^2 R^2}{R}$$

$$|\vec{a}_{cp}| = \omega^2 .R$$



Em uma questão em que for fornecido o valor da velocidade angular, poderemos usar a fórmula acima.

Exemplo 3: Julgue os itens abaixo:

1. Em um movimento circular e uniforme, a aceleração total é nula.

Comentário: Item incorreto.

Apesar de o movimento ser uniforme, a aceleração centrípeta é diferente de zero, pois o movimento precisa de uma aceleração que o faça mudar a direção.

2. Em um movimento circular e uniformemente variado a aceleração tangencial é nula.

Comentário: Item incorreto.

Como o movimento é variado, o módulo da velocidade modifica-se, aumentando ou reduzindo, o que faz com que a aceleração tangencial seja diferente de zero.

3. Em um movimento retilíneo a aceleração centrípeta é nula.

Comentário: Item correto.

Já que a trajetória é retilínea, não pode a aceleração centrípeta ser diferente de zero, pois a velocidade não muda de direção e nem de sentido, sendo, portanto, a aceleração centrípeta nula.

4. Em um movimento circular e uniforme a aceleração centrípeta é constante.

Comentário: Item correto.



Como o movimento é do tipo uniforme, o módulo da velocidade é constante e diferente de zero. Assim, a aceleração centrípeta, que é dada por: $|\vec{a}_{ctp}| = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$, será constante.

3. MOVIMENTO RELATIVO

O movimento relativo ocorre quando estudamos o movimento de um corpo em relação a outro corpo que também está em movimento.

Geralmente, estudamos o movimento dos corpos em relação a um referencial parado na **Terra**, contudo vamos aprender a mudar o referencial da Terra para outro referencial em movimento que pode ser um veículo ou qualquer corpo que se move com velocidade constante.

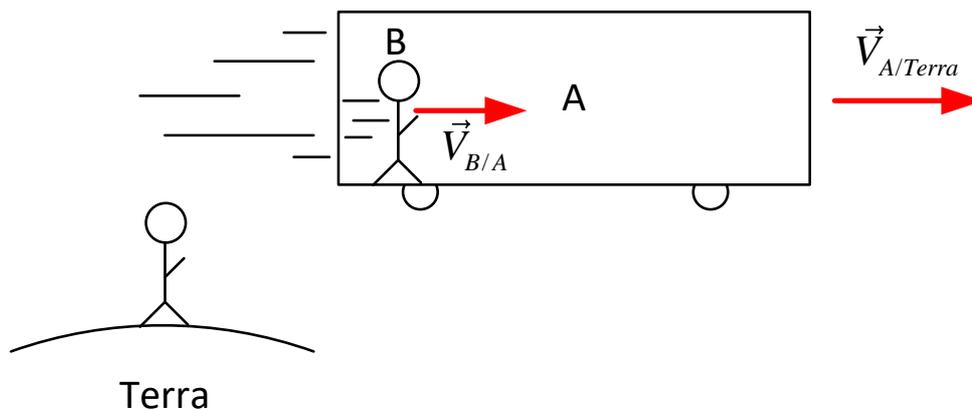
O conceito fundamental que deve ser entendido para que todos os conceitos possam ser fixados é o de referencial. Esse conceito foi visto no início do bloco anterior, no qual conceituamos os principais pontos iniciais relativos à cinemática e um deles foi o de **referencial**.

Na oportunidade, em outras palavras, resumidamente, dissemos que referencial é um ponto de referencial sob o qual um movimento é estudado.

Esse conceito, vamos continuar adotando, contudo, vamos explorar mais detalhadamente o movimento relativo.

Em suma podemos dizer que um movimento é relativo, quando podemos mudar o referencial da Terra para outro referencial em movimento.





Observe o exemplo acima em que temos um vagão movendo-se para a direita com uma velocidade $\vec{V}_{A/Terra}$, e uma pessoa B, dentro do vagão movendo-se com uma velocidade $\vec{V}_{B/A}$, relativa ao vagão.

Note que temos aqui a presença de dois referenciais; um, fixo na Terra; outro, móvel, que é o vagão.

Nesse caso, podemos dizer que o movimento da pessoa B pode ser estudado tanto em relação ao vagão como também em relação à Terra.

Se o vagão desloca-se com uma velocidade de 10m/s e a pessoa com uma velocidade de 2m/s em relação ao vagão, podemos dizer que, se as direções e sentidos dos movimentos respectivos forem as que estão indicadas na figura acima, então a velocidade da pessoa em relação à Terra será de 12m/s = 10m/s(vagão) + 2m/s(pessoa em relação ao vagão).

Teremos uma soma vetorial das velocidades relativa e do referencial móvel. No caso acima elas estão no mesmo sentido, portanto teremos um módulo da velocidade resultante igual à soma dos módulos das velocidades relativa (pessoa) e do referencial (vagão).

Note que se os movimentos do vagão e da pessoa fossem em sentidos opostos, teríamos a velocidade em relação à Terra igual à subtração das velocidades (relativa e da pessoa) resultando em 10m/s - 2m/s = 8m/s.



Podemos então generalizar uma fórmula para a velocidade relativa, resultante e do referencial, veja:

$$\vec{V}_{B/Terra} = \vec{V}_{B/A} + \vec{V}_{A/Terra}$$

Essa equação sempre será válida para quaisquer disposição vetorial dos vetores velocidade.

Podemos ainda modificar essa fórmula e obter tanto a fórmula dos ΔS 's como também a das acelerações relativas:

$$\Delta \vec{S}_{B/Terra} = \Delta \vec{S}_{B/A} + \Delta \vec{S}_{A/Terra}$$

$$\vec{a}_{B/Terra} = \vec{a}_{B/A} + \vec{a}_{A/Terra}$$

4. VELOCIDADE RELATIVA

Vamos abordar o conceito de velocidade relativa, que nada mais é do que a velocidade que um corpo possui em relação a outro, por isso o seu nome, **velocidade relativa**.

4.1 CÁLCULO DA VELOCIDADE RELATIVA PARA DOIS CORPOS NA MESMA DIREÇÃO



Podemos obter uma fórmula genérica para o cálculo da velocidade relativa, a partir da equação demonstrada no item acima:

$$\vec{V}_{B/Terra} = \vec{V}_{B/A} + \vec{V}_{A/Terra}$$

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_{B/Terra} - \vec{V}_{A/Terra}$$

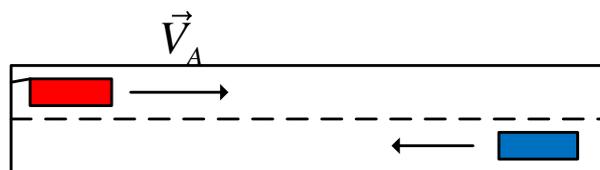
analogamente:

$$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_{A/Terra} - \vec{V}_{B/Terra}$$

Podemos ainda analisar casos específicos. O primeiro será o de velocidades na mesma direção, muito comum em provas, ou seja, quando os dois automóveis estão se deslocando na mesma linha reata, por exemplo.

a) Veículos em sentidos opostos:

Na figura abaixo você pode observar dois veículos se movimentando em uma rodovia plana, na mesma direção e em sentidos opostos.



$$|\vec{V}_{A/B}| = |\vec{V}_A| + |\vec{V}_B|$$

A velocidade relativa entre eles será dada pela soma dos módulos das velocidades de cada veículo em relação à Terra.



A velocidade relativa, conceitualmente é a diferença vetorial entre as velocidades em relação à Terra, e como no caso acima os vetores velocidade são opostos, a diferença entre eles tem módulo igual à soma dos módulos de cada um deles.



Professor, é por isso que popularmente dizem que numa "batida" entre dois veículos em sentidos opostos as velocidades se somam?

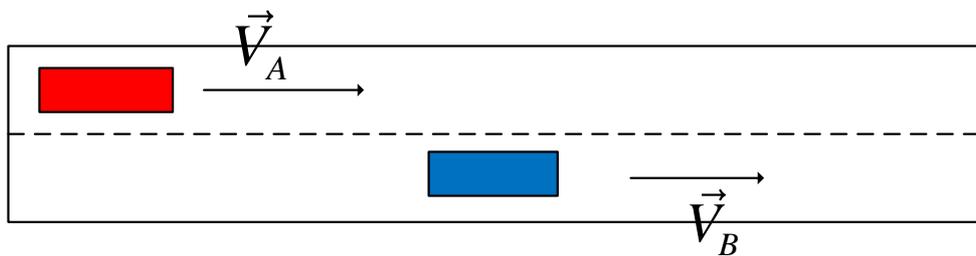
É isso mesmo Aderbal! Nas colisões frontais é como se um móvel se movesse com a soma das velocidades enquanto o outro se encontra parado.

Esse na verdade é o conceito de **velocidade relativa**, o movimento se passa como se um dos móveis estivesse parado enquanto o outro está em movimento com a velocidade relativa.

b) Veículos no mesmo sentido:

Observe agora dois veículos se movimentando no mesmo sentido e na mesma direção:





$$|\vec{V}_{REL}| = |\vec{V}_A| - |\vec{V}_B|, \text{ caso } |\vec{V}_A| > |\vec{V}_B|$$

$$|\vec{V}_{REL}| = |\vec{V}_B| - |\vec{V}_A|, \text{ caso } |\vec{V}_B| > |\vec{V}_A|$$

Nesse caso, os veículos estão se movimentando no mesmo sentido, assim o movimento se passa como se um veículo tivesse uma velocidade igual à diferença dos módulos de cada velocidade e o outro estivesse parado.



Professor, e se os veículos estivessem se movimentando com o mesmo valor de velocidade?

Boa pergunta Aderbal!



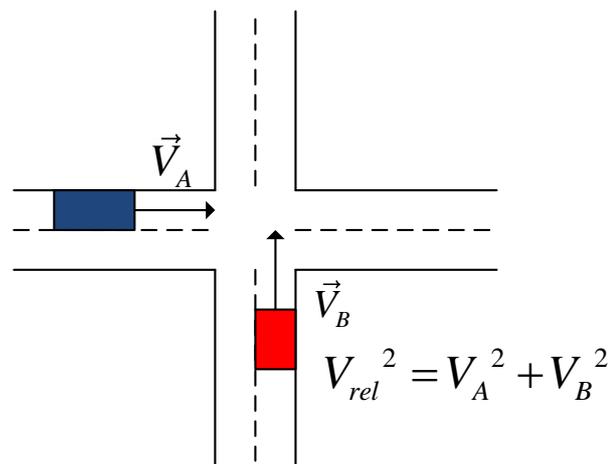
No caso dos veículos com mesma velocidade em módulo, direção e sentido, um está em repouso em relação ao outro, os veículos não se afastam e nem se aproximam um em relação ao outro.

Perceba que é diferente se os veículos tiverem a mesma velocidade em módulo, porém em sentidos opostos.

4.2. CÁLCULO DA VELOCIDADE RELATIVA PARA VELOCIDADES PERPENDICULARES

Caso muito comum de movimento relativo é o caso dos veículos em ruas perpendiculares. Nesse caso as velocidades não estão na mesma direção.

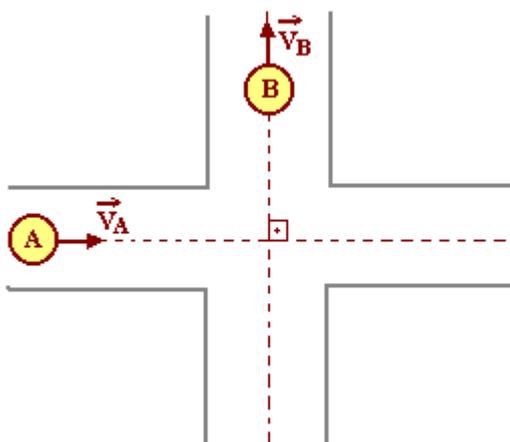
Observe na figura abaixo os veículos em direções perpendiculares:



Nesse caso, usamos o famoso teorema de Pitágoras para calcular a velocidade relativa.



Exemplo 6: Dois corpos A e B se deslocam segundo trajetória perpendiculares, com velocidades constantes, conforme está ilustrado na figura adiante.



As velocidades dos corpos medidas por um observador fixo têm intensidades iguais a: $V_A = 5,0$ (m/s) e $V_B = 12$ (m/s). Calcule a velocidade do corpo A em relação ao corpo B

Resolução:

A velocidade relativa será dada pela fórmula vista acima, ou seja:

$$\begin{aligned} V_{rel}^2 &= V_A^2 + V_B^2 \\ V_{rel}^2 &= 12^2 + 5^2 \\ V_{rel}^2 &= 144 + 25 = 169 \\ V_{rel} &= 13 \text{ m / s} \end{aligned}$$

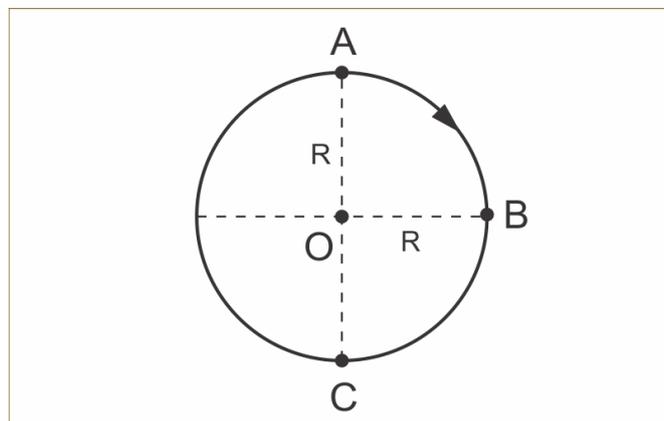
O movimento dos corpos se dá em direções perpendiculares, portanto a velocidade relativa será dada por meio do teorema de Pitágoras.



5. MOVIMENTOS CIRCULARES

5.1 CONCEITO:

O conceito de movimento circular é muito simples. **É todo movimento cuja trajetória é circular.**



Só isso mesmo.

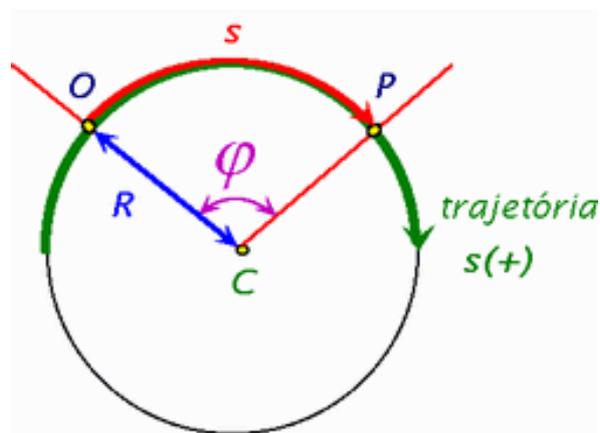
O que vai determinar se o movimento é ou não circular é a trajetória do corpo, e esse conceito de trajetória foi visto no início deste capítulo, no qual foram colocados vários conceitos cinemáticos que dão base para todo o estudo dos movimentos.

Em trajetória circular, devemos dar às principais grandezas cinemáticas (**deslocamento e velocidade**) o enfoque angular, já que na circunferência não são apenas distâncias que são percorridas, mas também ângulos.



5.2 ESPAÇO ANGULAR

O espaço angular é aquele ângulo central percorrido por um corpo quando em movimento circular. Observe a figura:



Perceba na figura acima alguns conceitos:

- S é a posição linear (na linha da trajetória) do corpo em relação à origem O do referencial.
- φ é a posição angular (ângulo correspondente) em relação à origem O do referencial.
- C é o centro da circunferência que, por sua vez, é a trajetória do movimento circular, e R é o respectivo raio.

5.2.1 RELAÇÃO ENTRE S E φ

Existe uma relação entre o espaço linear (S) e angular (φ), basta perceber uma proporção que há na circunferência.



Observe a demonstração no quadro a seguir:

$$\begin{cases} 2\pi R & - & 2\pi(\text{rad}) \\ S & - & \varphi(\text{rad}) \end{cases}$$

Logo,

$$\varphi = \frac{S}{R} \text{ ou } \Delta\varphi = \frac{\Delta S}{R}$$

Assim, podemos descobrir o espaço angular em função do espaço linear, a depender apenas do raio da circunferência.

O espaço angular é o espaço linear dividido pelo raio.

5.3 VELOCIDADE ANGULAR

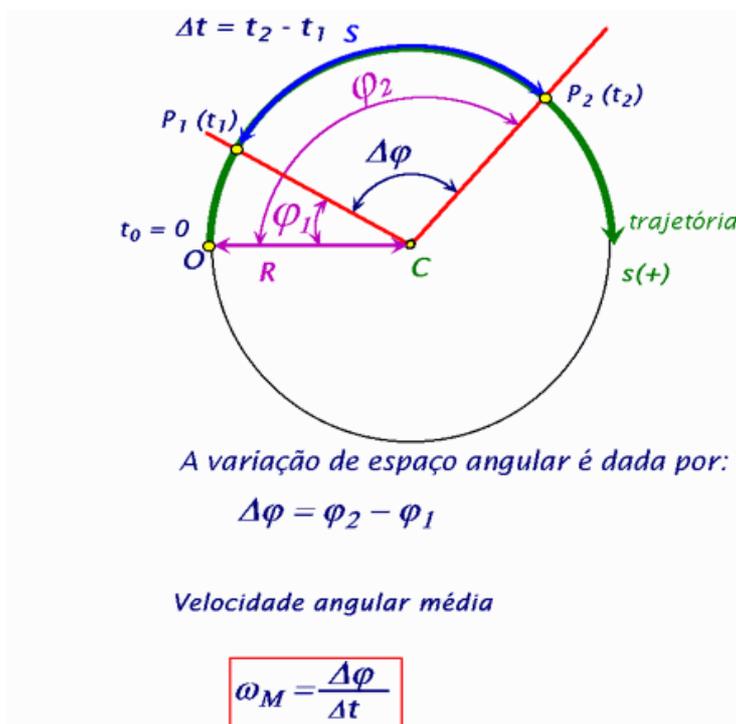
A velocidade angular tem um conceito muito simples.

A velocidade linear, que você está acostumado, que foi trabalhada por nós desde o início do capítulo, nada mais é do que a rapidez com que os espaços lineares (ΔS) são percorridos.

Por outro lado, a velocidade angular é a rapidez com que os ângulos são percorridos. O próprio nome é autoexplicativo.

Assim, podemos verificar que a velocidade angular será dada de pela seguinte fórmula, demonstrada no quadro abaixo:





5.3.1 RELAÇÃO ENTRE VELOCIDADE ANGULAR E VELOCIDADE LINEAR

Existe uma relação entre velocidade angular e linear, vamos demonstrá-la a partir de conceitos básicos aprendidos nos itens anteriores, note:

A velocidade angular é a rapidez com que os ângulos são percorridos:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Mas acabamos de descobrir uma relação entre a variação do espaço linear (ΔS) e a variação do espaço angular ($\Delta\varphi$).



Se substituirmos $\Delta\phi$ por $\Delta S/R$, chegamos à seguinte conclusão:

$$\omega = \frac{\frac{\Delta S}{R}}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \cdot \frac{1}{R} = \frac{V}{R}$$
$$\omega = \frac{V}{R}$$

Logo, a velocidade angular é igual à velocidade linear dividida pelo raio da trajetória.

5.4 ACELERAÇÃO CENTRÍPETA NO MOVIMENTO CIRCULAR

Outro conceito importante a ser aprendido no movimento circular é que ele sempre terá um tipo de aceleração, que é a aceleração centrípeta, que nada mais é do que uma componente do vetor aceleração.

O fato é que nesse tipo de movimento a trajetória circular obriga o corpo a mudar a direção do movimento constantemente, assim deve haver uma aceleração responsável por essa mudança.

Essa componente é justamente a componente centrípeta da aceleração.

Essa componente sempre aparecerá em movimentos curvilíneos e tem seu módulo dado pela fórmula abaixo:

$$a_{ctp} = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$$



Mas acabamos de descobrir uma fórmula que relaciona a velocidade linear V e a velocidade angular ω .

Assim, podemos afirmar que:

$$a_{\text{ctp}} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R}$$
$$a_{\text{ctp}} = \omega^2 R$$

5.5 MOVIMENTO CIRCULAR E UNIFORME (MCU).

Esse movimento (**MCU**) é um tipo particular de movimento circular, pois nesse caso a **velocidade é constante**, tanto a angular como a linear.

Assim, os espaços lineares percorridos com o tempo são iguais para intervalos de tempos iguais, assim como os espaços angulares.

Podemos resumir da seguinte forma:

$$\Delta t's \text{ iguais} \Rightarrow \begin{cases} \Delta S's & \text{iguais} \\ \Delta \varphi's & \text{iguais} \end{cases}$$

As principais características do movimento circular uniforme são:

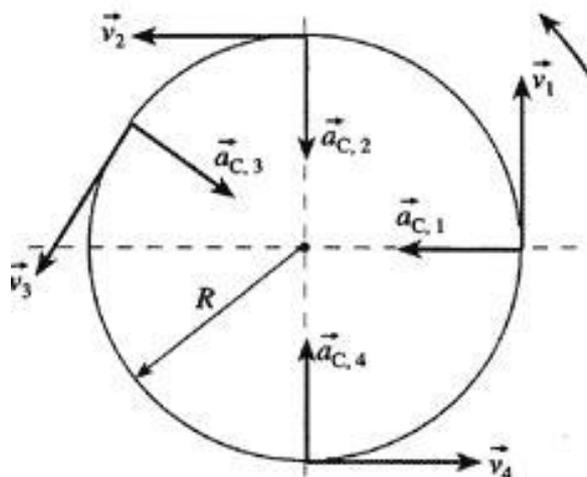
1. A trajetória é uma circunferência.



2. A velocidade vetorial é constante em módulo e variável em direção e sentido.

3. A aceleração tangencial é nula.

4. A aceleração centrípeta é constante em módulo e variável em direção e sentido.



Na figura acima as velocidades possuem o mesmo módulo durante todo o movimento. Estão ainda representadas as acelerações centrípetas em cada ponto, que também possuem o mesmo módulo.

Exemplo:

Um carro faz uma curva de 80 m de raio, com velocidade de módulo constante igual a 72 km/h. Podemos afirmar que sua aceleração é:

- a) zero m/s^2
- b) 0,5 m/s^2
- c) 0,9 m/s^2



- d) 4 m/s^2
- e) 5 m/s^2

Comentário:

No caso acima a aceleração será a do tipo centrípeta, uma vez que o movimento do carro se faz com velocidade constante em módulo.

Assim, basta aplicar a fórmula da aceleração centrípeta, lembrando-se de transformar a velocidade para m/s.

$$a_{cp} = \frac{|\vec{V}|^2}{R}$$
$$a_{cp} = \frac{\left(\frac{72}{3,6}\right)^2}{80} = \frac{400}{80} = 5 \text{ m/s}^2$$

Item E.

5.6 PERÍODO

Todo movimento periódico possui um período, sendo um movimento dessa natureza, aquele que **se repete em intervalos de tempos iguais**.

Existem diversos exemplos de movimentos periódicos no nosso dia a dia.

Veja abaixo alguns movimentos que se repetem com o tempo:

1. A duração de uma aula.



2. O movimento de rotação da Terra em torno de si.
3. O movimento de translação da Terra em torno do Sol.

Um movimento importante que é periódico é o movimento circular e uniforme, que pelo fato de possuir velocidade constante, torna-se periódico com o tempo, pois um corpo em MCU volta sempre para a mesma posição após um intervalo de tempo igual a um período.

A unidade no sistema internacional de unidades é a unidade de tempo, que é o "segundo" (s).

Exemplos:

1. Calcule o período de rotação, em segundos, do movimento do ponteiro dos minutos de um relógio analógico.

Resolução:

Questão simples, basta perceber que o ponteiro dos minutos leva 60 minutos para completar uma volta em torno do centro do relógio.

Mas como foi solicitado o período em segundos, temos de transformar a unidade.

Assim, $T = 60\text{min} \cdot 60\text{s}/\text{min} = 3600\text{s}$.

5.7 FREQUÊNCIA

A frequência tem um conceito parecido com o de período, mas de maneira inversa, observe:



100
200



“Frequência de um movimento periódico é o número de vezes que um movimento se repete na unidade de tempo”.

Portanto, o conceito é inverso àquele de período.

A unidade de frequência é o Hz (hertz) ou RPS (rotações por segundo), mas também é comum aparecer nas questões a unidade usual RPM (rotações por minuto).

Fique atento para o quadro abaixo onde consta a tabelinha para transformação de **RPM** para **Hz** e vice versa.

$$\begin{array}{l} \text{RPM} \xrightarrow{:60} \text{Hz} \\ \text{Hz} \xrightarrow{\times 60} \text{RPM} \end{array}$$

Exemplo:

Calcule a frequência de rotação de uma roda de um veículo, sabendo que o tempo de duração de uma volta corresponde a 25 centésimos de segundo.

Resolução:

Basta encontrar o número de voltas que a roda dá em um segundo:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 1\text{s} \rightarrow f \\ 0,25\text{s} \rightarrow 1\text{rotação} \end{array} \right. \\ \Rightarrow f = \frac{1\text{rotação}}{0,25\text{s}} \\ \Rightarrow f = 4\text{Hz} \end{array}$$



Portanto a roda executa quatro voltas a cada segundo.

5.8. RELAÇÃO ENTRE PERÍODO E FREQUÊNCIA

Na teoria dos dois itens anteriores você deve ter notado que os conceitos são inversos, o que nos permite escrever a seguinte conclusão:

$$T = \frac{1}{f}$$

e

$$f = \frac{1}{T}$$

Ou seja, o período é o inverso da frequência e a frequência é o inverso do período.

5.9 RELAÇÃO ENTRE VELOCIDADE ANGULAR E PERÍODO.

Podemos provar uma relação que existe entre a velocidade angular e o período, de modo fácil, chegamos à seguinte conclusão:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{\frac{\Delta S}{\Delta t}}{R} = \frac{\Delta S}{R \cdot \Delta t}$$

Para um deslocamento de uma volta, onde $\Delta S = 2 \cdot \pi \cdot R$ e $\Delta t = T$, temos:



$$\omega = \frac{\Delta S}{R \cdot \Delta t} = \frac{2\pi R}{R \cdot T}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

5.10 RELAÇÃO ENTRE VELOCIDADE ANGULAR E FREQUÊNCIA.

Podemos também demonstrar uma relação existente entre a velocidade angular e a frequência de um movimento periódico. Vamos partir da fórmula que foi demonstrada no item anterior:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$$
$$\omega = 2\pi \cdot f$$

Exemplo:

Considere um automóvel cujos pneus, quando novos, têm diâmetro D . Suponha que os pneus se tenham desgastado e apresentem 98% do diâmetro original. Quando o velocímetro assinalar 100 km/h, a velocidade real do automóvel será:

- a) 104 km/h.
- b) 102 km/h.
- c) 100 km/h.
- d) 98 km/h.
- e) 96 km/h.



Resolução:

Essa questão é muito boa e requer um raciocínio natural muito bom por parte do aluno. Acredito que uma questão dessas pode ser objeto de avaliação em uma prova que contemple a Física no dia a dia como o **ENEM**, e o melhor é que pouca gente vai saber a saída.

Observe que o velocímetro do veículo vem calibrado de fábrica para marcar 100km/h, considerando-se o diâmetro do pneu novo.

Assim, os 100km/h representam uma velocidade linear ($\Delta S/\Delta t$) a partir de um raio de fábrica.

Logo, podemos afirmar que:

$$V = \frac{n \cdot 2\pi R}{\Delta t}, \text{ onde } n \text{ é o número de voltas.}$$

Assim,

$$V = 2\pi R \cdot \frac{n}{\Delta t} = 2\pi \cdot R \cdot f$$

Com o pneu desgastado, o raio é de apenas 98% do raio inicial, assim:

$$V' = 2\pi R' \cdot f$$

Como a frequência de rotação do eixo do veículo é a mesma, pois ele está marcando os mesmos 100km/h, então as velocidades serão proporcionais aos raios. Logo:



$$\frac{V'}{V} = \frac{R'}{R}$$
$$V' = 100 \cdot 0,98$$
$$V' = 98 \text{ km/h}$$

Resposta: alternativa D.

5.11 TRANSMISSÃO DE MOVIMENTOS CIRCULARES

Os movimentos circulares podem ser transmitidos de uma circunferência para outra, e isso é muito comum na **indústria** e no **dia a dia**, pois nem sempre possuímos um motor com a frequência que desejamos obter.



Professor, ainda bem que existe essa tal transmissão de movimento circular, já pensou se toda vez que precisasse de frequência diferente, fosse necessário comprar um novo motor?

Não quero nem pensar Aderbal, iria ser um gasto desnecessário, pois podemos acoplar polias e conseguir frequências diferentes, por meio da transmissão de movimentos circulares.

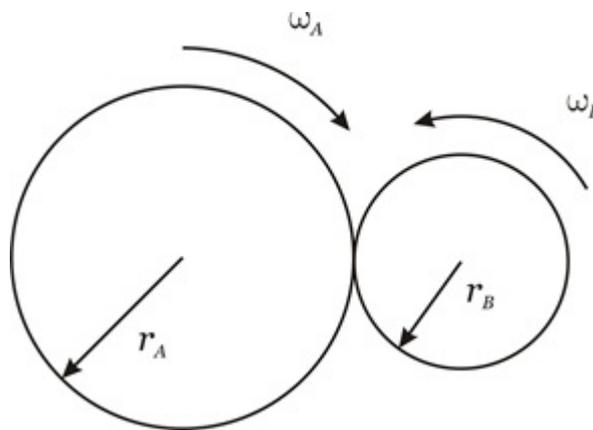
Essa transmissão pode ser de três formas: Por **contato**, **correia** e **por eixo**. Vamos estudar esses três tipos de transmissão e observar as particularidades de cada um deles:



a) Por contato:

Ocorre esse tipo de transmissão quando uma engrenagem, por exemplo, em contato com outra, é capaz de transmitir o seu movimento circular.

Observe a figura abaixo que ilustra esse tipo de transmissão.



Observe que temos dois círculos de raios distintos com velocidades angulares diferentes, afinal de contas eles descrevem ângulos diferentes em tempos iguais.

Por outro lado, temos que as velocidades lineares dos dois círculos são iguais pelo fato de **não haver escorregamento**. Assim, eles descrevem espaços lineares iguais em tempos iguais. Logo, podemos montar a seguinte igualdade:

$$V_A = V_B, \text{ como } V = \omega \cdot R$$
$$\Rightarrow \omega_A \cdot R_A = \omega_B \cdot R_B$$

ou

$$\Rightarrow \frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{R_B}{R_A}$$



Então, a conclusão é que quanto maior o raio, menor será a sua velocidade angular, de modo a manter sempre a mesma velocidade linear.

Podemos ainda trabalhar com mais duas fórmulas, que envolvem o período e a frequência:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\omega_A}{\omega_B} &= \frac{R_B}{R_A} \\ \cancel{2\pi} \cdot f_A \cdot R_A &= \cancel{2\pi} \cdot f_B \cdot R_B \\ f_A \cdot R_A &= f_B \cdot R_B \\ &\text{ou} \\ \frac{1}{T_A} \cdot R_A &= \frac{1}{T_B} \cdot R_B \\ \frac{T_A}{R_A} &= \frac{T_B}{R_B}\end{aligned}$$

Esse tipo de transmissão é muito utilizado nas engrenagens que compõem o motor de um veículo, que trabalham com procedimentos mecanizados, um exemplo muito comum são as engrenagens dentadas ou rodas dentadas.

É importante ressaltar que o **raio** de uma engrenagem é **diretamente proporcional** ao número de **dentes** que ela possui.

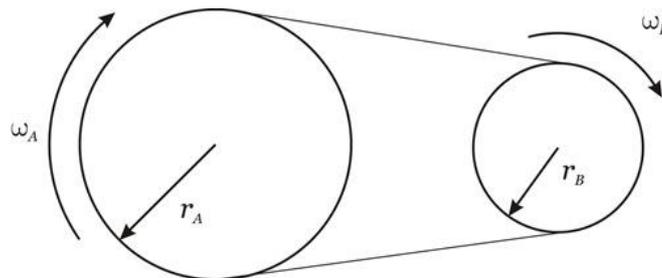
$$R = k \cdot n_{\text{dentes}}$$

b) Transmissão por correia ou corrente.

Nesse tipo de transmissão, uma polia (círculo) transfere seu movimento circular por meio de uma **corrente** ou **correia** que **não sofre escorregamento e é inextensível**, esses dois fatos são muito importantes, pois é por conta deles que podemos afirmar



que as polias **terão a mesma velocidade linear**, assim como o tinham na transmissão por contato.



Então, pelos mesmos motivos expostos na alínea anterior, podemos afirmar que:

$$V_A = V_B, \text{ como } V = \omega \cdot R$$
$$\Rightarrow \omega_A \cdot R_A = \omega_B \cdot R_B$$

ou

$$\Rightarrow \frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{R_B}{R_A}$$

E ainda, pensando do ponto de vista das frequências e períodos:

$$\Rightarrow \frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{R_B}{R_A}$$
$$\cancel{2\pi} \cdot f_A \cdot R_A = \cancel{2\pi} \cdot f_B \cdot R_B$$
$$f_A \cdot R_A = f_B \cdot R_B$$

ou

$$\frac{1}{T_A} \cdot R_A = \frac{1}{T_B} \cdot R_B$$
$$\frac{T_A}{R_A} = \frac{T_B}{R_B}$$



Esse tipo de transmissão é muito conhecido e a sua aplicação mais comum é a **bicicleta e a motocicleta e foi já foi cobrada em provas do ENEM várias vezes.**

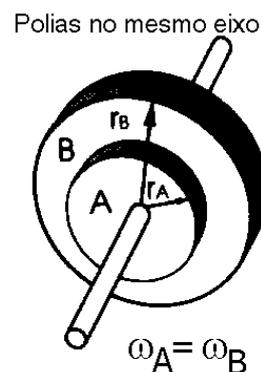
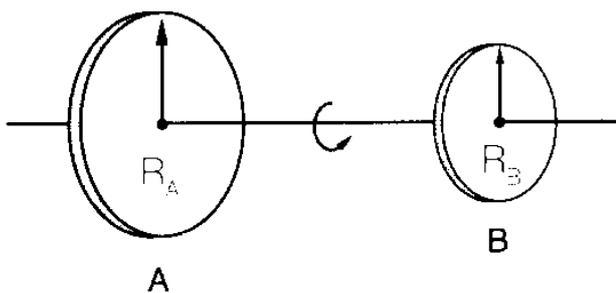
Quando numa **coroa** maior o seu movimento é transmitido para uma **catraca** acoplada à roda traseira por meio de uma corrente ou correia.

c) Transmissão por meio de eixo.

Na transmissão por meio de eixo, temos um movimento circular sendo transmitido por meio de um **eixo acoplado aos dois corpos, fixo a eles.**

Esse eixo fará com que uma rotação angular $\Delta\theta$ **no primeiro corpo**, acarrete na mesma rotação $\Delta\theta$ **no segundo corpo.**

Observe as figuras abaixo:



Então, podemos afirmar que:



$$\omega_A = \omega_B, \text{ como } \omega = \frac{V}{R}$$
$$\Rightarrow \frac{V_A}{R_A} = \frac{V_B}{R_B}$$

Do ponto de vista dos períodos e frequências, podemos dizer que são idênticas:

$$f_A = f_B$$
$$T_A = T_B$$

Proporcionalmente, quanto maior o raio, maior a sua velocidade linear.

Esse tipo de transmissão também é utilizado na bicicleta. Ao ser transmitido para roda, o movimento da catraca traseira acoplada à roda traseira por meio de um eixo.

6. MOVIMENTO VERTICAL NO VÁCUO

Esse será o nosso último assunto a respeito do tema cinemática. Aliás, você se lembra qual é o conceito de cinemática?



Professor, cinemática é a parte da mecânica que estuda o movimento sem levar em conta as suas causas, ou seja, as forças.



É isso aí Aderbal, estou vendo que você lembra-se bem dos conceitos iniciais abordados no início deste capítulo.

Então, nessa aula vamos encerrar os conceitos relativos à cinemática, ou seja, a partir do próximo capítulo vamos iniciar o estudo da dinâmica, que é o estudo dos movimentos dos corpos levando em conta as suas causas.

O assunto agora é o **movimento vertical, o lançamento horizontal e o lançamento oblíquo, todos no vácuo.**

Nos livros tradicionais esses assuntos são tratados com nomenclaturas diferentes, mas os conceitos e as fórmulas envolvidas são as mesmas.

Vou lançar três perguntinhas básicas para serem respondidas ao final do estudo, acredito que você será capaz de respondê-las prontamente após a abordagem de todos os conceitos teóricos e da resolução de alguns exemplos durante a teoria.

Perguntas do dia:

- 1. No vácuo, quem chega primeiro ao solo, ao ser abandonados de uma mesma altura, um elefante ou um gato?**
- 2. No vácuo, quem chega primeiro ao solo, um lápis lançado horizontalmente de uma mesa ou uma borracha que cai verticalmente da mesma mesa?**
- 3. Para atingirmos um ponto mais longe possível de um ponto de lançamento de um projétil, qual o ângulo de inclinação que devemos ter em relação à horizontal para conseguirmos atingir o nosso objetivo?**

O movimento vertical no vácuo é simples de ser entendido, isso porque ele é, na verdade, um caso particular de movimento retilíneo e uniformemente variado, vamos constatar esse fato.



Ora, se temos vácuo, a única aceleração presente em qualquer corpo será a da gravidade, ou seja, **g**. Assim, todos os corpos estarão sujeitos à mesma aceleração, que, diga-se de passagem, é constante nas proximidades da superfície terrestre.

Se todos os corpos estarão sujeitos à aceleração da gravidade, que é constante, então estamos diante de um movimento retilíneo, afinal de contas a trajetória será sempre vertical, o próprio nome já diz, cuja aceleração é constante, ou seja, será um **MRUV**.

CONCLUSÃO:

TODO MVV É UM MRUV

Essa conclusão será muito importante para o desenvolvimento matemático do assunto, pois poderemos fazer uso de todas as equações do **MRUV**, já vistas nos blocos anteriores.

6.1 QUEDA LIVRE

O primeiro tipo de movimento vertical no vácuo que vamos estudar é o movimento de queda livre, primeiramente precisamos entender qual o conceito da queda livre para depois partimos para a matemática envolvida.

A queda livre é um movimento vertical no vácuo no qual algumas particularidades estão presentes:

- **Velocidade inicial nula: $V_0 = 0$.**
- **Altura inicial em relação ao solo diferente de zero: $H_0 \neq 0$.**

Assim, podemos afirmar que toda queda livre tem velocidade inicial nula.



As frases que nos permitem identificar uma queda livre são: “**abandona-se um corpo...**”, “**larga-se um objeto...**”, “**solta-se um bloco...**”, etc.

Entendido o conceito e a identificação de uma questão de queda livre, vamos observar a figura abaixo para que possamos construir o nosso raciocínio matemático e descobrir algumas importantes fórmulas que serão relevantes para a resolução das questões.

Queda Livre



A primeira observação a ser feita é a seguinte:

Na queda livre **nenhuma variável cinemática depende da massa do corpo**, uma vez que todos os corpos estão sujeitos à aceleração da gravidade, independentemente de suas respectivas massas.

Na sequência, podemos afirmar que o movimento de queda livre é “**ajudado**” pela aceleração da **gravidade**, o que nos permite afirmar que é um movimento **acelerado**, pois à medida que o tempo passa, a velocidade aumenta o seu módulo.

Vamos a alguns cálculos importantes para o movimento de queda livre.



6.1.1 CÁLCULO DO TEMPO DE QUEDA

Esse é realmente um dos cálculos mais comuns em questões de provas. Vamos calcular o tempo de queda em função da aceleração da gravidade e da altura inicial de queda.

O tempo de queda será calculado com base nas equações do movimento retilíneo e uniformemente variado, que são:

1. $S = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$ - Equação horária da posição do MRUV.

2. $V = V_0 + a \cdot t$ - Equação horária da velocidade do MRUV

3. $V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$ - Equação de Torricelli.

Vamos usar uma equação que envolva tempo, portanto, temos duas opções a equação 1 ou a equação 2, no entanto, a equação 2 carrega em si a velocidade final do movimento de queda, o que não sabemos ainda. Assim, temos que usar a equação 1, da seguinte forma



$$S = S_0 + V_0.t + \frac{at^2}{2}$$
$$H = 0 + 0.t + \frac{gt^2}{2}$$
$$H = \frac{gt^2}{2}$$
$$t_q = \sqrt{\frac{2.H}{g}}$$

Portanto, o tempo de queda depende apenas da **altura de queda** e da **aceleração da gravidade**.

Essa fórmula será muito utilizada nas questões, portanto, memorize-a, ou então aplique a equação horária da posição em seus cálculos.

6.1.2 CÁLCULO DA VELOCIDADE FINAL

A velocidade final do corpo quando chega ao solo é outra variável cinemática muito perguntada em provas e concursos.

O seu cálculo também segue as equações do MRUV para a queda livre, no entanto, vamos utilizar a equação de **Torricelli**. Vejamos:

$$V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$$
$$V^2 = 2g(H - 0)$$
$$V = \sqrt{2gH}$$



Assim, a velocidade final depende apenas da **altura de queda** e da **aceleração da gravidade**.

OBS.: Esse cálculo pode ser feito também a partir dos conceitos de conservação de energia, mas esse assunto será dado apenas nos próximos capítulos.

A respeito de queda livre, podemos afirmar que em provas são cobradas comumente essas duas fórmulas demonstradas acima. As demais questões são mais aprofundadas e não merecem a memorização de fórmulas, nesse tipo de problema a dica é raciocinar o fenômeno e aplicar uma ou mais fórmulas do MRUV.

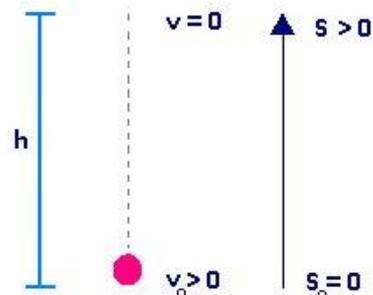
6.2 LANÇAMENTO VERTICAL PARA CIMA

O movimento de lançamento vertical para cima é mais um caso particular de movimento retilíneo uniformemente variado, sujeito à aceleração da gravidade.

Nesse caso temos algumas particularidades, que poderão ser vistas no esquema abaixo que o resume:



Lançamento Vertical para Cima



$$a < 0$$

$v > 0$, portanto o mov. é retardado

No ponto mais alto a velocidade é zero, mas a aceleração é constante.

O tempo de subida é igual ao tempo de descida, assim como a velocidade.

Note algumas particularidades em relação ao movimento de lançamento vertical para cima:

- **O corpo pode ser lançado do solo ou de um ponto a certa altura inicial.**
- **A velocidade inicial deve ser não nula: $V_0 \neq 0$.**
- **O movimento é retardado na subida e acelerado na descida.**

Perceba que a segunda observação é de fundamental importância, pois não haverá lançamento vertical para cima, caso a velocidade inicial seja nula.

A classificação do movimento como retardado na subida se deve ao fato de ele ter velocidade e aceleração (gravidade) com sentidos opostos e na descida ele é acelerado, pois a velocidade inverte seu sentido, sendo, portanto, acelerado.

O corpo pode ser lançado do solo ou então de um ponto a certa altura do solo.



6.2.1 CÁLCULO DO TEMPO DE SUBIDA:

O tempo de subida é o tempo necessário para que o corpo chegue ao topo de sua trajetória, momento no qual sua **velocidade vertical é nula**.

Assim, como queremos uma fórmula matemática que relacione o tempo de subida com a velocidade inicial e a aceleração da gravidade, podemos fazer uso da equação horária da velocidade, pois nela estão presentes todas essas variáveis. Vejamos:

$$V = V_0 + a.t$$

Lembre-se de que a velocidade final do corpo é nula, pois ao final da subida ele fica **momentaneamente em repouso** para daí então iniciar o movimento acelerado de descida.



Professor, é claro que no ponto mais alto a velocidade do corpo é zero, pois se não fosse assim, ele continuaria subindo e esse ponto não seria o mais alto da trajetória.

Muito bem Aderbal! Assim é que se fala, vejo que você já está pegando o jeito dos movimentos verticais.

Aplicando então:

- $V = 0$



- $a = g$

Temos:

$$\begin{aligned}V &= V_0 + a.t \\ 0 &= V_0 - gt_{SUB} \\ gt_{SUB} &= V_0 \\ t_{SUB} &= \frac{V_0}{g}\end{aligned}$$

Portanto, temos acima uma fórmula que relaciona o tempo de subida com a velocidade inicial e a aceleração da gravidade.

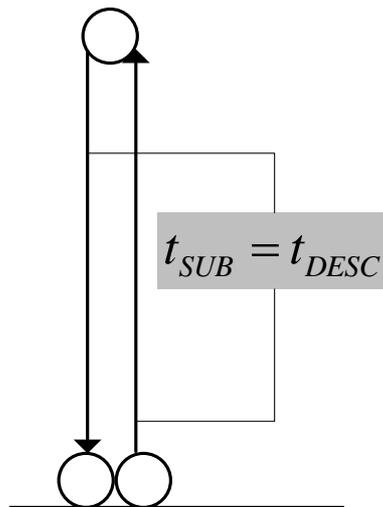
É importante observar que o corpo efetuará uma descida após atingir o topo da trajetória. E algumas informações sobre essa descida são fundamentais e devem ser lembradas.

a) O tempo de descida é igual ao tempo de subida:

Existe uma **simetria entre a subida e a descida**, de modo que a descida se processa como a subida. Portanto, os tempos devem ser iguais.

Assim,





b) Simetria entre a subida e descida:

Algumas consequências da simetria podem ser observadas:

- **O primeiro segundo de subida é equivalente ao último segundo de queda.**
- **O último segundo de subida é equivalente ao primeiro segundo de descida.**



Professor, eu ainda não entendi a principal consequência dessa simetria.

Caro Aderbal, a principal consequência é a **distância percorrida** em trechos simétricos, que **serão as mesmas**. Assim, quando lhe for perguntado qual a distância percorrida no último segundo de subida, qual a sua resposta?





Professor, realmente é complicado responder a sua pergunta, mas eu acho que podemos usar a simetria.

Exatamente Aderbal, vamos usar a simetria e também vamos usar essa pergunta como exemplo.

Exemplo 1: Qual a distância percorrida por um corpo no seu último segundo de subida?

Resposta: Essa distância é equivalente à percorrida durante o primeiro segundo de queda. Assim, basta calcular a altura percorrida por um corpo em queda livre durante 1s.

$$t_q = \sqrt{\frac{2.H}{g}}$$
$$1 = \sqrt{\frac{2.H}{10}}$$
$$1 = \frac{H}{5}$$
$$H = 5m$$

Portanto, em um segundo de queda um corpo percorre 5m.

Assim, no último segundo de subida acontece a mesma coisa, ou seja, o corpo percorre 5m.



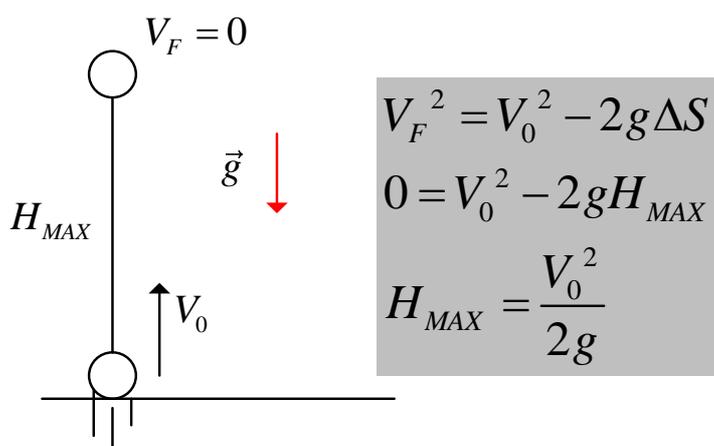
6.2.2 CÁLCULO DA ALTURA MÁXIMA

A altura máxima também será calculada de acordo com as equações do movimento uniformemente variado.

A equação ideal para o cálculo dessa altura é a de Torricelli, pois envolve velocidades, aceleração e espaços percorridos.

- Velocidade inicial: \mathbf{V}_0
- Velocidade final: $\mathbf{V}_F = \mathbf{0}$
- Variação da posição: $\Delta\mathbf{S} = \mathbf{H}_{MAX}$

Aplicando na equação de Torricelli:



Logo, a altura máxima atingida depende apenas da velocidade inicial e da aceleração da gravidade, como previsto.

Exemplo 2: Em uma obra de construção civil um operário, no solo, necessita arremessar um tijolo para seu companheiro de trabalho que se encontra no andar de cima da construção. Sabendo que o piso superior onde se encontra o colega que receberá o tijolo tem 2,45m de altura em relação ao solo, calcule a velocidade mínima com que deve ser arremessado o tijolo. ($g = 10\text{m/s}^2$).



Resolução: Nessa questão, basta que nós calculemos a velocidade inicial e suponhamos que o radar chega ao piso superior em repouso. Assim, aplicando a fórmula já vista:

$$H_{MAX} = \frac{V_0^2}{2g}$$
$$2,45 = \frac{V_0^2}{2 \cdot 10}$$
$$V_0^2 = 49$$
$$V_0 = 7m/s$$

6.3. LANÇAMENTO VERTICAL PARA BAIXO:

O movimento de lançamento vertical para baixo merece poucos comentários, pois além de ser incomum em provas, não possui nenhuma fórmula **já pronta** para o cálculo de qualquer dado cinemático (alturas, velocidades, tempos, etc.).

Assim, para o estudo desse movimento vamos adotar as equações do movimento retilíneo uniformemente variado, com as devidas adaptações.

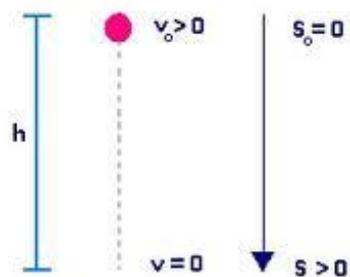
Acerca do lançamento vertical para baixo podem ser feitas as seguintes observações:

- **O movimento é acelerado. (a velocidade aumenta com o tempo).**
- **A velocidade inicial é diferente de zero: $V_0 \neq 0$.**
- **Deve ser lançado de certa altura em relação ao solo.**



Observe a figura abaixo na qual temos representado esquematicamente esse movimento:

Lançamento Vertical para Baixo



$a > 0$
 $v > 0$, portanto o mov. é acelerado

Ademais, apenas recomendo o uso das fórmulas do movimento retilíneo e uniformemente variado.

1. $S = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$ - Equação horária da posição do MRUV

2. $V = V_0 + a \cdot t$ - Equação horária da velocidade do MRUV

3. $V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$ - Equação de Torricelli.

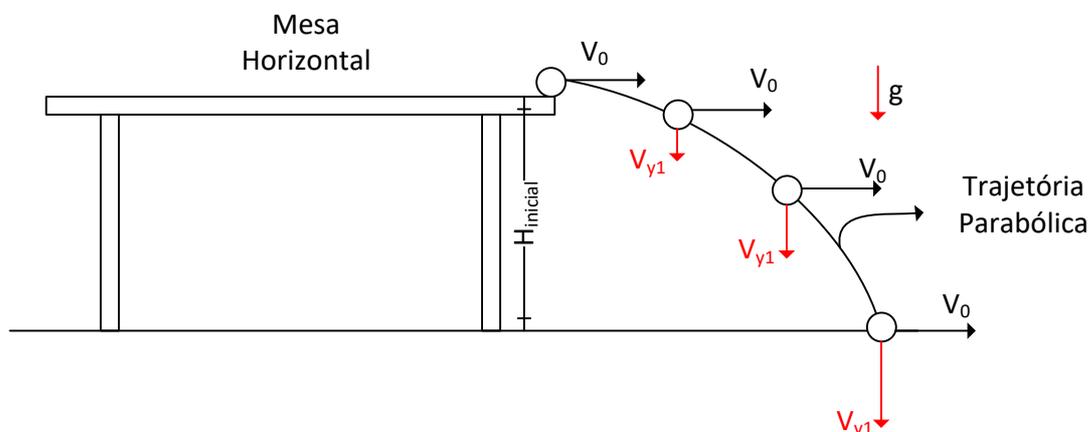


6.4. LANÇAMENTO HORIZONTAL NO VÁCUO

O **lançamento horizontal no vácuo** tem como principal diferença, em relação ao movimento vertical no vácuo visto nos tópicos anteriores, a direção da velocidade inicial, que neste último caso será **exclusivamente horizontal**.

Outro fato importante é a altura inicial, no lançamento horizontal temos que lançar o corpo **necessariamente de uma altura inicial**.

Para exemplificar o movimento descrito:



Algumas observações devem ser feitas acerca desse movimento:

a) O movimento horizontal é uniforme.

Note que a única aceleração presente no movimento é a da gravidade, que é vertical, portanto, temos um caso de movimento uniforme em "X (horizontal)".

Assim, o movimento em "X" é uniforme, com velocidade constante, o que implica que na horizontal a velocidade inicial se conserva, mantendo-se sempre igual a V_0 .



$$V_x = V_0 \text{ (constante)}$$

b) O movimento vertical é uniformemente variado.

Perceba que na vertical temos a presença da aceleração da gravidade, portanto se trata de um caso de movimento uniformemente variado, sujeito à aceleração da gravidade.

A principal consequência é o fato de que a velocidade vertical é variável.

$$V_y = \text{variável (crescente)}$$

Como a velocidade é crescente, estamos diante de um caso de **movimento uniformemente variado do tipo acelerado**.

As equações que vão ditar esse movimento vertical são as equações do movimento uniformemente variado, ou seja:

1. $S = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$ - Equação horária da posição do MRUV

2. $V = V_0 + a \cdot t$ - Equação horária da velocidade do MRUV

3. $V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$ - Equação de Torricelli.





Professor, eu estou percebendo que o movimento vertical é, aparentemente, uma queda livre

É exatamente isso Aderbal, o lançamento horizontal é uma **composição de uma queda livre com um movimento uniforme na horizontal**.

É como se tivéssemos pegado uma queda livre e "arrastado" ela com uma velocidade horizontal V_0 .

c) A trajetória é parabólica

Podemos provar que a altura "y" varia de acordo com a distância horizontal "x" de acordo com a função matemática abaixo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Para isso basta verificar que em X o movimento é uniforme, o que nos permite escrever:

$$X = X_0 + V_x \cdot t$$

$$X = 0 + V_0 \cdot t$$

isolando t :

$$t = \frac{x}{V_0}$$



Podemos agora utilizar o movimento vertical. Vamos adotar o sentido positivo como sendo o sentido para baixo, portanto a gravidade será positiva, pois aponta para baixo. A origem do sistema cartesiano será o ponto de lançamento.

$$Y = Y_0 + V_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$Y = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$Y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{V_0} \right)^2$$

$$Y = \frac{g}{2 \cdot V_0^2} \cdot x^2$$

Veja que a relação entre X e Y foi a relação que esperávamos, do tipo: $y = ax^2 + bx + c$, com b e c nulos.

6.4.1 CÁLCULO DO TEMPO DE QUEDA

O tempo de queda será calculado de acordo com o movimento vertical, afinal de contas trata-se de uma característica da queda.

Como é um movimento vertical do tipo queda livre, podemos afirmar que o tempo de queda é idêntico ao tempo de queda caso tivéssemos apenas abandonado o corpo da mesa.



Assim,

$$t_q = \sqrt{\frac{2.H_{inicial}}{g}}$$



Professor, quer dizer que se eu abandonar um corpo verticalmente e outro horizontalmente eles vão chegar ao mesmo tempo no solo ?

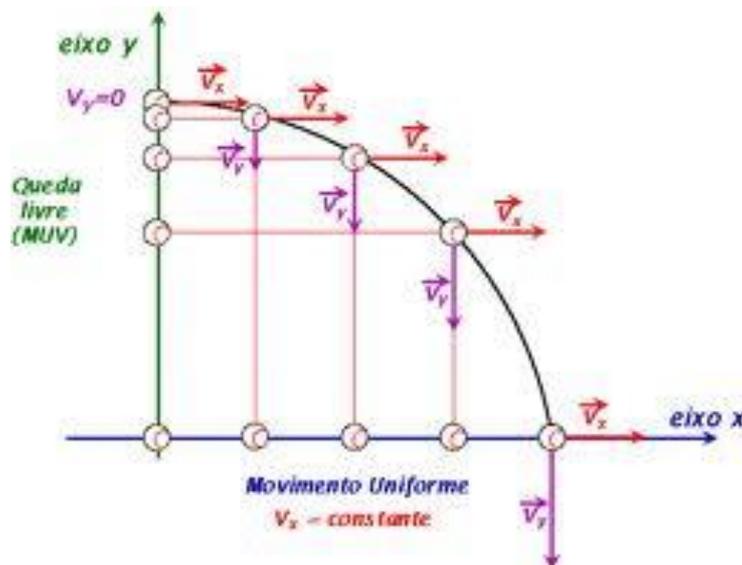
Exatamente, Aderbal, parece curioso, pois você vai pensar inicialmente que o corpo abandonado verticalmente chega mais rápido porque percorre uma distância menor, no entanto, existe um princípio na Física chamado princípio de Galileu, e esse nobre colega de ciência disse certa vez a frase abaixo:

“Em um movimento composto, os movimentos são independentes, e o tempo não depende do movimento de arrastamento”.

Assim, os tempos são os mesmos, chegando ao solo ambos ao mesmo tempo.



Observe a figura abaixo onde essa situação aparece esquematizada de forma prática.



Ambas as bolas de tênis chegam ao solo no mesmo instante de tempo, **caso entrem em movimento no mesmo momento.**

6.4.2 CÁLCULO DO ALCANCE HORIZONTAL

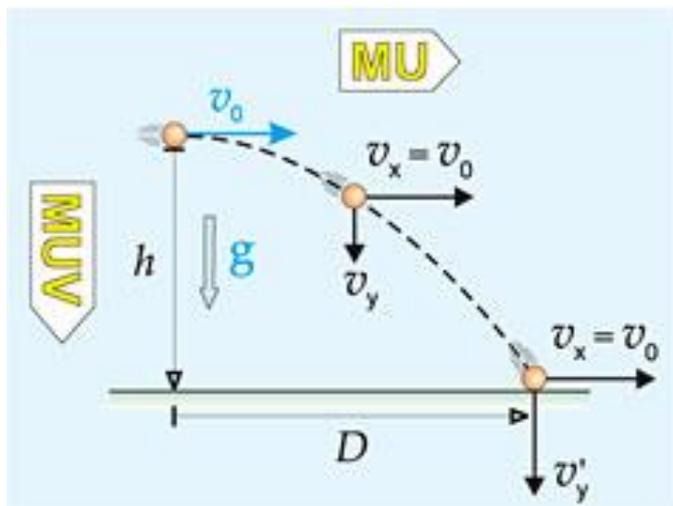
A primeira coisa que deve ficar clara é: **“o que é o alcance horizontal?”**.

Bom, inicialmente podemos afirmar que se trata de uma **distância horizontal**, pois o próprio nome já identifica.

Assim, podemos afirmar que basta calcular a distância horizontal percorrida pelo corpo durante o intervalo de tempo igual ao tempo de queda.

Observe o alcance horizontal na figura abaixo:





O alcance horizontal está representado pela distância D na figura acima.

Como é uma distância horizontal, na verdade é o ΔS na horizontal para um Δt igual ao tempo de queda.

Assim, podemos escrever:

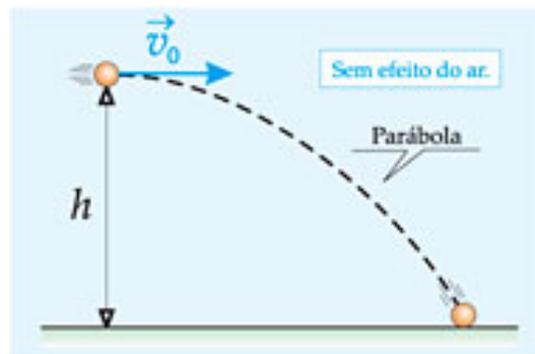
$$V_x = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$
$$V_x = \frac{A}{t_q}$$
$$A = V_x \cdot t_q$$
$$A = V_0 \cdot \sqrt{\frac{2H_{inicial}}{g}}$$

Portanto, demonstrada está a fórmula do alcance horizontal, que depende apenas da altura inicial, da velocidade inicial de lançamento e da aceleração da gravidade.



Exemplo 3: (Vinicius Silva) Uma equipe de policiais foi designada para inspecionar um acidente ocorrido numa rodovia, próximo a um barranco do qual um veículo teria sido lançado horizontalmente. Deseja-se calcular a velocidade do automóvel quando foi lançado do barranco, que possui uma altura de 5m em relação ao plano horizontal em que foi encontrado. Sabendo que o carro caiu em um ponto distante 25m horizontalmente do ponto de lançamento, ajude a equipe de policiais a responder no relatório do acidente se o carro excedia a velocidade máxima da via (80km/h) no momento que foi lançado. Dado: $g = 10\text{m/s}^2$

Resolução: Trata-se de um problema clássico de cálculo de velocidades de lançamento horizontal, no qual podemos lançar mão da equação demonstrada acima para avaliar aproximadamente o valor da velocidade inicial do veículo. Obviamente vamos desconsiderar o efeito do ar e os eventuais atritos.



A bolinha acima pode ser considerada como se fosse o carro. A altura h é a altura do barranco.

Aplicando a fórmula do alcance, que nesse caso foi de 25m:



$$A = V_0 \cdot \sqrt{\frac{2H_{inicial}}{g}}$$
$$25 = V_0 \cdot \sqrt{\frac{2.5}{10}}$$
$$V_0 = 25m / s$$
$$V_0 = 25.3,6km / h$$
$$V_0 = 90km / h$$

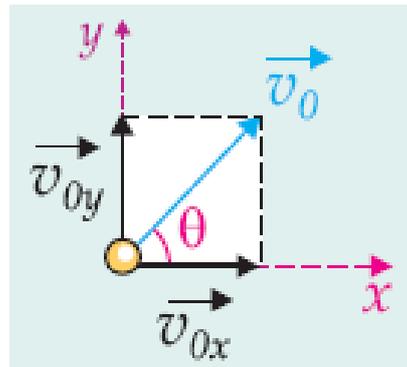
Assim, podemos afirmar que o veículo excedia a velocidade máxima da via quando foi lançado para fora da estrada.

6.5. LANÇAMENTO OBLÍQUO

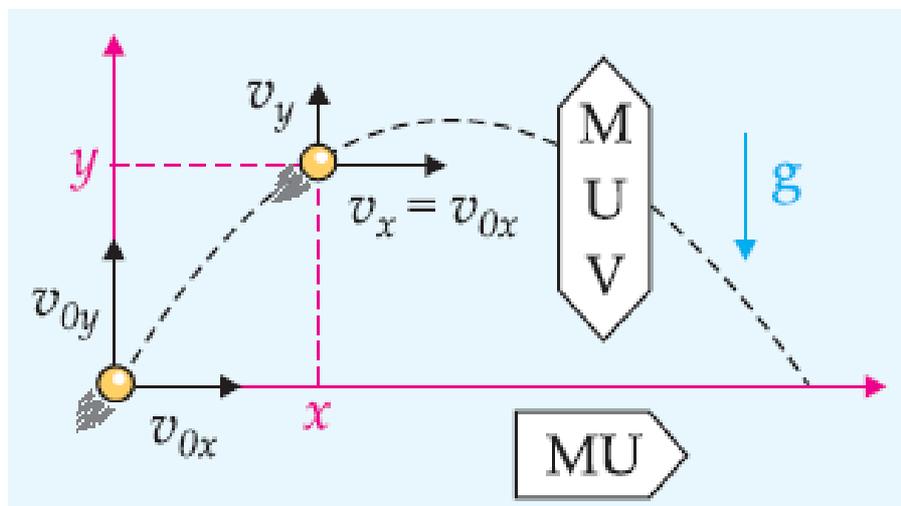
O lançamento oblíquo possui uma diferença básica em relação aos movimentos de lançamento horizontal e vertical.

No lançamento oblíquo a velocidade inicial é inclinada em relação à horizontal, de um ângulo θ . Observe as figuras abaixo na qual podemos observar a velocidade inicial inclinada do corpo, bem como o movimento desse tipo:





(velocidade inicial decomposta)



Vamos fazer as devidas observações acerca desse movimento:

a) Movimento horizontal (em "x"):

O movimento horizontal é mais uma vez, assim como o era no caso do lançamento horizontal, um movimento uniforme com velocidade constante. Não possuímos qualquer tipo de aceleração nessa direção, o que nos permite afirmar que o movimento não sofre aumento ou redução de velocidade.



b) Movimento vertical (em "y"):

O movimento vertical é uniformemente variado, pois na vertical temos a presença da aceleração da gravidade, vertical e para baixo. Assim, o movimento vertical assemelha-se a um lançamento vertical para cima, com as mesmas características de tempo de subida, tempo de descida e altura máxima.

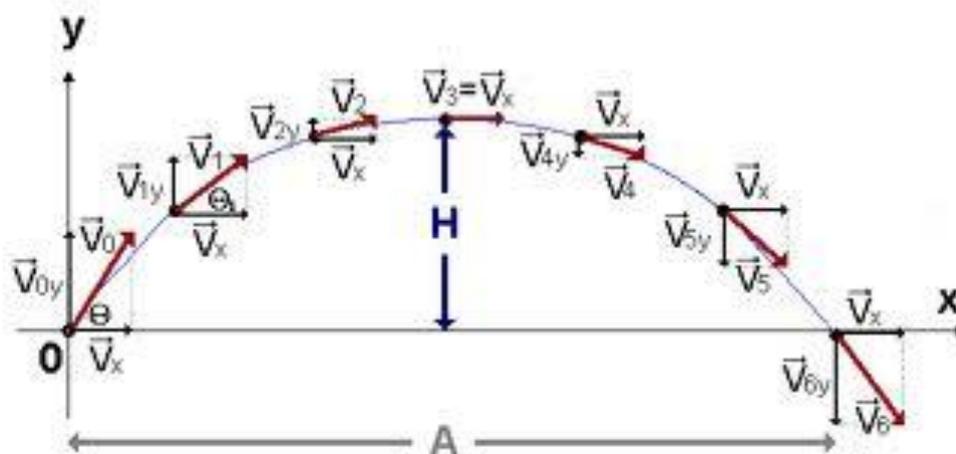


Professor, podemos dizer então que o lançamento oblíquo é uma composição de um lançamento vertical para cima com um movimento uniforme na horizontal?

Exatamente Aderbal! E lembre-se que, de acordo com o princípio de Galileu, já explicado anteriormente, esses movimento são independentes.

Observe a figura abaixo na qual podemos ver mais uma vez o movimento de lançamento oblíquo:

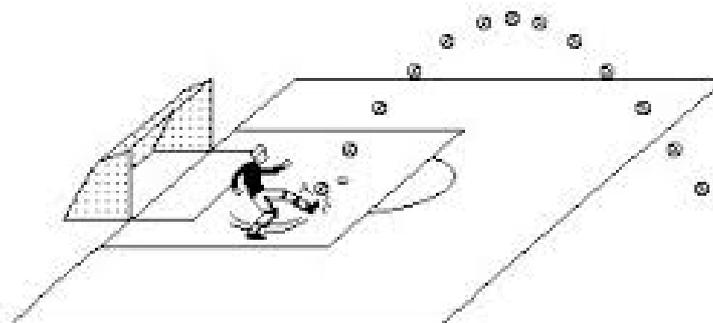


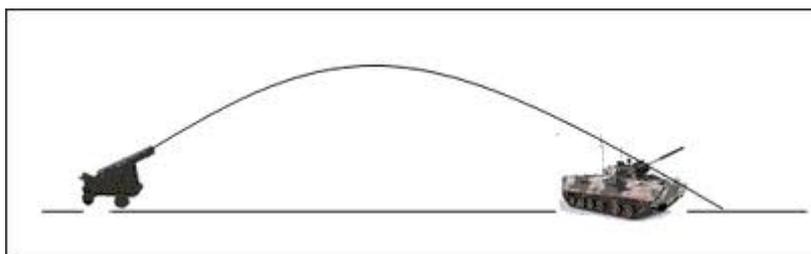


Note na figura acima que a velocidade horizontal mantém-se constante e sempre igual a V_x , enquanto que a velocidade vertical aumenta e reduz o seu valor de acordo com instante de tempo considerado.

Perceba que a velocidade vertical no ponto de altura máxima é nula, e esse fato será muito importante nas demonstrações das fórmulas nos itens seguintes.

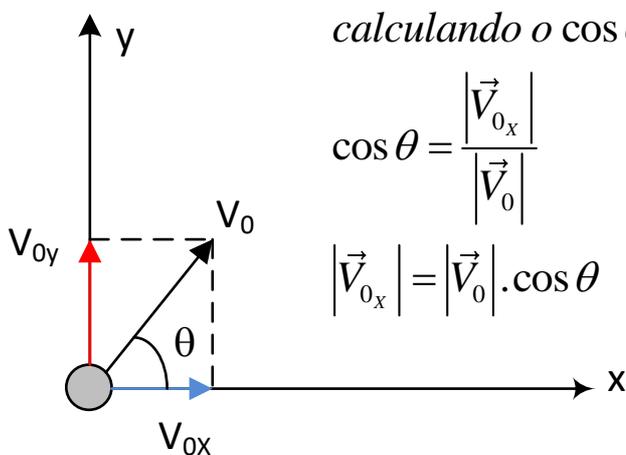
O lançamento oblíquo é muito comum na vida prática, podemos percebê-lo em um jogo de futebol, quando o goleiro bate um tiro de meta, ou em balística, quando um projétil é lançado contra o inimigo.





6.5.1 A DECOMPOSIÇÃO DA VELOCIDADE INICIAL

A velocidade inicial pode e deve ser decomposta nas direções vertical e horizontal. Vamos ver como se faz essa decomposição:



calculando o $\cos \theta$: calculando o $\text{sen} \theta$:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{V}_{0x}|}{|\vec{V}_0|}$$

$$\text{sen} \theta = \frac{|\vec{V}_{0y}|}{|\vec{V}_0|}$$

$$|\vec{V}_{0x}| = |\vec{V}_0| \cdot \cos \theta$$

$$|\vec{V}_{0y}| = |\vec{V}_0| \cdot \text{sen} \theta$$

Vamos utilizar a decomposição acima nos cálculos das fórmulas a serem demonstradas.



6.5.2 CÁLCULO DO TEMPO DE SUBIDA, DO TEMPO DE SUBIDA E DO TEMPO TOTAL

Note que a subida é um movimento de lançamento vertical, ou seja, vamos usar as equações do movimento retilíneo e uniformemente variado.

Vamos pensar um pouco:

Você precisa calcular um tempo, o que nos remete a duas equações:

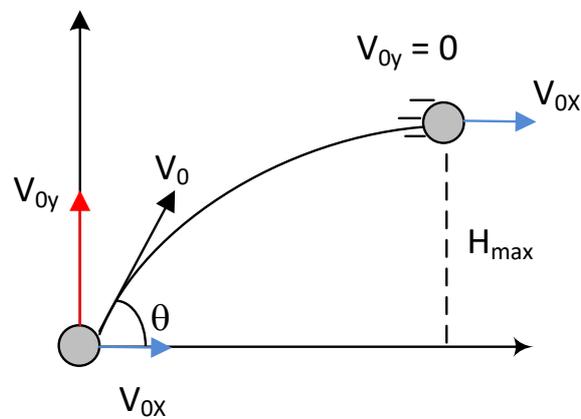
1. $S = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$ - Equação horária da posição do MRUV

2. $V = V_0 + a \cdot t$ - Equação horária da velocidade do MRUV

Ocorre que a primeira equação envolve espaços, que, a primeira vista, não é uma tarefa simples determiná-los nesse momento da aula. Vamos preferir utilizar a segunda equação, uma vez que sabemos que ao final da subida o corpo apresenta velocidade vertical nula.

Assim, aplicando a equação 2 no eixo vertical (eixo Y):





$$V_y = V_{0y} - g \cdot t_{sub}$$

como $V_y = 0$:

$$0 = V_{0y} - g t_{sub}$$
$$t_{sub} = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{V_0 \cdot \text{sen}\theta}{g}$$

Perceba que temos uma equação que depende apenas da inclinação do lançamento (θ), da velocidade inicial e da aceleração da gravidade.

Quanto ao tempo de descida, facilmente podemos afirmar que é igual ao tempo de subida, pois é um caso clássico de simetria entre a subida e a descida.

Lembre-se de que para pontos a mesma altura na subida e na descida podemos afirmar o seguinte:

- Possuem a mesma velocidade, porém em sentidos opostos.

Assim,



$$t_{desc.} = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{V_0 \cdot \text{sen}\theta}{g}$$

O tempo total é simples, pois basta notar que o tempo para subir e descer é a soma do tempo de subida e do tempo de descida, mas lembre-se de que são dois tempos iguais:

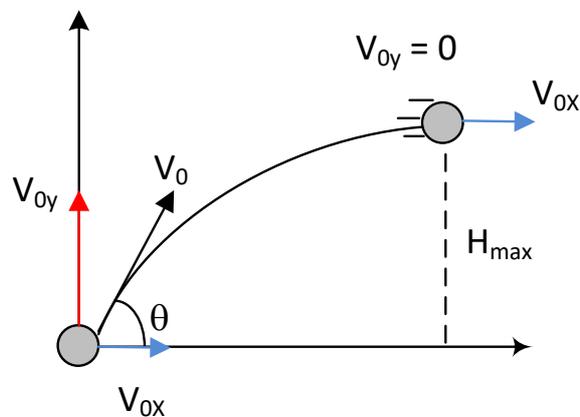
$$t_{desc.} + t_{sub.} = \frac{V_{0y}}{g} + \frac{V_{0y}}{g}$$
$$t_{total} = \frac{2 \cdot V_{0y}}{g}$$
$$t_{total} = \frac{2 \cdot V_0 \cdot \text{sen}\theta}{g}$$

6.5.3 CÁLCULO DA ALTURA MÁXIMA

A altura máxima é uma distância vertical e deve ser calculada mediante a aplicação de uma das fórmulas do movimento retilíneo e uniformemente variado.

Observe a figura abaixo onde podemos observar que no movimento vertical a altura máxima é o ΔS vertical enquanto a velocidade vertical passa de V_{0y} para zero.





Usando a equação de Torricelli para calcular a $H_{MÁX}$:

$$V_Y^2 = V_{0y}^2 + 2aH_{MÁX}$$
$$0 = V_{0y}^2 - 2 \cdot g \cdot H_{MÁX}$$
$$H_{MÁX} = \frac{V_{0y}^2}{2 \cdot g} = \frac{V_0^2 \cdot \text{sen}^2(\theta)}{2 \cdot g}$$

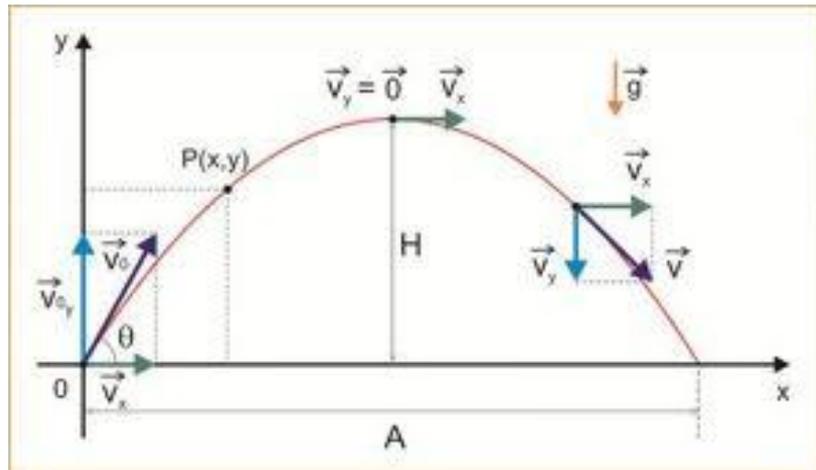
A altura máxima depende então da velocidade inicial, do ângulo de lançamento e da aceleração da gravidade.

6.5.4 CÁLCULO DO ALCANCE HORIZONTAL

Chegamos a um ponto muito interessante do assunto, que é o cálculo do alcance horizontal, que nada mais é do que a distância horizontal que um corpo alcança quando regressa ao solo.

Veja na figura abaixo o alcance representado pela letra A:





O alcance horizontal é uma distância horizontal e devemos, portanto, utilizar a equação do movimento uniforme (velocidade constante):

$$V_{0_x} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$
$$V_{0_x} = \frac{A}{t_{total}}$$
$$A = V_{0_x} \cdot t_{total}$$
$$A = V_{0_x} \cdot \frac{2 \cdot V_{0_y}}{g}$$
$$A = \frac{2 \cdot V_{0_x} \cdot V_{0_y}}{g}$$

Essa fórmula é a fórmula base para as demais que vamos demonstrar.



Podemos utilizar as velocidades decompostas em função dos ângulos e deduzir outra fórmula:

$$A = \frac{2.V_{0x}.V_{0y}}{g}$$
$$A = \frac{2.V_0.\text{sen}\theta.V_0 \cos \theta}{g}$$
$$A = \frac{V_0^2 . 2.\text{sen}\theta.\cos \theta}{g}$$

Essa última fórmula envolve a velocidade inicial o ângulo de inclinação e a aceleração da gravidade.

Podemos ainda modificar essa fórmula, bastando para isso lembrar-se de uma relação trigonométrica conhecida:

$$\text{sen}(2.\theta) = 2.\text{sen}\theta.\cos \theta$$

Assim, se aplicarmos essa relação na última equação do alcance demonstrada, teríamos:

$$A = \frac{V_0^2 .\text{sen}(2.\theta)}{g}$$

Essa última fórmula será interessante para o cálculo do alcance máximo a ser detalhado no próximo item.



6.5.4.1 ALCANCE MÁXIMO

Para uma mesma velocidade inicial e uma mesma aceleração da gravidade, pode ser atingido um alcance máximo, para isso basta variar o ângulo de inclinação da velocidade inicial, para que esse intento seja atingido.

Você certamente já deve ter se deparado com a seguinte situação: como faço para atingir um alcance máximo com uma mangueira de jardim apenas variando a inclinação da mangueira em relação à horizontal?

Essa resposta nós daremos ao final da análise do alcance horizontal máximo.

Vamos partir da última fórmula demonstrada:

$$A = \frac{V_0^2 \cdot \text{sen}(2\theta)}{g}$$

Nessa fórmula, para uma mesma velocidade inicial e para um mesmo campo gravitacional, o alcance será modificado quando da modificação do ângulo, assim o termo variante será o $\text{sen}(2\theta)$.

O seno de um ângulo possui uma variação, ou seja, possui um valor máximo e um valor mínimo:

$$1 \leq \text{sen}(2\theta) \leq 1$$

Assim, o valor máximo que o $\text{sen}(2\theta)$ pode assumir é o valor igual a **1**.



Assim, substituindo o valor de $\text{sen}(2\theta) = 1$ na fórmula do alcance teremos:

$$A = \frac{V_0^2 \cdot \text{sen}(2\theta)}{g}$$
$$\text{sen}(2\theta) = 1$$
$$A_{MÁX} = \frac{V_0^2}{g}$$

Portanto, o alcance máximo atingido pelo projétil será dado pela fórmula acima.



Professor, eu ainda não entendi foi qual o ângulo que tenho que inclinar a velocidade inicial para que consiga atingir o alcance máximo.

Bom, para isso basta analisar a condição que foi imposta para o alcance máximo.





Professor, essa condição é a do seno do ângulo igual a 1?

É isso aí Aderbal!

O seno do ângulo deve ser igual a 1 para que tenhamos o alcance máximo.

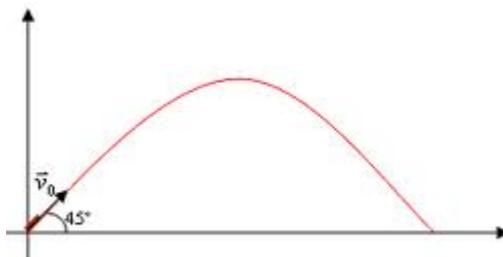
Assim, temos:

$$\text{sen}(2\theta) = 1$$

$$2\theta = 90^\circ$$

$$\theta = 45^\circ$$

Lembre-se de que o seno de um ângulo igual a 1 implica dizer que esse ângulo é igual a 90° ou $90 + n \cdot 360^\circ$. Como não vamos utilizar os outros valores, por serem maiores que o próprio 90° , temos que o ângulo de lançamento igual a 45° implica em alcance máximo.



Para finalizar a teoria, vou fazer um pergunta básica:

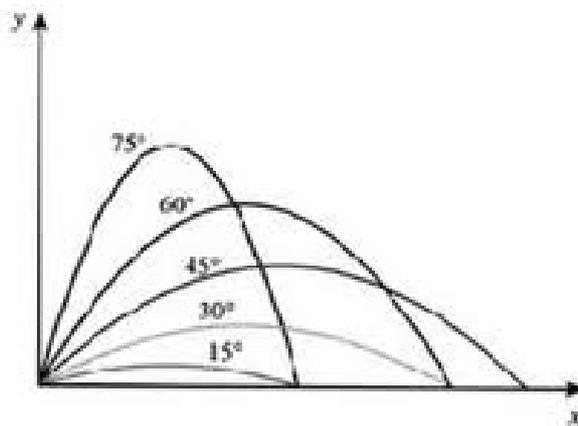
“Pode haver dois alcances horizontais iguais para ângulos de inclinação diferentes?”



A resposta é afirmativa, para isso basta que tenhamos ângulos complementares, ou seja, basta que a soma dos ângulos de lançamento tenham soma igual a 90° .

$$\theta + \alpha = 90^\circ$$

Veja abaixo uma figura onde representamos vários alcances horizontais iguais:

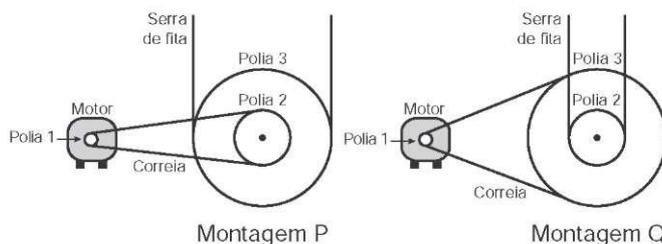


Veja que os alcances iguais são aqueles cuja soma dos ângulos é de 90° .



EXERCÍCIOS COMENTADOS

01. (ENEM – 2013) Para serrar ossos e carnes congeladas, um açougueiro utiliza uma serra de fita que possui três polias e um motor. O equipamento pode ser montado de duas formas diferentes, P e Q. Por questão de segurança, é necessário que a serra possua menor velocidade linear.



Por qual montagem o açougueiro deve optar e qual a justificativa desta opção?

- A) Q, pois as polias 1 e 3 giram com velocidades lineares iguais em pontos periféricos e a que tiver maior raio terá menor frequência.
- B) Q, pois as polias 1 e 3 giram com frequências iguais e a que tiver maior raio terá menor velocidade linear em um ponto periférico.
- C) P, pois as polias 2 e 3 giram com frequências diferentes e a que tiver maior raio terá menor velocidade linear em um ponto periférico.
- D) P, pois as polias 1 e 2 giram com diferentes velocidades lineares em pontos periféricos e a que tiver menor raio terá maior frequência.
- E) Q, pois as polias 2 e 3 giram com diferentes velocidades lineares em pontos periféricos e a que tiver maior raio terá menor frequência.

Resposta: item A.

Comentário:



A questão solicita a montagem que apresentará a menor velocidade da serra, por questões de segurança, esse é um ponto crucial da questão e você deve ficar ligado nisso em questões do ENEM, pois é sempre assim que funciona. A questão vai montar um texto longo e algo dele é importante, sempre há um ponto chave no enunciado da questão.

Então vamos analisar as duas montagens e verificar qual delas apresentará uma menor velocidade para a serra.

Vamos chamar de f_0 a frequência de rotação do motor, que será a mesma nas duas montagens.

Os raios serão chamados de R_1 , R_2 e R_3 , respectivamente das polias 1, 2 e 3. Perceba que

$$R_1 < R_2 < R_3.$$

Essa informação é de suma importância para a compreensão da resolução.

Até aqui tudo bem? Espero que sim.

Vamos agora verificar na montagem P, que as polias 1 e 2 estão ligadas por meio de correia. Voltando a parte teórica você verifica que as frequências são relacionadas pela seguinte fórmula matemática:

$$f_0 \cdot R_1 = f_2 \cdot R_2$$
$$f_2 = \frac{f_0 \cdot R_1}{R_2}$$

A frequência acima é a que a polia 2 possui. Como ela está conectada à polia 3 por meio de um eixo, podemos afirmar que elas terão a mesma frequência. Lembre-se da parte de transmissão de movimentos circulares na teoria da aula.



Assim, a frequência da polia 3 será:

$$f_3 = \frac{f_0 \cdot R_1}{R_2}$$

A velocidade da serra é a velocidade linear de um ponto da periferia da polia 3, e pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} V_3 &= 2 \cdot \pi \cdot R_3 \cdot f_3 \\ V_3 &= 2 \cdot \pi \cdot R_3 \cdot \frac{f_0 \cdot R_1}{R_2} \\ V_3 &= 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2} \\ V_3 &= 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot R_1 \cdot \frac{R_3}{R_2} \end{aligned}$$

Essa é a velocidade da serra na primeira montagem. Vamos utilizar a mesma ideia para calcular a velocidade da serra na montagem Q.

A mudança é que a serra está conectada na polia 2 e a correia liga o motor à polia 3, assim:



$$f_0 \cdot R_1 = f_3 \cdot R_3$$
$$f_3 = \frac{f_0 \cdot R_1}{R_3}$$

Calculando a velocidade linear de um ponto da periferia da polia 2:

$$V_2 = 2 \cdot \pi \cdot R_2 \cdot f_2$$
$$V_3 = 2 \cdot \pi \cdot R_2 \cdot \frac{f_0 \cdot R_1}{R_3}$$
$$V_3 = 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot R_1 \cdot \frac{R_2}{R_3}$$

Agora vamos comparar as duas velocidades.

Veja que a montagem Q leva a uma fração R_2/R_3 e a montagem P leva a uma fração R_3/R_2 . Como $R_2 < R_3$, podemos afirmar que a fração da montagem Q é menor, o que leva a uma velocidade menor.

02. (ENEM – 2012) Uma empresa de transportes precisa efetuar a entrega de uma encomenda o mais breve possível. Para tanto, a equipe de logística analisa o trajeto desde a empresa até o local da entrega. Ela verifica que o trajeto apresenta dois trechos de distâncias diferentes e velocidades máximas permitidas diferentes. No primeiro trecho, a velocidade máxima permitida é de 80 km/h e a distância a ser percorrida é de 80 km. No segundo trecho, cujo comprimento vale 60 km, a velocidade máxima permitida é 120 km/h.

Supondo que as condições de trânsito sejam favoráveis para que o veículo da empresa ande continuamente na velocidade máxima permitida, qual será o tempo necessário, em horas, para a realização da entrega?

A) 0,7



- B) 1,4
- C) 1,5
- D) 2,0
- E) 3,0

Resposta: item C.

Comentário:

Trata-se de uma questão bem simples de cinemática. Essa é aquela que a prova diz assim para você: "por favor, não zere essa prova"!

Vamos calcular o tempo que leva para percorrer cada um dos trechos. O primeiro é muito simples e acredito que dispensa qualquer cálculo, pois para percorrer um trecho de 80km a 80km/h (velocidade máxima permitida) leva um tempo de 1 hora.

O segundo trecho também é muito tranquilo, pois um trecho de 60km a ser percorrido com uma velocidade máxima constante de 120km/h certamente implica em um tempo gasto de 0,5 hora.

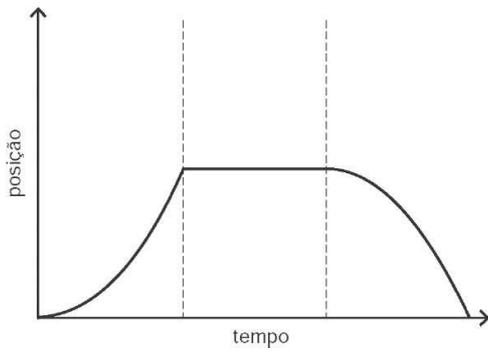
Assim, o tempo total é de 1,5h.

03. (ENEM – 2012) Para melhorar a mobilidade urbana na rede metroviária é necessário minimizar o tempo entre estações. Para isso a administração do metrô de uma grande cidade adotou o seguinte procedimento entre duas estações: a locomotiva parte do repouso com aceleração constante por um terço do tempo de percurso, mantém a velocidade constante por outro terço e reduz sua velocidade com desaceleração constante no trecho final, até parar.

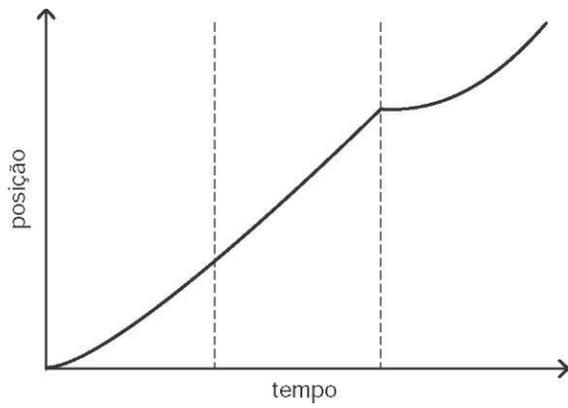
Qual é o gráfico de posição (ixo vertical) em função do tempo (eixo horizontal) que representa o movimento desse trem?



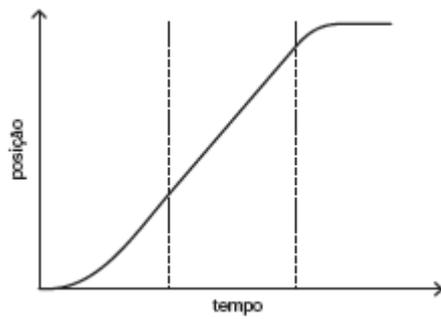
A)



B)

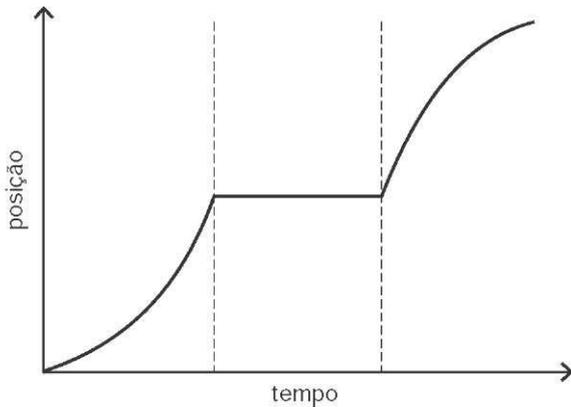


C)

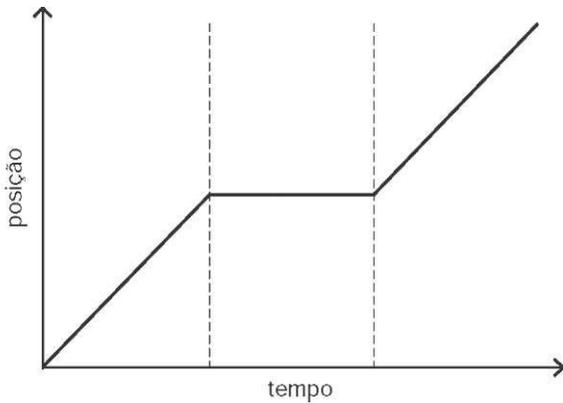


D)





E)



Resposta: item C.

Comentário:

Essa questão é simples, basta você ir por partes e raciocinar cada trecho do movimento.

Veja que o movimento inicialmente é acelerado e progressivo. De acordo com os gráficos vistos na parte teórica temos nesse caso um ramo de parábola com concavidade voltada para cima.

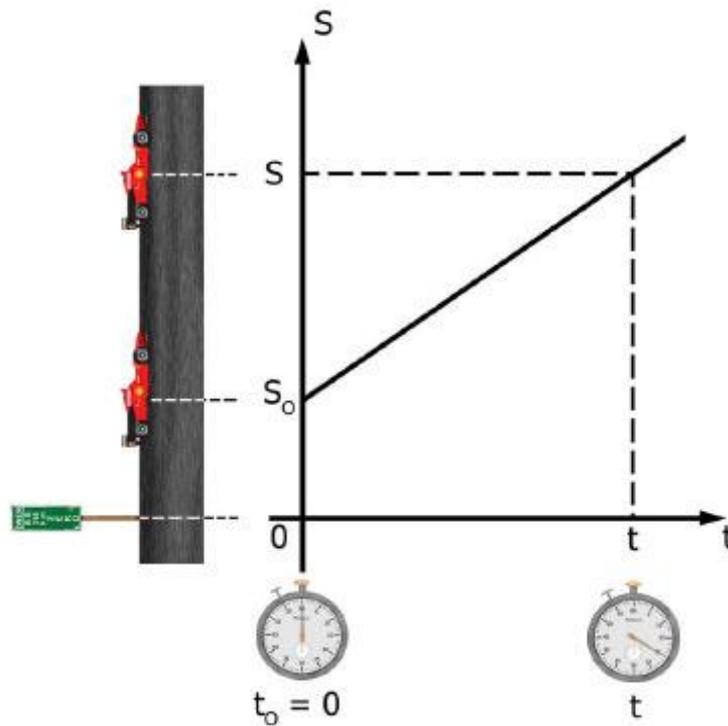




O trecho azul do gráfico é o que procuramos para o primeiro trecho.

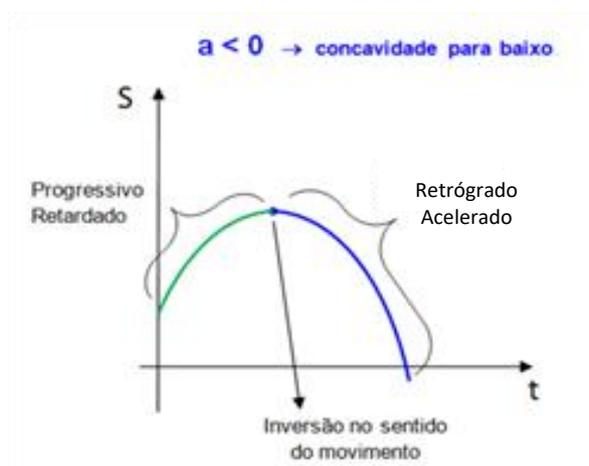
No segundo trecho, a velocidade é mantida constante, logo a figura adequada é uma reta crescente, pois a velocidade é constante, o que nos leva a uma inclinação constante.





Agora o terceiro trecho será um trecho de frenagem. Assim, será progressivo e retardado.

Vejamos então o ramo de parábola:



Estamos falando do trecho em verde na figura acima.

Portanto, esclarecido cada trecho do gráfico, temos o gráfico do item C como o correto para a questão acima.

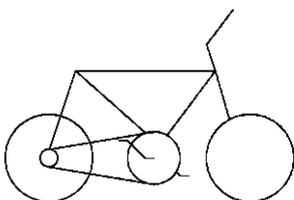
As bicicletas possuem uma corrente que liga uma coroa dentada dianteira, movimentada pelos pedais, a uma coroa localizada no eixo da roda traseira, como mostra a figura.



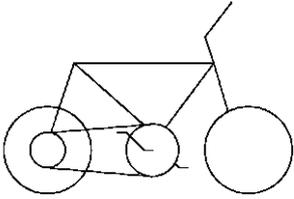
O número de voltas dadas pela roda traseira a cada pedalada depende do tamanho relativo destas coroas.

4. (ENEM – 1998) Em que opção abaixo a roda traseira dá o maior número de voltas por pedalada?

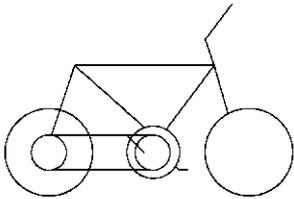
A)



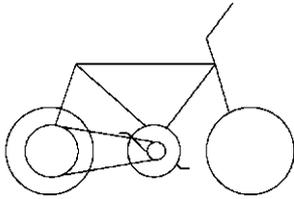
B)



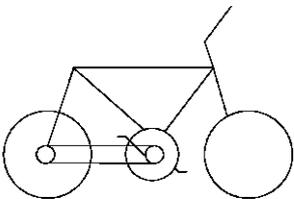
C)



D)



E)



Resposta: item A.

Comentário: Mais uma questão de movimentos circulares, mais precisamente de transmissão de movimentos circulares.



É uma questão simples, mas que exige do aluno uma boa leitura da parte teórica de nosso curso.

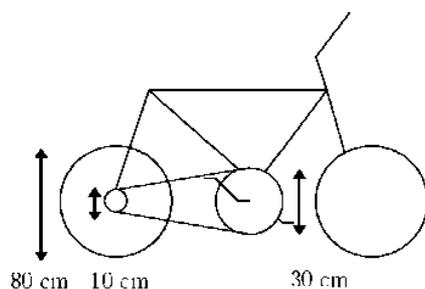
A velocidade da bicicleta será maior quando houver uma grande diferença entre os raios da coroa e da catraca (traseira).

Veja bem, se você quer uma maior velocidade, deve querer uma maior quantidade de voltas da roda traseira por intervalo de tempo.

Para isso você vai precisar de uma frequência alta da roda traseira, ou seja, grande frequência para a catraca traseira. Isso ocorrerá quando estivermos com um raio pequeno da catraca e um raio grande da coroa.

Lembrem-se de que a frequência é o número de voltas pelo intervalo de tempo, e a frequência é inversamente proporcional ao raio, quando a transmissão é por meio de correia.

5. (ENEM – 1998) Quando se dá uma pedalada na bicicleta abaixo (isto é, quando a coroa acionada pelos pedais dá uma volta completa), qual é a distância aproximada percorrida pela bicicleta, sabendo-se que o comprimento de um círculo de raio R é igual a $2\pi R$, onde $\pi \approx 3$?



- (A) 1,2 m
- (B) 2,4 m



- (C) 7,2 m
- (D) 14,4 m
- (E) 48,0 m

Resposta: item C.

Comentário: O texto para essa questão é praticamente o mesmo da anterior. Porém, nesse caso devemos fazer o cálculo da distância percorrida pela bicicleta na situação mostrada de acordo com as medidas fornecidas.

A primeira coisa a se verificar é o número de voltas (frequência) da catraca traseira. Vamos utilizar a fórmula da transmissão de movimentos circulares já vista na parte teórica.

$$\begin{aligned}n_{\text{coroa}} \cdot R_{\text{coroa}} &= n_{\text{catraca}} \cdot R_{\text{catraca}} \\1.15 &= n_{\text{catraca}} \cdot 5 \\n_{\text{catraca}} &= 3 \text{ voltas}\end{aligned}$$

Três voltas da catraca traseira implicam 3 voltas da roda traseira, o que nos leva a uma distância equivalente a três vezes o comprimento da circunferência da roda traseira.

$$\begin{aligned}\Delta S &= 2 \cdot \pi \cdot R \times 3 \\ \Delta S &= 2 \cdot 3 \cdot 0,4 \times 3 \\ \Delta S &= 7,2 \text{ m}\end{aligned}$$

6. (ENEM – 1998) Com relação ao funcionamento de uma bicicleta de marchas, onde cada marcha é uma combinação de uma das coroas dianteiras com uma das coroas traseiras, são formuladas as seguintes afirmativas:



- I. numa bicicleta que tenha duas coroas dianteiras e cinco traseiras, temos um total de dez marchas possíveis onde cada marcha representa a associação de uma das coroas dianteiras com uma das traseiras.
- II. em alta velocidade, convém acionar a coroa dianteira de maior raio com a coroa traseira de maior raio também.
- III. em uma subida íngreme, convém acionar a coroa dianteira de menor raio e a coroa traseira de maior raio.

Entre as afirmações acima, estão corretas:

- (A) I e III apenas.
(B) I, II e III.
(C) I e II apenas.
(D) II apenas.
(E) III apenas.

Comentário: item A.

Comentário:

Nessa questão vamos analisar item por item.

I. Trata-se de uma questão simples, pois cada velocidade na bicicleta é formada por uma dupla de catraca e coroa. Assim, basta aplicar o princípio fundamental da contagem.

$$N_{\text{velocidades}} = 2 \times 5 = 10 \text{ velocidades.}$$

II. Alta velocidade significa que com poucas pedaladas a bicicleta consiga percorrer altas distâncias. Assim, devemos ter muitas voltas da catraca traseira. Para conseguir esse objetivo precisamos acionar uma catraca traseira pequena (raio menor) e uma coroa dianteira grande (raio maior).

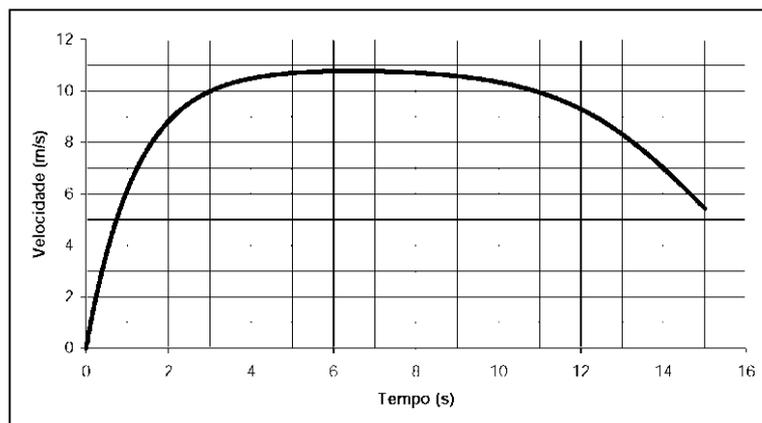


Assim, como o número de voltas é inversamente proporcional ao raio, atingiríamos um grande número de voltas, o que leva a uma distância percorrida maior e logo uma velocidade maior.

III. Em subidas íngremes precisamos de uma marcha que nos leve a poucas voltas na roda traseira, para que a cada intervalo de tempo das pedaladas não haja um aumento de altura brusco, pois isso requer um desprendimento de muita energia, o que leva o ciclista a cansar mais rapidamente.

Portanto, todos os itens estão corretos.

Em uma prova de 100 m rasos, o desempenho típico de um corredor padrão é representado pelo gráfico a seguir:



7. (ENEM – 1998) Baseado no gráfico, em que intervalo de tempo a velocidade do corredor é aproximadamente constante?

- (A) Entre 0 e 1 segundo.
- (B) Entre 1 e 5 segundos.
- (C) Entre 5 e 8 segundos.
- (D) Entre 8 e 11 segundos.



(E) Entre 12 e 15 segundos.

Resposta: item C.

Comentário:

Questão simples. Basta verificar no gráfico o momento em que a velocidade aproximadamente não cresce e nem decresce.

Olhando para o gráfico é simples notar que isso ocorre aproximadamente entre 5 e 8 segundos.

8. (ENEM – 1998) Em que intervalo de tempo o corredor apresenta aceleração máxima?

- (A) Entre 0 e 1 segundo.
- (B) Entre 1 e 5 segundos.
- (C) Entre 5 e 8 segundo.
- (D) Entre 8 e 11 segundos.
- (E) Entre 9 e 15 segundos.

Resposta: item A.

Comentário:

Pessoal, nesta questão a ideia é verificar em que ponto a inclinação da curva é mais acentuada. Pois é nesse ponto que a velocidade cresce mais no menor intervalo de tempo, ou seja, a aceleração é máxima.

Veja na fórmula:



$$a_{m\acute{a}x} = \frac{\Delta V \uparrow}{\Delta t \downarrow}$$

Assim, veja que o intervalo de tempo em que isso ocorre é o que vai de 0 a 1 segundo.

A análise de gráficos é muito interessante e cai bastante em provas do ENEM. Fique ligado na interpretação dos gráficos.

09. (ENEM – 2001)

SEU OLHAR

(Gilberto Gil, 1984)

Na eternidade
Eu quisera ter
Tantos anos-luz
Quantos fosse precisar
Pra cruzar o túnel
Do tempo do seu olhar

Gilberto Gil usa na letra da música a palavra composta **anos-luz**. O sentido prático, em geral, não é obrigatoriamente o mesmo que na ciência. Na Física, um ano luz é uma medida que relaciona a velocidade da luz e o tempo de um ano e que, portanto, se refere a

- (A) tempo.
- (B) aceleração.
- (C) distância.
- (D) velocidade.
- (E) luminosidade.



Resposta: item C.

Comentário:

O ano-luz acaba confundindo muita gente por conta da própria expressão iniciar com a palavra ano, que corresponde a um intervalo de tempo.

No entanto, o conceito de ano-luz é na verdade o seguinte:

Ano-luz é a **distância** que a luz percorre a uma velocidade de $3,0 \times 10^8 \text{m/s}$ durante um intervalo de tempo de um ano.

Assim, fica claro que se trata de uma distância e não de um intervalo de tempo.

Aliás, qual seria a distância em "m" correspondente a um ano-luz?

Primeiramente devemos procurar saber quantos segundos possui um ano.

A resposta é simples basta multiplicar:

$$\Delta t = 365 \times 24 \times 3.600$$

$$\Delta t \cong 3,15 \times 10^7 \text{ s}$$

Agora vamos utilizar esse intervalo de tempo e multiplicar pela velocidade da luz no vácuo:



$$V = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$$
$$\Delta t \cong 3,15 \times 10^7 \text{ s}$$

log o:

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow \Delta S = V \cdot \Delta t$$
$$\Delta S = 3,0 \cdot 10^8 \times 3,15 \times 10^7$$
$$\Delta S = 9,45 \times 10^{15} \text{ m}$$

10. (ENEM – 2002) As cidades de Quito e Cingapura encontram-se próximas à linha do equador e em pontos diametralmente opostos no globo terrestre. Considerando o raio da Terra igual a 6370 km, pode-se afirmar que um avião saindo de Quito, voando em média 800 km/h, descontando as paradas de escala, chega a Cingapura em aproximadamente

- (A) 16 horas.
- (B) 20 horas.
- (C) 25 horas.
- (D) 32 horas.
- (E) 36 horas.

Resposta: item C.

Comentário:

Questão bem simples de ser resolvida. Basta lembrar, além da fórmula da velocidade média, da fórmula do comprimento da circunferência. Nessa questão vamos desconsiderar o efeito de rotação da Terra.

Assim, o comprimento de meia circunferência será dado por:



$$\Delta S = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{2} = \pi \cdot R$$
$$\Delta S = 3,14 \times 6.370 \text{ km}$$
$$\Delta S \cong 20.000 \text{ km}$$

Como a viagem será realizada, em tese, com velocidade constante, então vamos aplicar a fórmula da velocidade média:

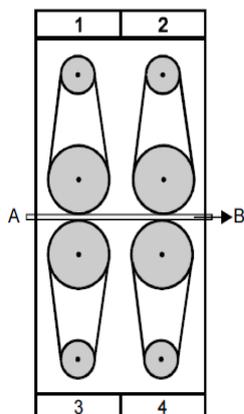
$$\Delta S \cong 20.000 \text{ km}$$
$$\Delta t = ?$$
$$V_m = 800 \text{ km / h}$$

Logo:

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta S}{V_m}$$
$$\Delta t = \frac{20.000 \text{ km}}{800 \text{ km / h}} = 25 \text{ h}$$

11. (ENEM – 2006) Na preparação da madeira em uma indústria de móveis, utiliza-se uma lixadeira constituída de quatro grupos de polias, como ilustra o esquema ao lado. Em cada grupo, duas polias de tamanhos diferentes são interligadas por uma correia provida de lixa. Uma prancha de madeira é empurrada pelas polias, no sentido $A \rightarrow B$ (como indicado no esquema), ao mesmo tempo em que um sistema é acionado para frear seu movimento, de modo que a velocidade da prancha seja inferior à da lixa.





O equipamento acima descrito funciona com os grupos de polias girando da seguinte forma:

- A) 1 e 2 no sentido horário; 3 e 4 no sentido anti-horário.
- B) 1 e 3 no sentido horário; 2 e 4 no sentido anti-horário.
- C) 1 e 2 no sentido anti-horário; 3 e 4 no sentido horário.
- D) 1 e 4 no sentido horário; 2 e 3 no sentido anti-horário.
- E) 1, 2, 3 e 4 no sentido anti-horário.

Resposta: item C.

Comentário:

A polia 1 gira no sentido anti-horário, basta verificar o sentido do movimento da prancha e o respectivo movimento de rotação da polia 1. A mesma análise pode ser feita para a polia 2.

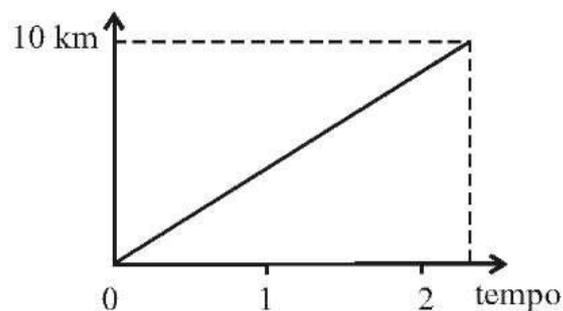


Por outro lado, as polias 3 e 4, para que possam proporcionar o movimento da prancha de madeira devem girar no sentido horário.

Pronto, a questão está resolvida.

Deixo uma dica forte para você que está estudando movimentos circulares. O ENEM adora esse tipo de questão, envolvendo a transmissão de movimentos circulares, e muitas vezes o conhecimento da teoria por trás dos diversos casos.

12. (ENEM – 2008) O gráfico ao lado modela a distância percorrida, em km, por uma pessoa em certo período de tempo. A escala de tempo a ser adotada para o eixo das abscissas depende da maneira como essa pessoa se desloca. Qual é a opção que apresenta a melhor associação entre meio ou forma de locomoção e unidade de tempo, quando são percorridos 10 km?



- A) carroça - semana
- B) carro - dia
- C) caminhada - hora
- D) bicicleta - minuto
- E) avião - segundo

Resposta: item C

Comentário:



Essa questão se resolve facilmente com a análise do gráfico. Vamos verificar item por item e chegar a uma conclusão lógica, bastando ter um pouco de bom senso.

No item A, o examinador está dizendo que uma carroça leva duas semanas para percorrer 10km. Absurdo! Por mais lento que seja o cavalo que leva essa carroça, não tem como conceber isso.

No item B, o examinador está dizendo que um carro leva dois dias para percorrer uma distância de 10km. Outro absurdo, pois não faz o menor sentido.

No item D, o examinador está dizendo que uma bicicleta leva 2 horas para percorrer uma distância de 10km. Mas nem se fosse um "ultraman".

No item E, o examinador menciona que um avião leva 2 segundos para percorrer 10km. Acredito que esse avião ainda não foi projetado, quem sabe um dia isso seja possível.

No item C, o examinador usa o bom senso e menciona que uma pessoa caminhando durante 2 horas consegue percorrer uma distância de 10km. Isso sim é coerente do ponto de vista da lógica.

13. (ENEM – 2009)

O Super-homem e as leis do movimento

Uma das razões para pensar sobre a física dos super-heróis é, acima de tudo, uma forma divertida de explorar muitos fenômenos físicos interessantes, desde fenômenos corriqueiros até eventos considerados fantásticos. A figura seguinte mostra o Super-homem lançando-se no espaço para chegar ao topo de um prédio de altura **H**. Seria possível admitir que com seus superpoderes ele estaria voando com propulsão própria, mas considere que ele tenha dado um forte salto. Neste caso, sua velocidade final no ponto mais alto do salto deve ser zero, caso contrário, ele continuaria subindo. Sendo **g** a aceleração da gravidade, a relação entre a velocidade inicial do Super-homem e a altura atingida é dada por: $V^2 = 2gH$





KAKALIOS, J. The Physics of Superheroes. Gotham Books, USA, 2005.

A altura que o Super-homem alcança em seu salto depende do quadrado de sua velocidade inicial porque

- (A) a altura do seu pulo é proporcional à sua velocidade média multiplicada pelo tempo que ele permanece no ar ao quadrado.
- (B) o tempo que ele permanece no ar é diretamente proporcional à aceleração da gravidade e essa é diretamente proporcional à velocidade.
- (C) o tempo que ele permanece no ar é inversamente proporcional à aceleração da gravidade e essa é inversamente proporcional à velocidade média.
- (D) a aceleração do movimento deve ser elevada ao quadrado, pois existem duas acelerações envolvidas: a aceleração da gravidade e a aceleração do salto.
- (E) a altura do seu pulo é proporcional à sua velocidade média multiplicada pelo tempo que ele permanece no ar, e esse tempo também depende da sua velocidade inicial.

Resposta: item E.

Comentário:



Vamos analisar item por item, no entanto, antes vamos lembrar que a velocidade média em um movimento do tipo uniformemente variado é dada pela média das velocidades inicial e final. Isso foi demonstrado na parte teórica da nossa aula.

$$V_m = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

como o super-homem em parte com uma velocidade V e ao final chega ao repouso:

$$V_m = \frac{0 + V}{2} \Rightarrow V_m = \frac{V}{2}$$

Lembre-se de que o movimento do super-homem é um lançamento vertical para cima, no qual ele estará em movimento retardado, reduzindo sua velocidade, por conta da ação da gravidade.

Assim, temos que o tempo de subida será dado por:

$$t_{sub} = \frac{V}{g}$$

Assim, a velocidade média, multiplicada pelo tempo total de subida será:



$$t_{sub} = \frac{V}{g}$$
$$V_m = \frac{V}{2}$$

multiplicando :

$$V_m \times t_{sub} = \frac{V^2}{2g}$$
$$h = \frac{V^2}{2g}$$

Item A: incorreto, pois não depende do quadrado do tempo que ele permanece no ar, mas apenas do tempo, sem elevar ao quadrado.

Item B: incorreto, pois o tempo é inversamente proporcional à aceleração da gravidade; quanto maior a gravidade, menor o tempo que ele permanece no ar.

Item C: incorreto, pois a gravidade não depende da velocidade média desse movimento, a gravidade depende de fatores ligados à distribuição de massa do planeta.

Item D: incorreto, pois não existem duas acelerações, apenas uma, a da gravidade.

Item E: correto, pois é exatamente isso que foi comprovado acima, a altura máxima é proporcional ao tempo que ele permanece no ar multiplicado pela velocidade média e o tempo é diretamente proporcional à velocidade inicial do salto.

14. (ENEM – 2011) Para medir o tempo de reação de uma pessoa, pode-se realizar a seguinte experiência:



I. Mantenha uma régua (com cerca de 30 cm) suspensa verticalmente, segurando-a pela extremidade superior, de modo que o zero da régua esteja situado na extremidade inferior.

II. A pessoa deve colocar os dedos de sua mão, em forma de pinça, próximos do zero da régua, sem tocá-la.

III. Sem aviso prévio, a pessoa que estiver segurando a régua deve soltá-la. A outra pessoa deve procurar segurá-la o mais rapidamente possível e observar a posição onde conseguiu segurar a régua, isto é, a distância que ela percorre durante a queda.

O quadro seguinte mostra a posição em que três pessoas conseguiram segurar a régua e os respectivos tempos de reação.

Distância percorrida pela régua durante a queda (metro)	Tempo de reação (segundo)
0,30	0,24
0,15	0,17
0,10	0,14

Disponível em: <http://br.geocities.com>. Acesso em: 1 fev. 2009.

A distância percorrida pela régua aumenta mais rapidamente que o tempo de reação porque a

- A) energia mecânica da régua aumenta, o que a faz cair mais rápido.
- B) resistência do ar aumenta, o que faz a régua cair com menor velocidade.
- C) aceleração de queda da régua varia, o que provoca um movimento acelerado.
- D) força peso da régua tem valor constante, o que gera um movimento acelerado.
- E) velocidade da régua é constante, o que provoca uma passagem linear de tempo.

Resposta: item D.



Comentário:

Mais uma questão envolvendo o lançamento de projéteis, mais precisamente a queda livre, um dos tipos de movimento vertical no vácuo.

O movimento da régua é acelerado e isso pode ser percebido pelo crescimento do espaço em relação ao tempo veja que o crescimento da distância é bem maior que o crescimento do tempo. Assim, estamos diante de um movimento acelerado de queda livre.

Vamos analisar item por item:

A) A energia mecânica da régua ou é constante, ou é decrescente, a primeira situação ocorre quando a experiência ocorre em um ambiente livre de forças dissipativas, a segunda quando a experiência ocorre em um ambiente onde presentes estão as forças dissipativas, nele a energia mecânica diminui, pois as forças dissipativas transformam a energia mecânica em outro tipo de energia.

B) Durante a queda livre a velocidade de queda da régua aumenta, por ação da gravidade.

C) Não é a aceleração variável que leva a um movimento acelerado, mas o aumento de velocidade que leva a um movimento acelerado.

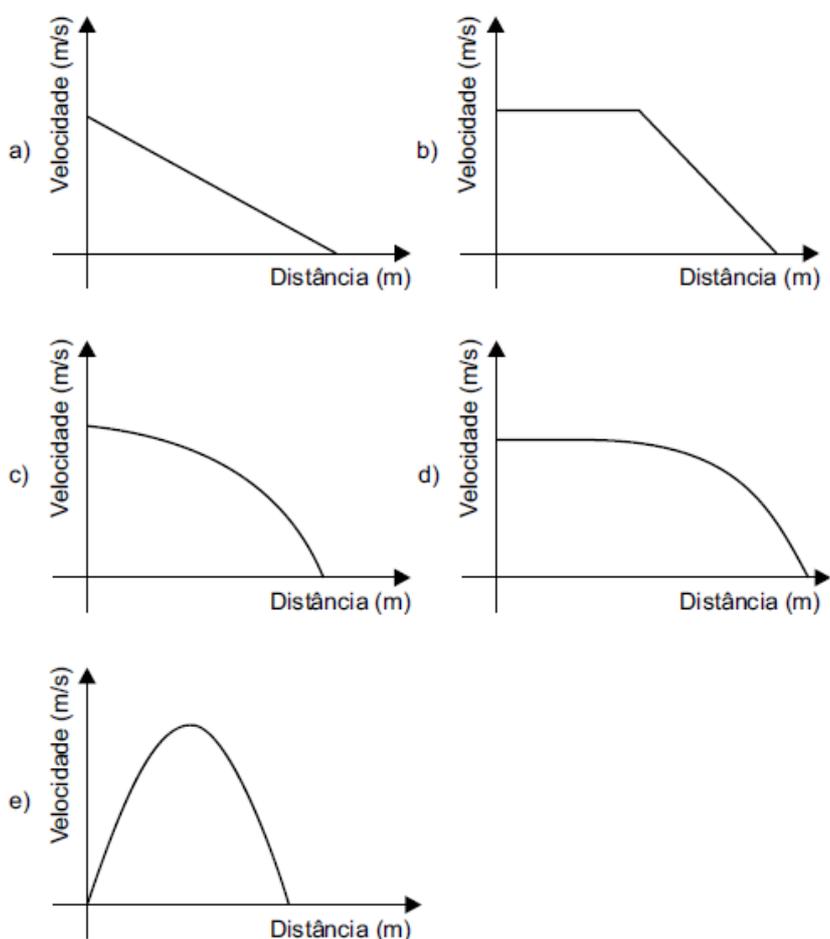
D) Exatamente! O peso da régua é constante, pois a gravidade é constante, isso nos leva a um movimento acelerado dela.

E) A velocidade da régua não é constante, é variável, isso já foi provado no item A.

15. (ENEM – 2016) Dois veículos que trafegam com velocidade constante em uma estrada, na mesma direção e sentido, devem manter entre si uma distância mínima.



Isso porque o movimento de um veículo, até que ele pare totalmente, ocorre em duas etapas, a partir do momento em que o motorista detecta um problema que exige uma freada brusca. A primeira etapa é associada à distância que o veículo percorre entre o intervalo de tempo da detecção do problema e o acionamento dos freios. Já a segunda se relaciona com a distância que o automóvel percorre enquanto os freios agem com desaceleração constante. Considerando a situação descrita, qual esboço gráfico representa a velocidade do automóvel em relação à distância percorrida até parar totalmente?



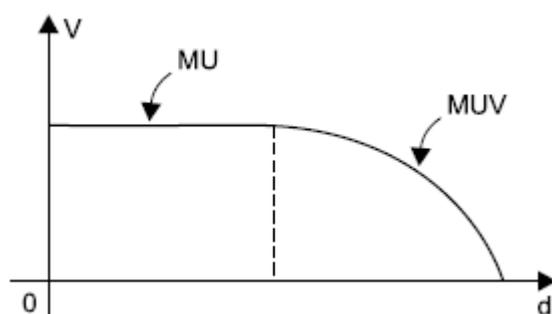
RESOLUÇÃO:



Resposta: D

Inicialmente, o movimento é uniforme, pois a velocidade se mantém a mesma durante o tempo de reação, em que o veículo não está freando.

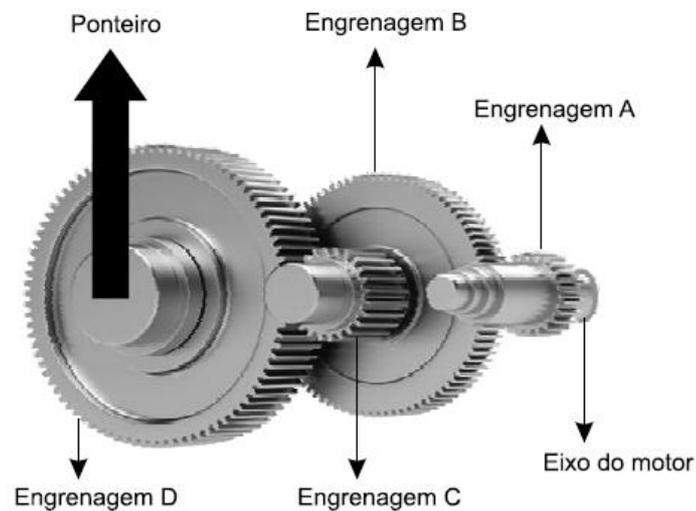
Após, durante o processo de frenagem, a velocidade diminui com o aumento da distância, pois o veículo necessita parar e o gráfico é uma curva decrescente, como aquela mostrada na figura do item D.



16. (ENEM – 2016) A invenção e o acoplamento entre engrenagens revolucionaram a ciência na época e propiciaram a invenção de várias tecnologias, como os relógios. Ao construir um pequeno cronômetro, um relojoeiro usa o sistema de engrenagens mostrado. De acordo com a figura, um motor é ligado ao eixo e movimentava as engrenagens fazendo o ponteiro girar. A frequência do motor é de 18 rpm, e o número de dentes das engrenagens está apresentado no quadro.



Engrenagem	Dentes
A	24
B	72
C	36
D	108



A frequência de giro do ponteiro, em rpm, é

A. 1. B. 2. C. 4. D. 81. E. 162.

RESOLUÇÃO:

Resposta: B

A primeira coisa que você deve verificar é que o raio de cada engrenagem é proporcional ao número de dentes, o que nos leva a seguinte conclusão:



$$\left| \begin{array}{l} R_A = 24k \\ R_B = 72k \\ R_C = 36k \\ R_C = 108k \end{array} \right.$$

Como o enunciado afirma que a engrenagem A foi acoplada ao motor, podemos afirmar ainda que as duas frequências são idênticas.

$$f_{motor} = f_A = 18RPM$$

Entre A e B há contato entre as engrenagens, ou seja, podemos arquitetar a transmissão de movimentos circulares da seguinte forma:

$$f_A \cdot R_A = f_B \cdot R_B$$

$$18 \cdot 24k = f_B \cdot 72k$$

$$f_B = 6RPM$$

Veja, de acordo com a figura, que as engrenagens B e C estão acopladas no mesmo eixo:

$$f_B = f_C = 6RPM$$

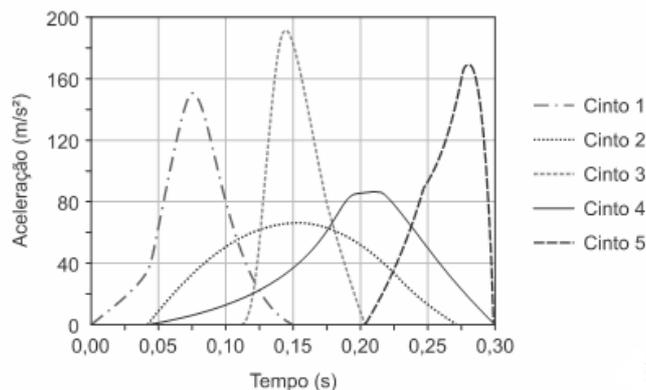
Por fim, vamos fazer a transmissão de movimento circular entre C e D, que estão acoplados por meio de contato:



$$f_C \cdot R_C = f_D \cdot R_D$$
$$6.36k = f_D \cdot 108k$$
$$f_D = 2RPM$$

Como o ponteiro está ligado à engrenagem D, então ambos irão girar com a mesma frequência.

17. (Enem 2017) Em uma colisão frontal entre dois automóveis, a força que o cinto de segurança exerce sobre o tórax e abdômen do motorista pode causar lesões graves nos órgãos internos. Pensando na segurança do seu produto, um fabricante de automóveis realizou testes em cinco modelos diferentes de cinto. Os testes simularam uma colisão de 0,30 segundo de duração, e os bonecos que representavam os ocupantes foram equipados com acelerômetros. Esse equipamento registra o módulo da desaceleração do boneco em função do tempo. Os parâmetros como massa dos bonecos, dimensões dos cintos e velocidade imediatamente antes e após o impacto foram os mesmos para todos os testes. O resultado final obtido está no gráfico de aceleração por tempo.



Qual modelo de cinto oferece menor risco de lesão interna ao motorista?

- a) 1
- b) 2



- c) 3
- d) 4
- e) 5

Resposta: item B.

Comentário:

Pelo gráfico, o cinto que apresenta o menor valor de amplitude para a aceleração é o 2, sendo portanto o mais seguro.

18. (Enem 2017) Um motorista que atende a uma chamada de celular é levado à desatenção, aumentando a possibilidade de acidentes ocorrerem em razão do aumento de seu tempo de reação. Considere dois motoristas, o primeiro atento e o segundo utilizando o celular enquanto dirige. Eles aceleram seus carros inicialmente a $1,00 \text{ m/s}^2$. Em resposta a uma emergência, freiam com uma desaceleração igual a $5,00 \text{ m/s}^2$. O motorista atento aciona o freio à velocidade de $14,0 \text{ m/s}$, enquanto o desatento, em situação análoga, leva $1,00$ segundo a mais para iniciar a frenagem.

Que distância o motorista desatento percorre a mais do que o motorista atento, até a parada total dos carros?

- a) 2,90 m
- b) 14,0 m
- c) 14,5 m
- d) 15,0 m
- e) 17,4 m

Resposta: item E.



Comentário:

Para o motorista atento, temos:

Tempo e distância percorrida até atingir 14 m/s a partir do repouso:

$$\begin{aligned}v &= v_0 + at \\14 &= 0 + 1 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 14 \text{ s} \\v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta s \\14^2 &= 0^2 + 2 \cdot 1 \cdot d_1 \Rightarrow d_1 = 98 \text{ m}\end{aligned}$$

Distância percorrida até parar:

$$\begin{aligned}0^2 &= 14^2 + 2 \cdot (-5) \cdot d_1' \\ \Rightarrow d_1' &= 19,6 \text{ m}\end{aligned}$$

Distância total percorrida:

$$\begin{aligned}\Delta s_1 &= d_1 + d_1' = 98 + 19,6 \\ \Rightarrow \Delta s_1 &= 117,6 \text{ m}\end{aligned}$$

Para o motorista que utiliza o celular, temos:

$$\begin{aligned}t_2 &= t_1 + 1 \Rightarrow \\ t_2 &= 15 \text{ s}\end{aligned}$$



Velocidade atingida e distância percorrida em 15 s a partir do repouso:

$$v_2 = 0 + 1 \cdot 15 \Rightarrow v_2 = 15 \text{ m/s}$$
$$15^2 = 0^2 + 2 \cdot 1 \cdot d_2 \Rightarrow d_2 = 112,5 \text{ m}$$

Distância percorrida até parar:

$$0^2 = 15^2 + 2 \cdot (-5) \cdot d_2'$$
$$\Rightarrow d_2' = 22,5 \text{ m}$$

Distância total percorrida:

$$\Delta s_2 = d_2 + d_2' = 112,5 + 22,5$$
$$\Rightarrow \Delta s_2 = 135 \text{ m}$$

Portanto, a distância percorrida a mais pelo motorista desatento é de:

$$\Delta s = \Delta s_2 - \Delta s_1 = 135 - 117,6$$
$$\Rightarrow \Delta s = 17,4 \text{ m}$$



Ufa! Finalizamos os exercícios dessa aula longa, mas muito necessária para a resolução de questões do ENEM.

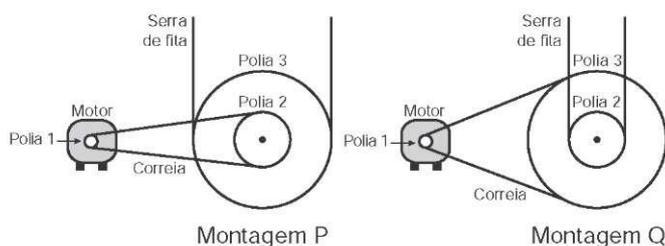
Espero que tenha entendido tudo, qualquer dúvida pode nos procurar no fórum de dúvidas ou no whatsapp.

Abraços.

Prof. Vinicius Silva.

EXERCÍCIOS DA AULA

01. (ENEM – 2013) Para serrar ossos e carnes congeladas, um açougueiro utiliza uma serra de fita que possui três polias e um motor. O equipamento pode ser montado de duas formas diferentes, P e Q. Por questão de segurança, é necessário que a serra possua menor velocidade linear.



Por qual montagem o açougueiro deve optar e qual a justificativa desta opção?



- A) Q, pois as polias 1 e 3 giram com velocidades lineares iguais em pontos periféricos e a que tiver maior raio terá menor frequência.
- B) Q, pois as polias 1 e 3 giram com frequências iguais e a que tiver maior raio terá menor velocidade linear em um ponto periférico.
- C) P, pois as polias 2 e 3 giram com frequências diferentes e a que tiver maior raio terá menor velocidade linear em um ponto periférico.
- D) P, pois as polias 1 e 2 giram com diferentes velocidades lineares em pontos periféricos e a que tiver menor raio terá maior frequência.
- E) Q, pois as polias 2 e 3 giram com diferentes velocidades lineares em pontos periféricos e a que tiver maior raio terá menor frequência.

02. (ENEM – 2012) Uma empresa de transportes precisa efetuar a entrega de uma encomenda o mais breve possível. Para tanto, a equipe de logística analisa o trajeto desde a empresa até o local da entrega. Ela verifica que o trajeto apresenta dois trechos de distâncias diferentes e velocidades máximas permitidas diferentes. No primeiro trecho, a velocidade máxima permitida é de 80 km/h e a distância a ser percorrida é de 80 km. No segundo trecho, cujo comprimento vale 60 km, a velocidade máxima permitida é 120 km/h.

Supondo que as condições de trânsito sejam favoráveis para que o veículo da empresa ande continuamente na velocidade máxima permitida, qual será o tempo necessário, em horas, para a realização da entrega?

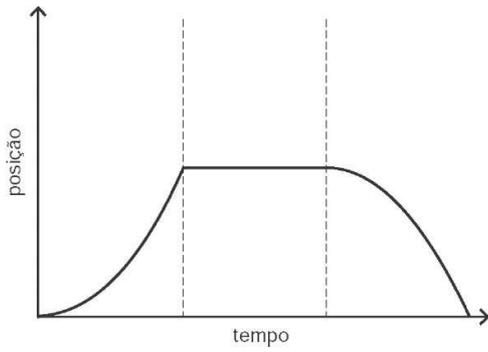
- A) 0,7
B) 1,4
C) 1,5
D) 2,0
E) 3,0

03. (ENEM – 2012) Para melhorar a mobilidade urbana na rede metroviária é necessário minimizar o tempo entre estações. Para isso a administração do metrô de uma grande cidade adotou o seguinte procedimento entre duas estações: a locomotiva parte do repouso com aceleração constante por um terço do tempo de percurso, mantém a velocidade constante por outro terço e reduz sua velocidade com desaceleração constante no trecho final, até parar.

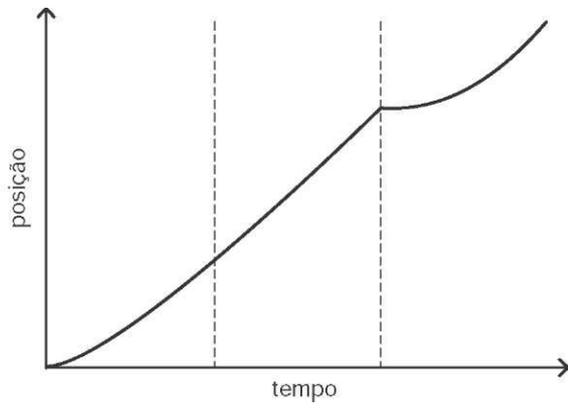
Qual é o gráfico de posição (eixo vertical) em função do tempo (eixo horizontal) que representa o movimento desse trem?



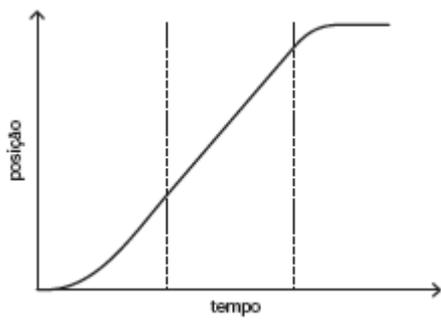
A)



B)

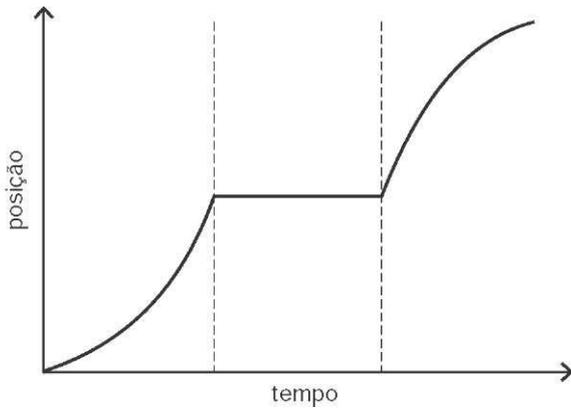


C)

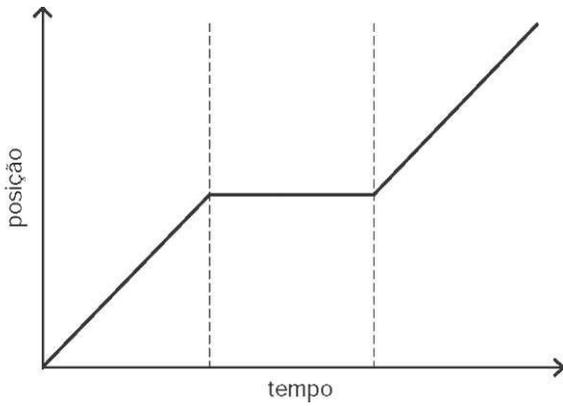


D)

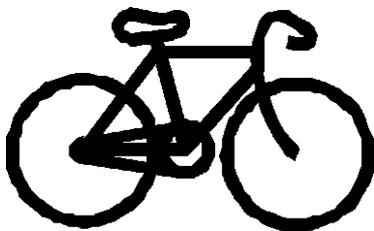




E)



As bicicletas possuem uma corrente que liga uma coroa dentada dianteira, movimentada pelos pedais, a uma coroa localizada no eixo da roda traseira, como mostra a figura.

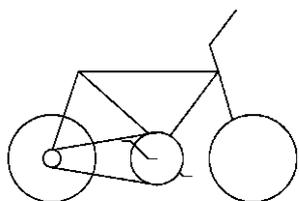


O número de voltas dadas pela roda traseira a cada pedalada depende do tamanho relativo destas coroas.

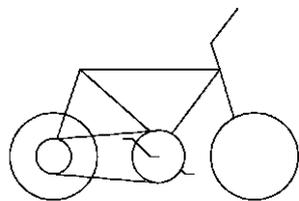


04. (ENEM – 1998) Em que opção abaixo a roda traseira dá o maior número de voltas por pedalada?

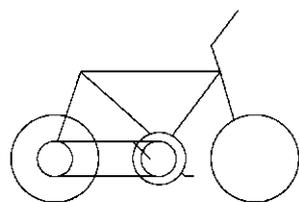
A)



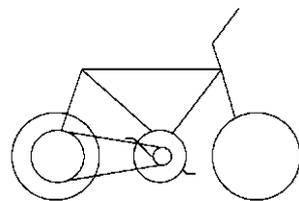
B)



C)

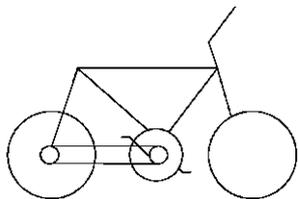


D)

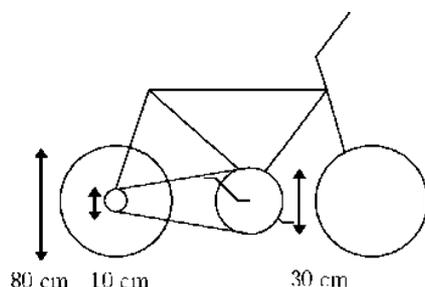


E)





05. (ENEM – 1998) Quando se dá uma pedalada na bicicleta abaixo (isto é, quando a coroa acionada pelos pedais dá uma volta completa), qual é a distância aproximada percorrida pela bicicleta, sabendo-se que o comprimento de um círculo de raio R é igual a $2\pi R$, onde $\pi \approx 3$?



- (A) 1,2 m
- (B) 2,4 m
- (C) 7,2 m
- (D) 14,4 m
- (E) 48,0 m

6. (ENEM – 1998) Com relação ao funcionamento de uma bicicleta de marchas, onde cada marcha é uma combinação de uma das coroas dianteiras com uma das coroas traseiras, são formuladas as seguintes afirmativas:

I. numa bicicleta que tenha duas coroas dianteiras e cinco traseiras, temos um total de dez marchas possíveis onde cada marcha representa a associação de uma das coroas dianteiras com uma das traseiras.



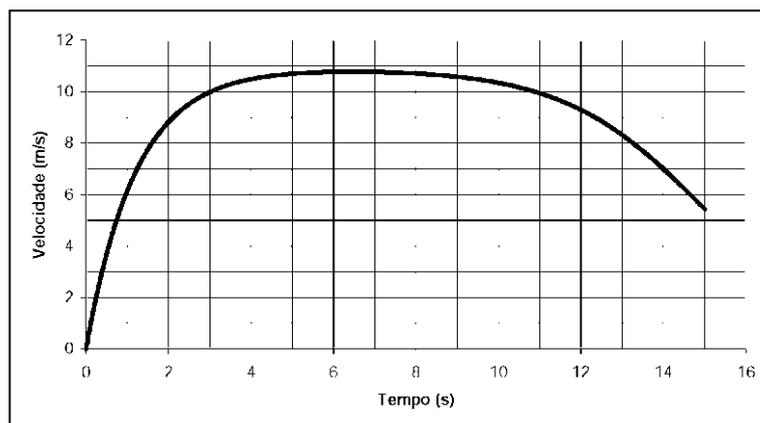
II. em alta velocidade, convém acionar a coroa dianteira de maior raio com a coroa traseira de maior raio também.

III. em uma subida íngreme, convém acionar a coroa dianteira de menor raio e a coroa traseira de maior raio.

Entre as afirmações acima, estão corretas:

- (A) I e III apenas.
- (B) I, II e III.
- (C) I e II apenas.
- (D) II apenas.
- (E) III apenas.

Em uma prova de 100 m rasos, o desempenho típico de um corredor padrão é representado pelo gráfico a seguir:



07. (ENEM – 1998) Baseado no gráfico, em que intervalo de tempo a velocidade do corredor é aproximadamente constante?



- (A) Entre 0 e 1 segundo.
- (B) Entre 1 e 5 segundos.
- (C) Entre 5 e 8 segundos.
- (D) Entre 8 e 11 segundos.
- (E) Entre 12 e 15 segundos.

08. (ENEM – 1998) Em que intervalo de tempo o corredor apresenta aceleração máxima?

- (A) Entre 0 e 1 segundo.
- (B) Entre 1 e 5 segundos.
- (C) Entre 5 e 8 segundo.
- (D) Entre 8 e 11 segundos.
- (E) Entre 9 e 15 segundos.

09. (ENEM – 2001)

SEU OLHAR

(Gilberto Gil, 1984)

Na eternidade
Eu quisera ter
Tantos anos-luz
Quanto fosse precisar
Pra cruzar o túnel
Do tempo do seu olhar

Gilberto Gil usa na letra da música a palavra composta **anos-luz**. O sentido prático, em geral, não é obrigatoriamente o mesmo que na ciência. Na Física, um ano luz é uma medida que relaciona a velocidade da luz e o tempo de um ano e que, portanto, se refere a



- (A) tempo.
- (B) aceleração.
- (C) distância.
- (D) velocidade.
- (E) luminosidade.

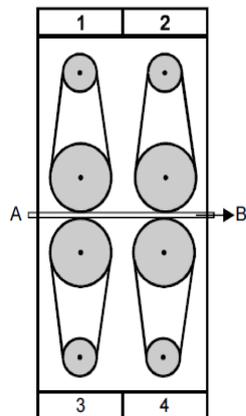
10. (ENEM – 2002) As cidades de Quito e Cingapura encontram-se próximas à linha do equador e em pontos diametralmente opostos no globo terrestre. Considerando o raio da Terra igual a 6370 km, pode-se afirmar que um avião saindo de Quito, voando em média 800 km/h, descontando as paradas de escala, chega a Cingapura em aproximadamente

- (A) 16 horas.
- (B) 20 horas.
- (C) 25 horas.
- (D) 32 horas.
- (E) 36 horas.

11. (ENEM – 2006) Na preparação da madeira em uma indústria de móveis, utiliza-se uma lixadeira constituída de quatro grupos de polias, como ilustra o esquema ao lado. Em cada grupo, duas polias de tamanhos diferentes são interligadas por uma correia provida de lixa. Uma prancha de madeira é empurrada pelas polias, no sentido $A \rightarrow B$ (como indicado no esquema), ao mesmo tempo em que um sistema é acionado para frear seu movimento, de modo que a velocidade da prancha seja inferior à da lixa.

O equipamento acima descrito funciona com os grupos de polias girando da seguinte forma:

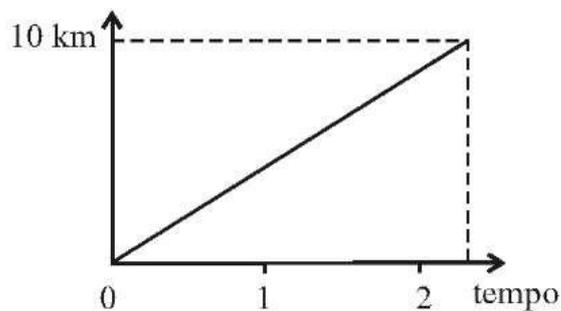




- A) 1 e 2 no sentido horário; 3 e 4 no sentido anti-horário.
- B) 1 e 3 no sentido horário; 2 e 4 no sentido anti-horário.
- C) 1 e 2 no sentido anti-horário; 3 e 4 no sentido horário.
- D) 1 e 4 no sentido horário; 2 e 3 no sentido anti-horário.
- E) 1, 2, 3 e 4 no sentido anti-horário.

12. (ENEM – 2008) O gráfico ao lado modela a distância percorrida, em km, por uma pessoa em certo período de tempo. A escala de tempo a ser adotada para o eixo das abscissas depende da maneira como essa pessoa se desloca. Qual é a opção que apresenta a melhor associação entre meio ou forma de locomoção e unidade de tempo, quando são percorridos 10 km?





- A) carroça - semana
- B) carro - dia
- C) caminhada - hora
- D) bicicleta - minuto
- E) avião - segundo

13. (ENEM – 2009)

O Super-homem e as leis do movimento

Uma das razões para pensar sobre a física dos super-heróis é, acima de tudo, uma forma divertida de explorar muitos fenômenos físicos interessantes, desde fenômenos corriqueiros até eventos considerados fantásticos. A figura seguinte mostra o Super-homem lançando-se no espaço para chegar ao topo de um prédio de altura H . Seria possível admitir que com seus superpoderes ele estaria voando com propulsão própria, mas considere que ele tenha dado um forte salto. Neste caso, sua velocidade final no ponto mais alto do salto deve ser zero, caso contrário, ele continuaria subindo. Sendo g a aceleração da gravidade, a relação entre a velocidade inicial do Super-homem e a altura atingida é dada por: $v^2 = 2gH$





KAKALIOS, J. The Physics of Superheroes. Gotham Books, USA, 2005.

A altura que o Super-homem alcança em seu salto depende do quadrado de sua velocidade inicial porque

- (A) a altura do seu pulo é proporcional à sua velocidade média multiplicada pelo tempo que ele permanece no ar ao quadrado.
- (B) o tempo que ele permanece no ar é diretamente proporcional à aceleração da gravidade e essa é diretamente proporcional à velocidade.
- (C) o tempo que ele permanece no ar é inversamente proporcional à aceleração da gravidade e essa é inversamente proporcional à velocidade média.
- (D) a aceleração do movimento deve ser elevada ao quadrado, pois existem duas acelerações envolvidas: a aceleração da gravidade e a aceleração do salto.
- (E) a altura do seu pulo é proporcional à sua velocidade média multiplicada pelo tempo que ele permanece no ar, e esse tempo também depende da sua velocidade inicial.

14. (ENEM – 2011) Para medir o tempo de reação de uma pessoa, pode-se realizar a seguinte experiência:

I. Mantenha uma régua (com cerca de 30 cm) suspensa verticalmente, segurando-a pela extremidade superior, de modo que o zero da régua esteja situado na extremidade inferior.

II. A pessoa deve colocar os dedos de sua mão, em forma de pinça, próximos do zero da régua, sem tocá-la.



III. Sem aviso prévio, a pessoa que estiver segurando a régua deve soltá-la. A outra pessoa deve procurar segurá-la o mais rapidamente possível e observar a posição onde conseguiu segurar a régua, isto é, a distância que ela percorre durante a queda.

O quadro seguinte mostra a posição em que três pessoas conseguiram segurar a régua e os respectivos tempos de reação.

Distância percorrida pela régua durante a queda (metro)	Tempo de reação (segundo)
0,30	0,24
0,15	0,17
0,10	0,14

Disponível em: <http://br.geocities.com>. Acesso em: 1 fev. 2009.

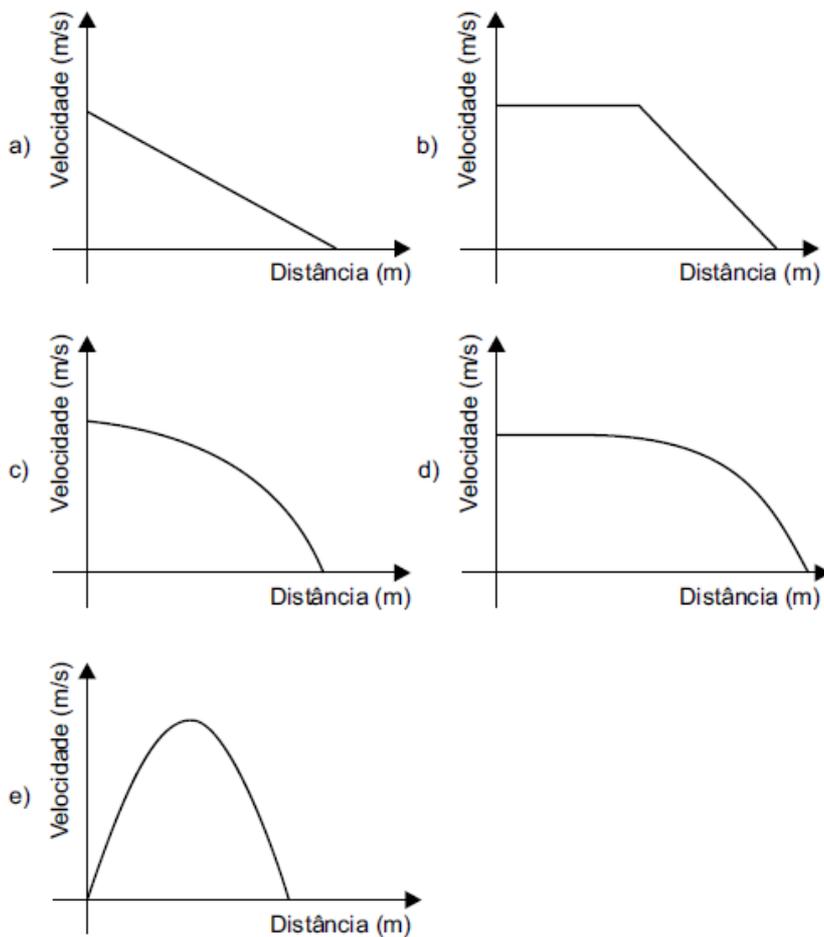
A distância percorrida pela régua aumenta mais rapidamente que o tempo de reação porque a

- A) energia mecânica da régua aumenta, o que a faz cair mais rápido.
- B) resistência do ar aumenta, o que faz a régua cair com menor velocidade.
- C) aceleração de queda da régua varia, o que provoca um movimento acelerado.
- D) força peso da régua tem valor constante, o que gera um movimento acelerado.
- E) velocidade da régua é constante, o que provoca uma passagem linear de tempo.

15. (ENEM – 2016) Dois veículos que trafegam com velocidade constante em uma estrada, na mesma direção e sentido, devem manter entre si uma distância mínima. Isso porque o movimento de um veículo, até que ele pare totalmente, ocorre em duas etapas, a partir do momento em que o motorista detecta um problema que exige uma



freada brusca. A primeira etapa é associada à distância que o veículo percorre entre o intervalo de tempo da detecção do problema e o acionamento dos freios. Já a segunda se relaciona com a distância que o automóvel percorre enquanto os freios agem com desaceleração constante. Considerando a situação descrita, qual esboço gráfico representa a velocidade do automóvel em relação à distância percorrida até parar totalmente?

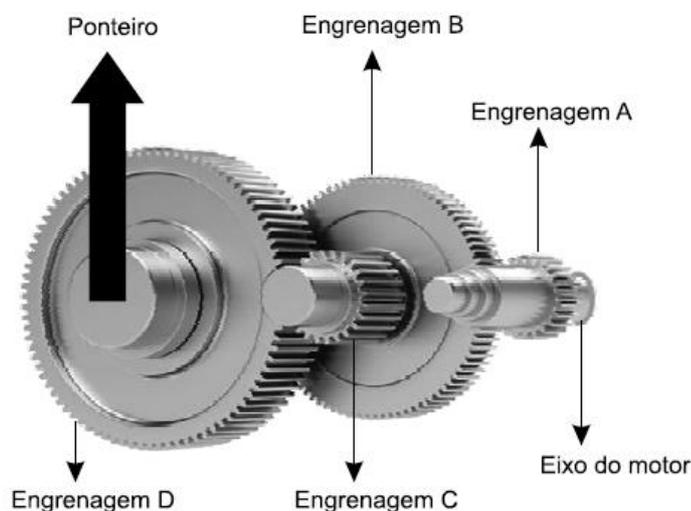


16. (ENEM – 2016) A invenção e o acoplamento entre engrenagens revolucionaram a ciência na época e propiciaram a invenção de várias tecnologias, como os relógios. Ao construir um pequeno cronômetro, um relojoeiro usa o sistema de engrenagens mostrado. De acordo com a figura, um motor é ligado ao eixo e movimenta as



engrenagens fazendo o ponteiro girar. A frequência do motor é de 18 rpm, e o número de dentes das engrenagens está apresentado no quadro.

Engrenagem	Dentes
A	24
B	72
C	36
D	108



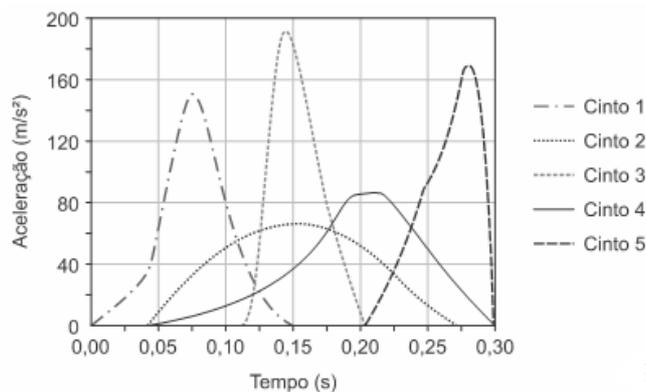
A frequência de giro do ponteiro, em rpm, é

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 81. E. 162.

17. (Enem 2017) Em uma colisão frontal entre dois automóveis, a força que o cinto de segurança exerce sobre o tórax e abdômen do motorista pode causar lesões graves nos órgãos internos. Pensando na segurança do seu produto, um fabricante de automóveis realizou testes em cinco modelos diferentes de cinto. Os testes simularam uma colisão de 0,30 segundo de duração, e os bonecos que representavam os ocupantes foram equipados com acelerômetros. Esse equipamento registra o módulo da desaceleração do boneco em função do tempo. Os parâmetros como massa dos



bonecos, dimensões dos cintos e velocidade imediatamente antes e após o impacto foram os mesmos para todos os testes. O resultado final obtido está no gráfico de aceleração por tempo.



Qual modelo de cinto oferece menor risco de lesão interna ao motorista?

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

18. (Enem 2017) Um motorista que atende a uma chamada de celular é levado à desatenção, aumentando a possibilidade de acidentes ocorrerem em razão do aumento de seu tempo de reação. Considere dois motoristas, o primeiro atento e o segundo utilizando o celular enquanto dirige. Eles aceleram seus carros inicialmente a $1,00 \text{ m/s}^2$. Em resposta a uma emergência, freiam com uma desaceleração igual a $5,00 \text{ m/s}^2$. O motorista atento aciona o freio à velocidade de $14,0 \text{ m/s}$, enquanto o desatento, em situação análoga, leva $1,00$ segundo a mais para iniciar a frenagem.

Que distância o motorista desatento percorre a mais do que o motorista atento, até a parada total dos carros?



- a) 2,90 m
- b) 14,0 m
- c) 14,5 m
- d) 15,0 m
- e) 17,4 m

12. GABARITO

01.A	02.C	03.C	04.A	05.C
06.A	07.C	08.A	09.C	10.C
11. C	12. C	13. E	14. D	15. D
16. B	17. B	18.E		



ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE: PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.



1 Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.



2 Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).



3 Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).



4 Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).



5 Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).



6 Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).



7 Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.



8 O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.



Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.