etrônico

ESTRATÉGIA CONCURSOS

Aul

Matemática III p/ EFOMM 2020 (Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante) - Pós-Edital

Professor: Italo Marinho Sá Barreto

Aula 00: Elementos fundamentais, ângulos, triângulos, congruência, semelhança, Teorema de tales

Antes de iniciarmos o nosso curso, vamos a alguns AVISOS IMPORTANTES:

1) Com o objetivo de ***otimizar os seus estudos***, você encontrará, em ***nossa plataforma (Área do aluno)***, alguns recursos que irão auxiliar bastante a sua aprendizagem, tais como ***"Resumos", "Slides"*** e ***"Mapas Mentais"*** dos conteúdos mais importantes desse curso. Essas ferramentas de aprendizagem irão te auxiliar a perceber aqueles tópicos da matéria que você precisa dominar, que você não pode ir para a prova sem ler.

2) Em nossa Plataforma, procure pela ***Trilha Estratégica e Monitoria*** da sua respectiva área/concurso alvo. A Trilha Estratégica é elaborada pela nossa equipe do *Coaching*. Ela irá te indicar qual é exatamente o ***melhor caminho*** a ser seguido em seus estudos e vai te ajudar a ***responder as seguintes perguntas***:

   - Qual a melhor ordem para estudar as aulas? Quais são os assuntos mais importantes?
   - Qual a melhor ordem de estudo das diferentes matérias? Por onde eu começo?
   - *"Estou sem tempo e o concurso está próximo!"* Posso estudar apenas algumas partes do curso? O que priorizar?
   - O que fazer a cada sessão de estudo? Quais assuntos revisar e quando devo revisá-los?
   - A quais questões deve ser dada prioridade? Quais simulados devo resolver?
   - Quais são os trechos mais importantes da legislação?

3) Procure, nas instruções iniciais da "Monitoria", pelo Link da nossa ***"Comunidade de Alunos"*** no Telegram da sua área / concurso alvo. Essa comunidade é ***exclusiva*** para os nossos assinantes e será utilizada para orientá-los melhor sobre a utilização da nossa Trilha Estratégica. As melhores dúvidas apresentadas nas transmissões da ***"Monitoria"*** também serão respondidas na nossa ***Comunidade de Alunos*** do Telegram.

   (*) O Telegram foi escolhido por ser a única plataforma que preserva a intimidade dos assinantes e que, além disso, tem recursos tecnológicos compatíveis com os objetivos da nossa Comunidade de Alunos.

Sumário

Olá estimado aluno. É um prazer tê-lo conosco neste novo trajeto para o aprendizado da matemática! Sou o professor **Italo Marinho**, formado em matemática pela UERJ; atuo no ensino de matemática e física no estado do Rio de Janeiro há 12 anos com enfoque em concursos militares. Me especializei na produção de materiais didáticos dentro do mesmo enfoque.

A matemática é uma ciência constante. Galera, ela não muda. É sempre a mesma. Sabem o que, de fato, muda? Nossa perspectiva. Nosso objetivo aqui é fazer **você** mudar a forma de ver a matemática. Pode ter a certeza de que a abordagem a ser tomada aqui é diferente de qualquer experiência negativa que você, estudante, possa ter vindo a ter no decorrer de sua vida de estudos. A aeronáutica cobra elementos padronizados em suas provas. Pretendo fazer você visualizar esse padrão e, a partir de muita prática, alcançar seus objetivos. Sem mais delongas, vamos ao que interessa!

Fizemos uma divisão bastante precisa de edital para você, aluno. Separamos a matemática em três grandes partes. A matemática I, a matemática II e a matemática III (a toda linda e bela geometria). Esse livro eletrônico tratará, claro, de geometria. Mas de geometria para concursos militares, que tem um enfoque bastante específico. Antes de você começar a ler esse material, gostaria de fazer algumas ressalvas. Você não encontrará muitas questões EFOMM nesse primeiro material, aula 00. E sabe o porquê? É porque a EFOMM não utiliza esse conteúdo a ser visto nessa aula como chave direta para as questões. Ela utiliza esses conceitos como ferramentas para outras resoluções (de áreas, trigonometrias, etc). Então, cabe a você, estudante, confiar nas reuniões feitas aqui e acreditar na experiência que tenho em sala de aula para identificar os pontos mais baixos de um aluno que almeja a carreira militar. Faça todos os exercícios independente de ser ou não da EFOMM. Geometria se aprende assim. Então, vamos lá!

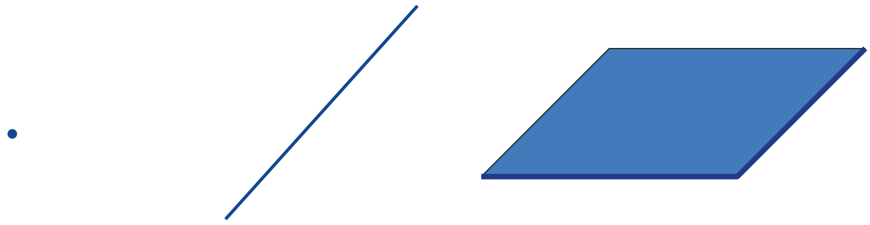
CRONOGRAMA DE AULAS

DISPONÍVEL	*CONTEÚDO*
Aula 00	*Geometria Plana: feixe de retas paralelas e transversais, ângulo: definição, elementos e propriedades; semelhança de triângulos, pontos notáveis do triângulo, Teorema de Tales; teorema das bissetrizes internas e externas de um triângulo;*
Aula 01	*Relações métricas nos triângulos (retângulos e quaisquer), relação de Stewart; triângulos retângulos, teorema de Pitágoras; congruência de figuras planas, polígonos, polígonos regulares;*
Aula 02	*Quadriláteros notáveis, ângulos na circunferência, círculos e seus elementos;*
Aula 03	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*
Aula 04	*Trigonometria: trigonometria no triângulo (retângulo e qualquer); lei dos senos e lei dos cossenos; unidades de medidas de arcos e ângulos: o grau e o radiano, resolução de triângulos.*
Aula 05	*Círculo trigonométrico, razões trigonométricas e redução ao 1º quadrante; funções trigonométricas, transformações, identidades trigonométricas fundamentais, equações e inequações trigonométricas no conjunto dos números reais; - fórmulas de adição de arcos, arcos duplos, arco metade e transformação em produto.*
Aula 06	*Funções trigonométricas e suas inversas, gráficos, arcos notáveis, sistemas de equações e inequações.*
Aula 07	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*
Aula 08	*Geometria Espacial de Posição: posições relativas entre duas retas; posições relativas entre dois planos; posições relativas entre reta e plano: perpendicularidade entre duas retas, entre dois planos e entre reta e plano; e projeção ortogonal. m. Geometria Espacial Métrica: poliedros Convexos, Poliedros de Platão, Poliedros Regulares: definições, propriedades e Relação de Euler;*
Aula 09	*Prismas: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes e troncos; pirâmide: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes e troncos*
Aula 10	*Cilindro: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes e troncos; cone: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes e troncos; esfera: elementos, seção da esfera, área, volumes e partes da esfera; projeções; sólidos de revolução; e inscrição e circunscrição de sólidos.*
Aula 11	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*

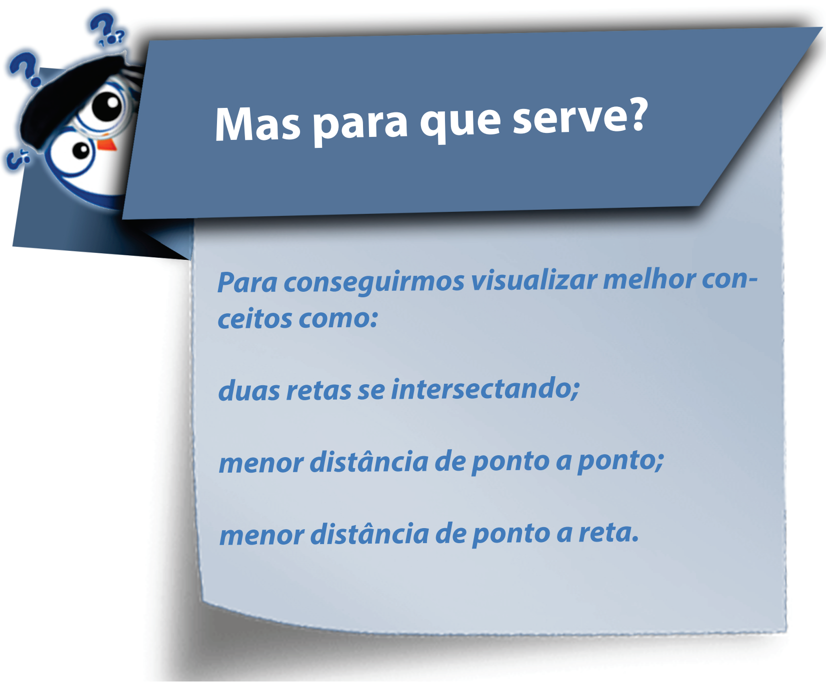
1.0– Fundamentos da Geometria Plana: elementos primitivos, axiomas e postulados

1.1– Entes fundamentais

Começaremos agora o nosso estudo sobre geometria. Para tanto, precisaremos conhecer os seus entes fundamentais, que não são mais do que as formas básicas que constroem toda e qualquer figura. Existem três entes fundamentais para a geometria euclidiana[1] plana:



Acima vemos, na ordem, o **ponto**, a **reta** e o **plano**. Um dos maiores erros aqui é negligenciar o estudos desses elementos. O estudo e o bom entendimento da mecânica dessas formas é incrivelmente relevante para não errarmos coisas bobas depois.



Você pode ver essas formas no seu dia-a-dia, nos seus arredores. Estão por toda a parte! As paredes que delimitam a sua casa são exemplos da representação de um plano, assim como as quinas e cantos são exemplos de retas e pontos.

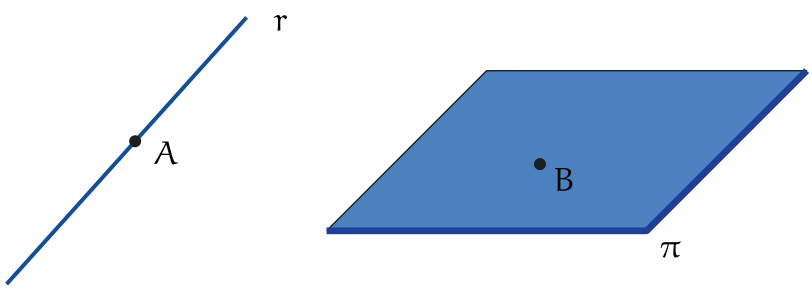
É muito importante que entendamos que apesar de intuitivas, não há uma *definição* específica para os entes fundamentais. Não há como *explicar* o que seria um ponto, uma reta ou um plano. Podemos, porém, *verificar suas propriedades*, padrões que surgem quando são estudados mais a fundo. A prova da EFOMM foca diretamente nessas propriedades.

[1] Esse nome deriva do criador do modelo clássico da geometria, Euclides.

Retas e planos como conjuntos

É exatamente isso. Retas e planos são conjuntos, galera. Aqueles mesmos conjuntos que aprendemos lá em álgebra! Daí você poderia me perguntar assim: *"mas prof., quais seriam os elementos desses conjuntos?"*, e eu magicamente te respondo: *"pontos"*!

É isso mesmo. Retas e planos são conjuntos de pontos! Pontos, são, em geral, identificados por uma letra maiúscula do nosso alfabeto (como M ou P), enquanto retas são identificadas por uma letra minúscula (como r ou s). Planos, porém, são identificados por *letras gregas* (como o π). Daí, na figura ao lado podemos dizer que A é um elemento de r assim como B é um elemento de π (isto é, $A \in r$ e $B \in \pi$).



Representações de reta e plano

Infinitude

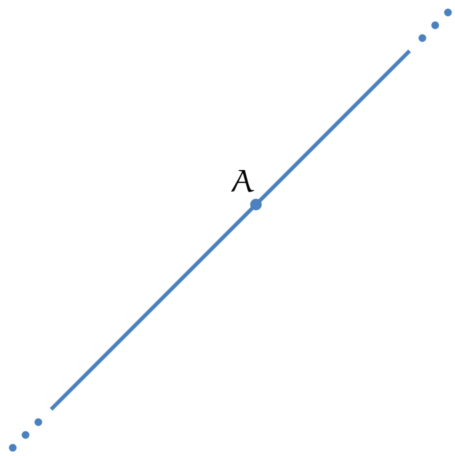
Retas e planos são *infinitos*. Isso quer dizer que você nunca conseguirá desenhar uma reta ou um plano perfeitos. Você conseguirá apenas *representar* uma parte deles. Na figura anterior, por exemplo, o que chamamos de reta r é, na verdade, apenas *um pedaço da reta* (pois a reta mesmo, em si, é infinita). O mesmo podemos dizer sobre o plano (é infinito para todas as direções).

Calma que já vamos chegar lá. Esse é um estudo preliminar importantíssimo para podermos prosseguir. De nada vai adiantar irmos direto para os "finalmentes" se não entendermos como funciona a base de nossos estudos. Por enquanto, foque em aprender e entender o que está sendo passado. Comece a olhar as figuras geométricas e a visualizar os pontos, as retas, isso é realmente muito importante. Estou confiando em você!

Subconjuntos notáveis da reta: semirreta e segmento de reta

A reta é, talvez, o ente fundamental mais importantes dentre os três em termos de provas militares. Retas determinam lados de triângulos, polígonos, ângulos, arestas de sólidos espaciais, etc. Retas estão realmente em todas as partes. Mas às vezes (na maioria das vezes), não estamos interessados na reta toda, mas sim em um "pedaço" dela. Há dois subconjuntos fundamentais que precisamos conhecer.

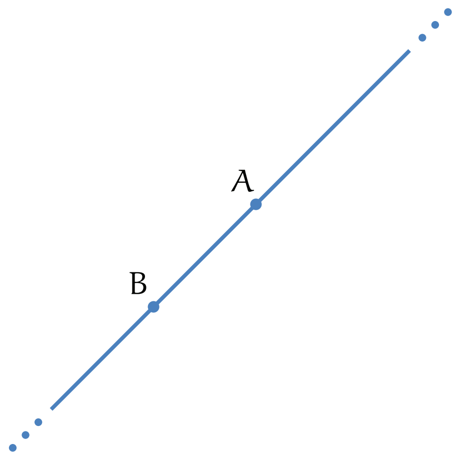
Temos na figura uma reta com um ponto A que a pertence. Fica bem claro de se ver que tal reta ficou dividida em dois pedaços bastante distintos. A cada um desses pedaços damos o nome de *semirretas*. Perceba que A é o ponto comum dessas duas semirretas; ele é chamado de a *origem* dessas semirretas.



Perceba também que semirretas não são infinitas para ambos os sentidos, mas apenas para um deles (pois o outro é limitado pelo ponto A).

Consideremos agora um outro ponto sobre a reta (um ponto distinto de A).

Agora que temos dois pontos sobre a reta, um outro subconjunto dela aparece automaticamente. Seria o conjunto dos pontos *entre*[2] *os dois pontos tomados*, isto é, o conjunto dos pontos entre A e B. A esse conjunto de pontos (subconjunto da reta) damos o nome de *segmento de reta*. Poderíamos representá-lo sem reticências, percebe? Porque ele não é infinito para qualquer sentido que seja. É limitado em ambos. Por isso dizemos que é possível *medi-lo*!



Veja que não dá para medir o comprimento de uma reta ou de uma semirreta (porque têm extensão infinita). Mas um segmento de reta dá! Podemos medi-lo nos utilizando das unidades básicas de comprimento (o metro, o centímetro, ou qualquer outra unidade de comprimento).

Sim, trata-se de um excelente exemplo! Apesar de parecer óbvio, fará uma enorme diferença termos essa noção de cabeça. Ah, aqui vai uma dica: quando quisermos nos referir à reta que contém um segmento de reta, chamamos essa reta de *a reta suporte do segmento*.

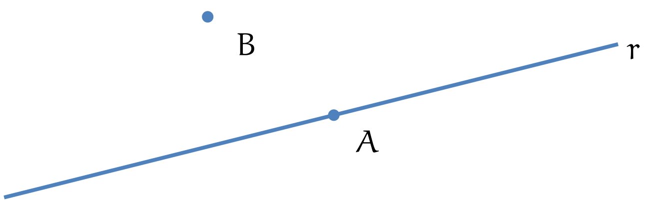
[2] Aqui levarei em consideração que seja intuitivo o que quero dizer com "entre os pontos".

1.2– Posições relativas

Aqui começaremos a estudar sobre as **posições** entre dois entes fundamentais. Focaremos no ponto e na reta. O **plano** será discutido mais tarde, quando começarmos a nos preocupar com a terceira dimensão.

Há duas posições relativas a discutirmos: entre **ponto e reta** e entre **ponto e ponto**. Analisemos cada uma delas.

Ponto e reta

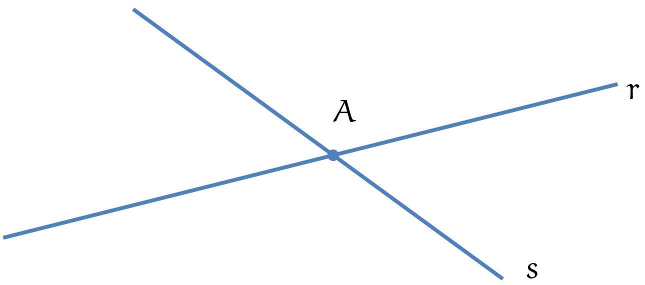


Nada mais do que já sabemos. Na figura ao lado observamos uma reta r e dois pontos, A e B. Cada um ocupa uma *posição relativa diferente* em relação à reta r. Isto porque $A \in r$ e $B \notin r$. Essas são as duas únicas posições relativas possíveis entre ponto e reta: ou o ponto *pertence à reta* ou *não pertence*. Muitas vezes leremos que A *está sobre a reta*[3], enquanto B não.

Reta e reta

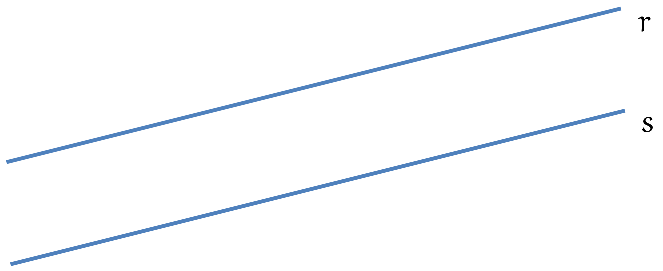
Aqui precisamos ficar ligados. Há três importantes posições relativas aqui, *cobradas com extrema frequência* em questões. Precisamos tomar bastante cuidado ao tentarmos entender esses conceitos. Vamos lá!

Há três classificações importantes que devemos dar a duas retas em posições relativas: transversais, paralelas e coincidentes[4].



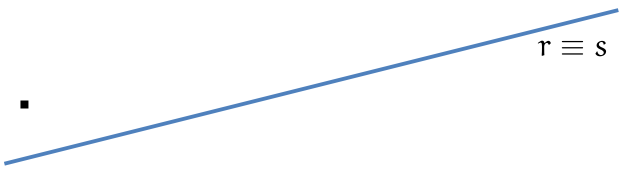
- *Retas transversais*[5]: São retas que têm *exatamente um ponto em comum*, ou seja, intersectam-se apenas umas vez (como ilustra a figura ao lado). Veja que o ponto A é *comum* (está ao mesmo tempo) tanto na reta r quanto na reta s. Lembrando-nos de que r e s são conjuntos de pontos, podemos dizer que $r \cap s = A$ (a interseção entre os conjuntos r e s é o ponto A).

[3] Expressão muito utilizada em questões.
[4] Algumas bibliografias famosas negam a existência de retas coincidentes; as bancas militares aqui estudadas, porém, consideram essa definição existente.
[5] Também utilizaremos muitas vezes o termo *retas concorrentes*



• *Retas paralelas*: Vamos deixar clara uma coisa: a definição que vou passar para vocês aqui *somente é válida para a geometria plana*. No espaço a definição a seguir não é suficiente para que duas retas sejam paralelas. Sabendo disso, vamos à definição: duas retas (num mesmo plano) serão ditas paralelas quando não tiverem pontos em comum, isto é, quando não se intersectarem. Dizemos então que as retas r e s são disjuntas[6], isto é, que $r \cap s = \varnothing$ (interseção vazia, não há elementos comuns). Para a representação de retas paralelas utiliza-se a notação: $r // s$.

• *Retas coincidentes*: São retas que possuem mais de um ponto em comum. Na prática, quando duas retas têm mais de um ponto em comum, significa que são na verdade representações da mesma reta. Veja na figura abaixo:

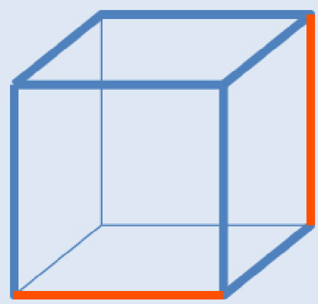


As "duas" retas representadas na figura "estão uma sobre a outra", fazendo com que sejam na verdade a representação da mesma reta. São representadas por: $r \equiv s$.

• *Retas perpendiculares*: São tipos especiais de retas transversais. Dizemos que duas retas são perpendiculares quando intersectam-se formando um *ângulo reto*[7]. A noção de perpendicularismo figura dentre as **mais importantes** de toda a geometria.

Veja a seguir um par de retas perpendiculares:

INDO MAIS FUNDO!



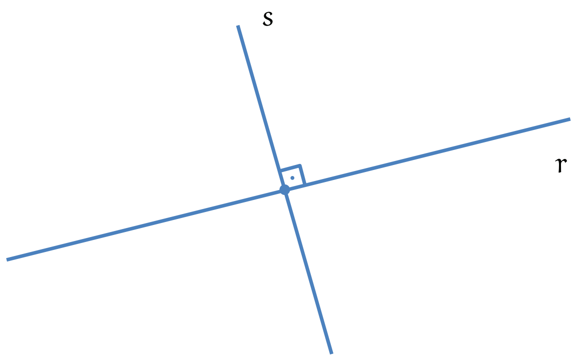
Observe o cubo acima e as retas representadas pelas arestas vermelhas. Responda as perguntas seguintes:

1. Essas retas se intersectam em algum ponto?

2. Essas retas são paralelas?

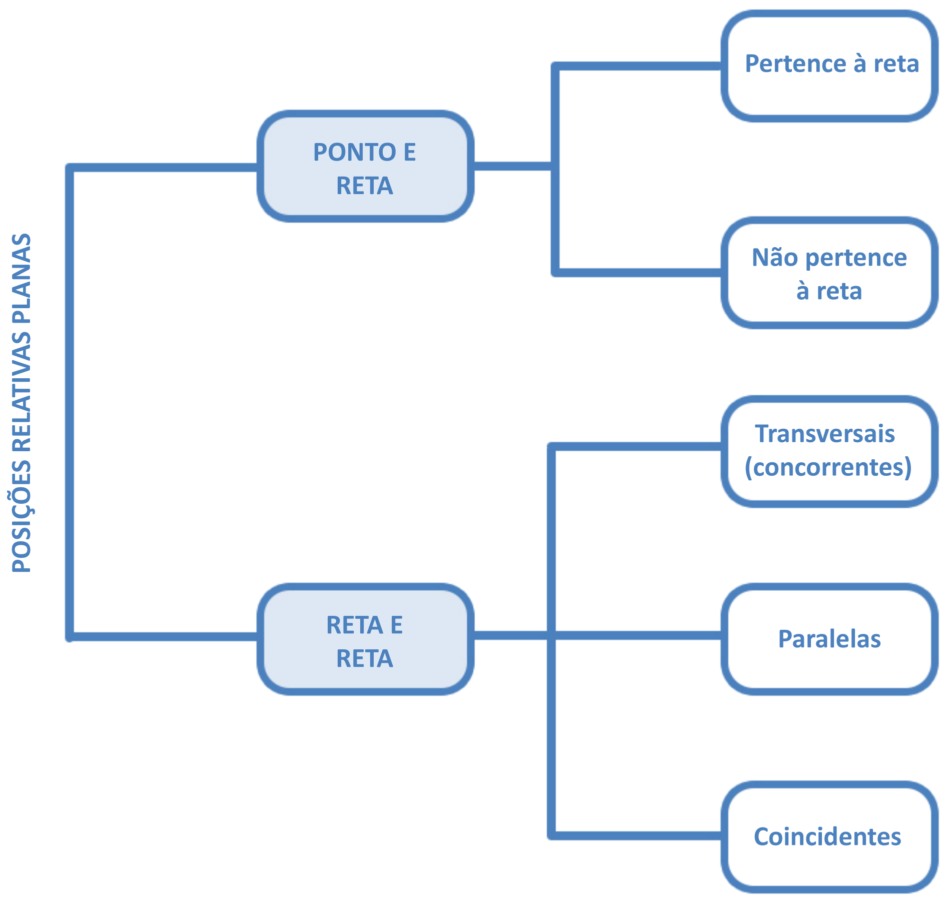
[6]Termo utilizado no estudos de conjuntos quando nos referimos a conjuntos que não tenham interseção entre si.
[7]a noção de ângulo será explicada na próxima seção

Trata-se de retas concorrentes porém com a especificidade de formarem um ângulo reto entre si, como foi dito. Alguns textos utilizarão o termo *ortogonal* para se referir a tais retas; cabe ressaltar aqui, porém, que o termo *ortogonal* tem significado um pouco mais amplo, e será discutido quando passarmos a considerar a terceira dimensão. Utilizaremos o símbolo $\perp$ para indicar perpendicularidade entre duas retas, ou seja: $r \perp s$ lê-se "r é perpendicular a s".



Terminamos assim o estudo das posições relativas no plano. Veja e reveja esse conteúdo até você ter a certeza de que entendeu as definições que passei para você (não se esquecendo nunca de que parte dessa certeza só será acometida quando formos fazer as questões).

ESQUEMATIZANDO



2.0– Ângulos

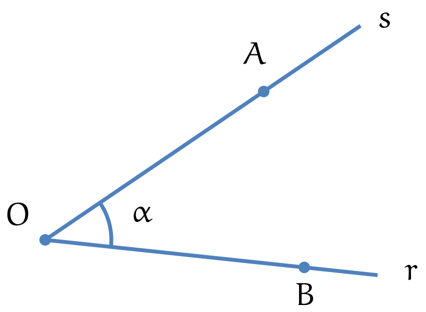
2.1– Características básicas

Começaremos então o nosso estudo sobre *ângulos*. Ângulos são nossos segundos elementos a serem medidos, visto que já aprendemos que segmentos de reta também têm medida (de comprimento). Muita atenção deve ser dada a esse tópico, ângulos são a nossa entrada para a parte métrica de nossos problemas.

Definição e notações

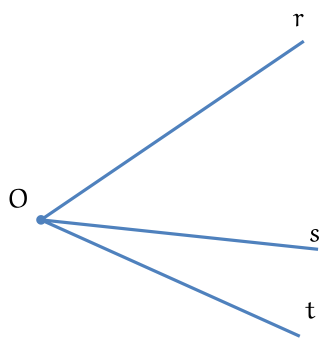
Um ângulo nada mais é que a figura formada pela união de duas semirretas (chamadas de lados) de mesmas origens.

Veja abaixo o exemplo de um ângulo:



Na figura, vemos duas semirretas, representadas por r e s. Não apenas a abertura entre as retas mas sim a figura toda é considerada o *ângulo* de fato. Veja que ambas têm a mesma origem (o ponto O). Num ângulo, a origem comum às semirretas é chamada de *vértice* do ângulo. De modo mais simples: vértice é o "bico" do ângulo. No nosso exemplo o ângulo tem vértice O. Há diversas notações angulares, e as provas costumam ser bastante diversas nesse ponto. Cito aqui as principais maneiras de notarmos um ângulo (utilizarei a figura anterior para os exemplos):

- $\hat{O}$: Notação que foca no *vértice* do ângulo. Caso haja ângulos adjacentes[1] no mesmo vértice, essa notação não é a melhor, pois traz ambiguidade. Veja um exemplo dessa ambiguidade:



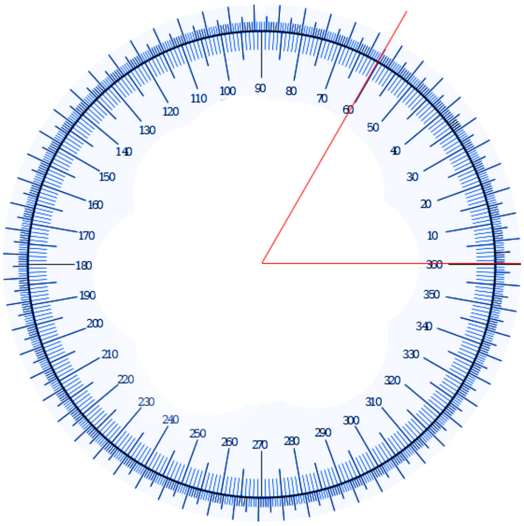
[1]Definido mais à frente.

Suponha que eu peça que você olhe para o ângulo $\hat{O}$ na figura anterior. Para qual ângulo que você olharia? Há possibilidades múltiplas, correto? Portanto, essa não é a melhor notação para o caso.

- $\angle AOB$: Notação que enfatiza as semirretas do ângulo. Não gera nenhum tipo de ambiguidade.
- $A\hat{O}B$: Notação quase idêntica à anterior, muda apenas pela forma de escrita.
- Muitas vezes o ângulo terá um nome já escrito na figura. Em nosso caso, por exemplo, trata-se do ângulo α.

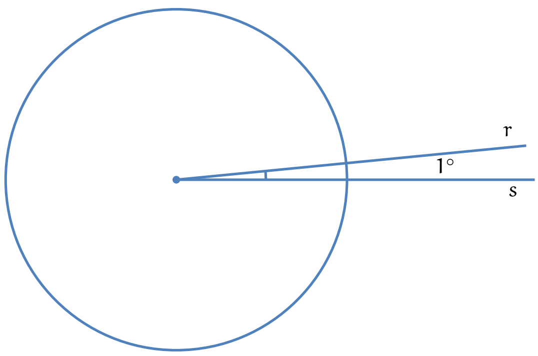
Medidas angulares

E aí, como será que medimos um ângulo? Há duas maneiras de medirmos, essencialmente. Uma é utilizando o *radiano*, que não veremos até falarmos de *arcos*. A outra, que utilizaremos agora, é o *grau*. Mas então, o que vem a ser um grau? Vamos ao entendimento.



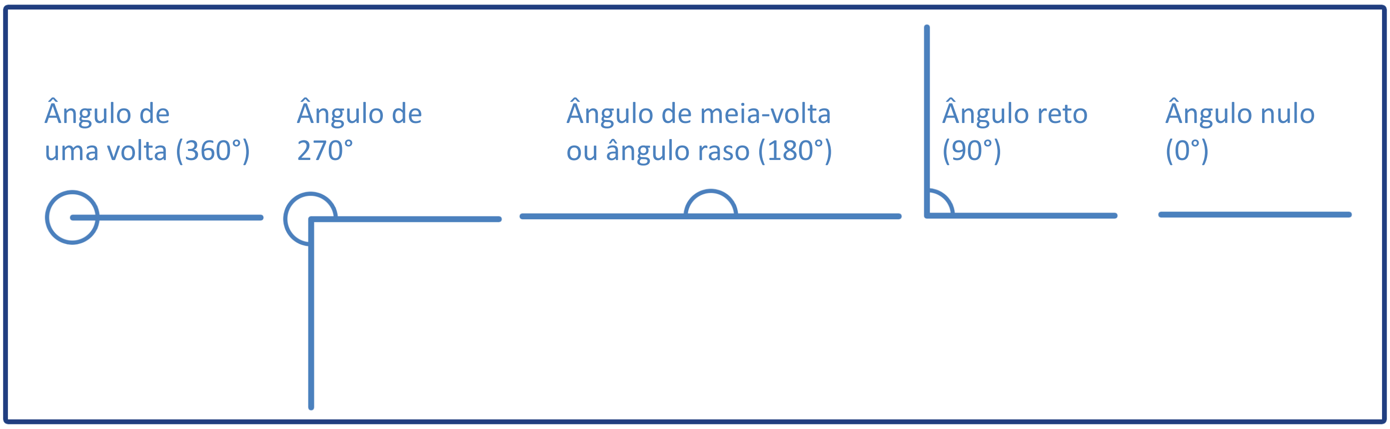
Divida a borda de um círculo[2] em 360 partes, como ilustra a figura ao lado. Agora considere duas semirretas partindo do seu centro. A medida do ângulo formado será a *quantidade de divisões entre as duas semirretas*. No nosso exemplo ao lado há 60 divisões entre uma semirreta e a outra. Dizemos então que trata-se de um ângulo de 60 graus (escreve-se $60°$). Um grau, então, é a menor divisão feita dentre as 360 divisões. Um ângulo de $45°$ é então, por exemplo, um ângulo em que couberam 45 divisões de um grau. Essa é a forma mais recorrente para a medida de um ângulo.

Vemos ao lado a representação de um ângulo de $1°$. Se construíssemos sucessivamente, a partir de cada lado dos ângulos, um ângulo de $1°$, precisaríamos de 360 construções para cobrir todo o círculo. Dessa forma, todo e qualquer ângulo pode ser medido a parte de uma comparação de "quantos ângulos de $1°$ cabem em seu interior, partindo do mesmo vértice". Veremos a seguir alguns ângulos especiais que merecem destaque.

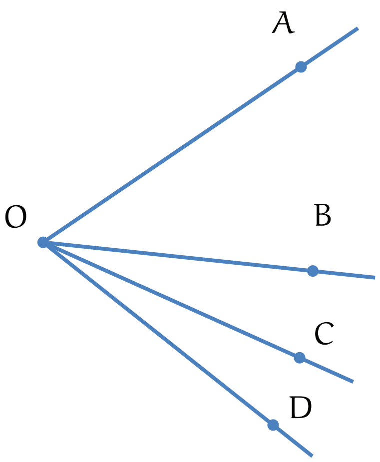


[2]Círculos são figuras importantíssimas que serão estudadas nas aulas seguintes.

TOME NOTA!



Ângulos consecutivos

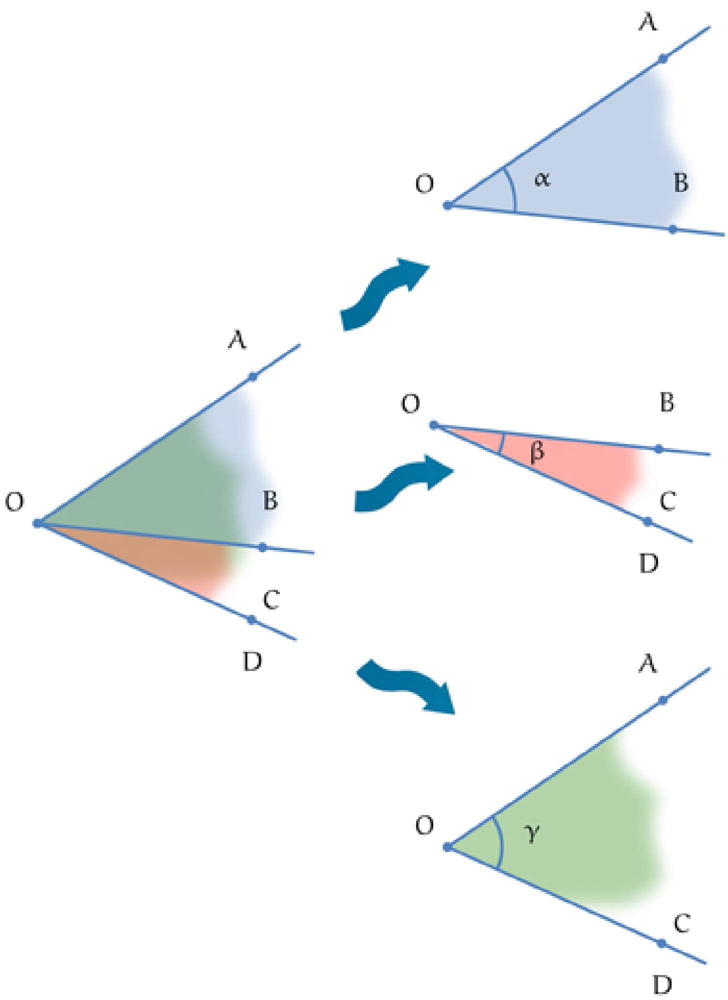


São ângulos que possuem o mesmo vértice e uma semirreta em comum. No exemplo ao lado, os ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são exemplos de ângulos consecutivos (pois têm o mesmo vértice O e têm uma semirreta em comum, que seria a semirreta BO). Os ângulos $\angle AOC$ e $\angle BOC$ também são consecutivos pelos mesmos motivos. Já os ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ não são consecutivos, pois apesar de partirem do mesmo vértice, não têm um lado em comum. Seguem mais alguns pares de ângulos consecutivos: $\angle BOC$ e $\angle COD$; $\angle AOC$ e $\angle COD$; $\angle AOD$ e $\angle BOD$; $\angle AOB$ e $\angle BOA$; etc. Veremos a seguir outro tipo de ângulo parecido com os ângulos consecutivos, mas com uma diferença essencial. Vamos a ele.

Ângulos adjacentes

São ângulos consecutivos sem *pontos interiores*[3] em comum, ou seja, ângulos que não se auto-intersectem. Para podermos adquirir uma boa intuição de que isso significa, precisaremos de uma demonstração visual do que quero dizer. Muita atenção então no exemplo a seguir. Separarei alguns ângulos de uma figura, e vamos tentar identificar aqueles que são adjacentes e aqueles que não. Lembre-se de observar bem a definição e de ter na cabeça a noção de ângulo de uma forma bem clara. Vamos lá!

[3] Esse conceito (o de *ponto interior*) não será definido formalmente, por ser altamente intuitivo.



Na figura, há três ângulos: um azul (que seria o ângulo α ou $\angle AOB$), um vermelho (que seria o ângulo β ou $\angle BOD$) e um verde (que seria o ângulo γ ou $\angle AOD$). Antes de destacá-los e separá-los, estavam todos em uma mesma figura. Dizemos então que o ângulo azul é interior ao ângulo verde, assim como o ângulo vermelho também o é. Eles são interiores ao verde porque têm *pontos interiores em comum*. Perceba que o mesmo não acontece entre os ângulos vermelho e azul. Estes ângulos não têm pontos interiores entre si e portanto são os únicos **adjacentes** da figura.

Pergunta, vamos lá: os ângulos $\angle AOB$ e $\angle AOD$ são consecutivos? E adjacentes?

Eles são consecutivos, porque têm mesmos vértices e têm um lado em comum, porém, não são adjacentes, porque apesar de consecutivos, têm pontos interiores em comum; isso fere a definição. Então apesar de consecutivos, acabam não sendo adjacentes.

QUESTÕES COMENTADAS

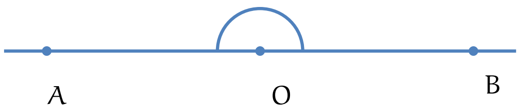
(EEAR-2002) QUESTÃO 1

É falso afirmar:

(a) Se $A\hat{O}B$ é um ângulo raso, então $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas.
(b) Se $A\hat{O}B$ é um ângulo nulo, então $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas.
(c) Dois ângulos adjacentes, cujos lados não comuns são semirretas opostas, somam $180°$.
(d) Dois ângulos adjacentes são sempre consecutivos.

Trata-se de uma questão em que inevitavelmente teremos de analisar alternativa por alternativa. Demos uma olhada então:

Alternativa (a): *Se* $A\hat{O}B$ *é um ângulo raso, então* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$ *são semirretas opostas.*

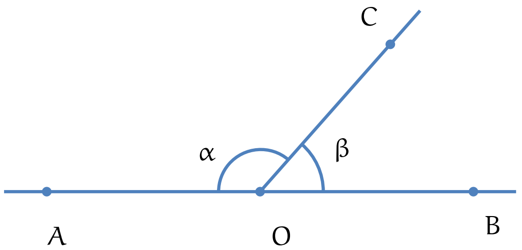


Alternativa verdadeira. Veja que na figura ao lado $A\hat{O}B$ é um ângulo raso, semirretas em oposição. Caso as semirretas não sejam opostas, necessariamente o ângulo não medirá $180°$.

Alternativa (b): *Se* $A\hat{O}B$ *é um ângulo nulo, então* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$ *são semirretas opostas.*

Alternativa falsa. Acabamos de discutir isso. Se as semirretas que partem do vértice de um ângulo são opostas, então o ângulo é raso, não nulo. Para o ângulo ser nulo, é necessário que as semirretas tenham sentidos iguais, não opostos.

Alternativa (c): *Dois ângulos adjacentes, cujos lados não comuns são semirretas opostas, somam* $180°$.



Alternativa verdadeira. Observe os ângulos da figura ao lado. Veja que os ângulos $\angle AOC$ e $\angle BOC$ são adjacentes (pois são consecutivos e não têm pontos interiores em comum). Veja também que ambos têm as semirretas não comuns opostas, que seriam as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Isso nos diz que $\angle AOB$ é um ângulo raso e portanto $\alpha + \beta = 180°$.

Alternativa (d): *Dois ângulos adjacentes são sempre consecutivos.*

Sim, faz parte da definição de ângulos adjacentes. Para que dois ângulos sejam adjacentes eles têm de ser consecutivos (e não terem pontos interiores em comum). Alternativa verdadeira.

Gabarito: B

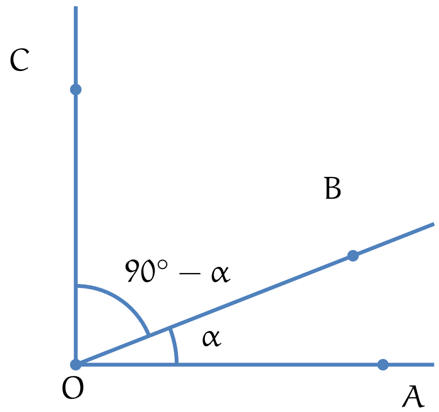
Ângulos complementares

Galera, aqui vai uma convenção que faremos de agora em diante: todas as vezes que forem utilizada expressões como *somar ou subtrair ângulos*, estarei me referindo à *medida* do ângulo. Faço isso pra não ter de falar *medida* todas as vezes em que for me referir a uma operação.

Pois bem, à definição: dois ângulos serão ditos complementares quando somarem $90°$, isto é, quando completarem um ângulo reto. Os ângulos de $20°$ e $70°$ são exemplos de ângulos complementares (pois $20° + 70° = 90°$).

Sejam agora α e β dois ângulos complementares. Então $\alpha + \beta = 90°$, e daí $\beta = 90° - \alpha$.

Isso nos diz que, para calcularmos o complemento de um ângulo α, basta calcularmos $90° - \alpha$.



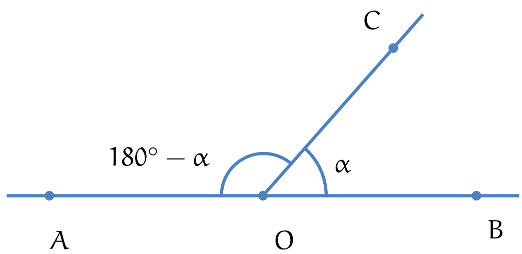
Vemos ao lado a representação de dois ângulos adjacentes complementares: α e $90° - \alpha$. Importante você notar que trata-se de uma relação *simétrica*: podemos dizer que $\angle AOB$ é o complemento de $\angle BOC$ assim como podemos dizer que $\angle BOC$ é o complemento de $\angle AOB$. Em ambos os casos o que importa de fato é que $\angle AOB + \angle BOC = 90°$.

Vale também dizer que $45°$ é o único ângulo que é complemento de si mesmo. Consegue ver o porquê?

Ângulos suplementares

A definição é quase que a mesma de ângulos complementares. A única diferença é que para os ângulos suplementares a soma deve ser de $180°$. Então dois ângulos serão considerados suplementares quando a soma dos dois resultar em um ângulo raso ($180°$). Como exemplo, vale que $120°$ e $60°$ são ângulos suplementares, visto que $120° + 60° = 180°$

Quando dois ângulos α e β são suplementares, vale que $\alpha + \beta = 180°$, como já sabemos. Logo $\beta = 180° - \alpha$. Isso nos diz que quando quisermos calcular o suplemento de α bastará calcularmos $180° - \alpha$. Ao lado vemos a situação padrão de dois ângulos adjacentes suplementares. Como vimos em exercício anterior, as semirretas não comuns são necessariamente opostas ($\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$).



QUESTÕES COMENTADAS

(EEAR-2018) QUESTÃO 2

O complemento do suplemento do ângulo de $112°$ mede

(a) $18°$
(b) $28°$
(c) $12°$
(d) $22°$

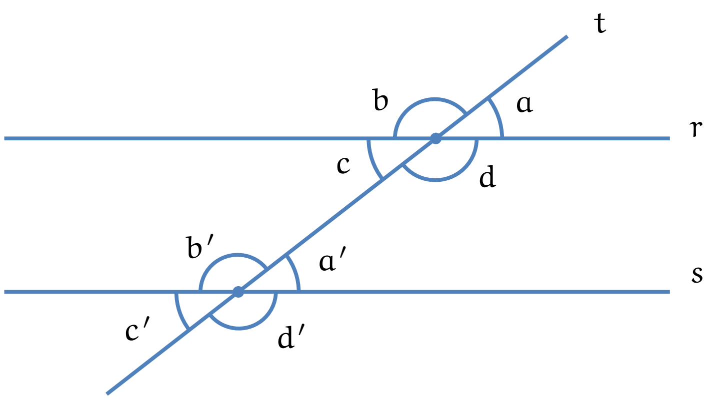
Como queremos calcular o complemento do suplemento, o ideal é primeiro calcularmos o suplemento. O suplemento de $112°$ é $180° - 112° = 68°$. Queremos calcular o complemento desse ângulo. Logo, basta calcularmos $90° - 68° = 22°$.

Gabarito: D

Ângulos replementares

São ângulos que somados resultam em $360°$, como o par $270°$ e $90°$. O replemento de um ângulo α é $360° - \alpha$, inteiramente análogo ao que concluímos anteriormente para ângulos complementares e suplementares. Ângulos replementares então, quando somados, resultam em um ângulo de uma volta.

Ângulos em retas paralelas cortadas por transversal



Alguns ângulos importantíssimos aparecem quando cortamos duas retas paralelas com uma reta transversal. Ao lado, vemos oito ângulos elementares: a, b, c, d, a', b', c' e d'. Começarei agora a atribuir alguns nomes que serão utilizados no decorrer de todas as nossas próximas aulas. Vamos então a esses nomes:

- *Ângulos colaterais internos*: Seriam os ângulos c e d, assim como os ângulos a' e b'. Ambos os pares citados são ângulos colaterais internos. Dizemos que são colaterais porque têm um lado em comum (aquele sobre a reta t). E são internos porque estão dentro da região delimitada pelas retas r e s. Sua característica principal é que são sempre *suplementares*, isto é: $c + d = 180°$ e $a' + b' = 180°$ (podendo ser percebido por análise imediata da figura).

- *Ângulos colaterais externos*: Seriam os ângulos a e b, assim como os ângulos c' e d', análogo ao anterior. Nesse caso são externos porque estão fora da região delimitada pelas retas r e s. Sua característica principal é que são sempre *suplementares*, isto é: $a + b = 180°$ e $c' + d' = 180°$.

- *Ângulos correspondentes*: Há quatro pares de ângulos correspondentes na figura: a e a', b e b', c e c', d e d'. Sua característica principal[4] é que tais pares têm mesmas medidas angulares, isto é: $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ e $d = d'$.

[4] Trata-se de um fato *axiomático*, isto é, não se demonstra. É um fato que é simplesmente aceito, sem a necessidade de justificativas.

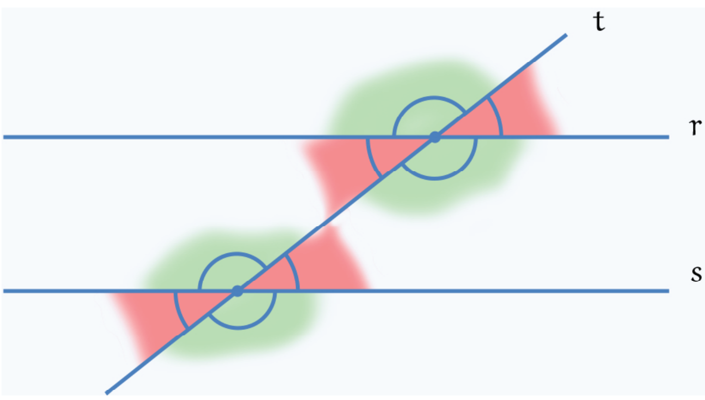
- *Ângulos opostos pelo vértice (OPV)*: Esses são bastante famosos! Há também quatro pares: a e c, b e d, a' e c', b' e d'. Perceba que todos eles são de fato formados pelo mesmo vértice, mas são opostos em relação a ele. A característica mais importante dos ângulos opostos pelo vértice é que têm medidas iguais, assim como os correspondentes. Entendamos o porquê disso. Vejamos por exemplo os ângulos a e c. Como conseguiríamos provar que são, de fato, iguais? Bom, veja que os ângulos a e b são suplementares, e portanto $a + b = 180°$. Daí, $a = 180° - b$. Agora observe os ângulos b e c. São suplementares também, correto? Então, $b + c = 180°$, e portanto, $c = 180° - b$. Logo $a = c$, visto que ambos os ângulos são iguais a $180° - b$. A prova para os outros pares de ângulos OPV se dá de modo análogo.

Isso mesmo! Viu ângulos correspondentes ou opostos pelo vértice, pode dizer que são iguais sem medo de ser feliz! Tome cuidado porém para não sair achando que tudo é OPV ou correspondente, você pode acabar errando. Tem que seguir direitinho a definição que eu te dei, e ter a figura na cabeça. Assim não tem erro. Tranquilo? Vamos dar prosseguimento então!

- *Ângulos alternos internos*: Também super famosos! São os pares c e a', d e b'. Assim como os OPV e os correspondentes, eles também são iguais entre si. Vejamos o porquê. Considere os ângulos c e a'. Por que eles seriam iguais? Então, observe que c e c' são correspondentes. Então, $c = c'$. Mas c' é OPV com a', logo $c' = a'$ e portanto, $c = a'$, provando o que queríamos.

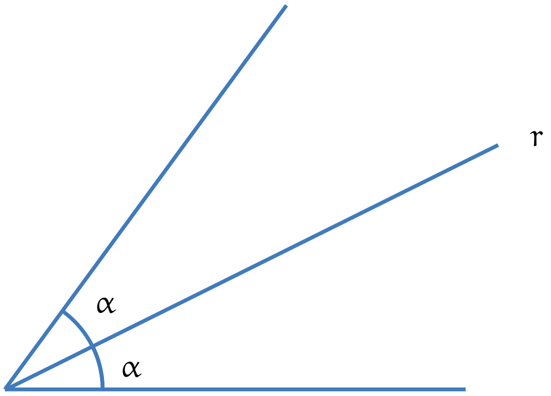
- *Ângulos alternos externos*: Super análogos aos alternos internos. São os pares: a e c', b e d'. São iguais, sempre. As razões são as mesmas para ângulos alternos internos.

Vemos então que, como ilustra a figura ao lado, temos um monte de ângulos iguais. Perceba que os verdes são iguais entre si assim como os vermelhos também são. Tente justifica o porquê desses ângulos serem iguais baseado no que vimos nessa seção; você estudante, se ajudará muito se já souber esses ângulos com a nomenclatura correta, de cabeça. Estarei contando com isso, não se esqueça disso!



Bisssetriz

Rapaz, que definição importante faremos agora. Você, estudante, provavelmente conhece esse nome de algum lugar. Vamos dar uma clareada na definição de bissetriz.



Chamamos de bissetriz a *reta* que divide um ângulo em duas partes de mesmas medidas[5]. Veja, então, a figura ao lado, onde temos a reta r exercendo papel de bissetriz. Veja que ela, de fato, divide o ângulo de seu vértice em duas partes iguais (medindo α).

Por ora, não falaremos muito mais sobre bissetrizes. Porém, posteriormente, essa será uma construção geométrica muito importante. Tenha essa definição na cabeça. Precisaremos muito mesmo dela. Tudo bem, então? Tudo tranquilo?

Mas para que serve?

Para resolvermos problema que envolvam:

Teorema da bissetriz (interna e externa);

Incentro;

Construções com bissetrizes.

Declaro então essa parte angular quase finalizada, já já poderemos falar sobre triângulos. Vimos bastante coisa nesse capítulo. Vimos as definições principais de ângulos, algumas classificações, alguns nomes especiais, todos nomes que caem em sua prova. Por fim, veremos a seguir mais duas classificações importantes. Muitas vezes estaremos interessados em se um ângulo tem medida superior ou inferior a um ângulo reto ($90°$). Daí as novas classificações, que daremos agora.

Ângulos agudos e obtusos

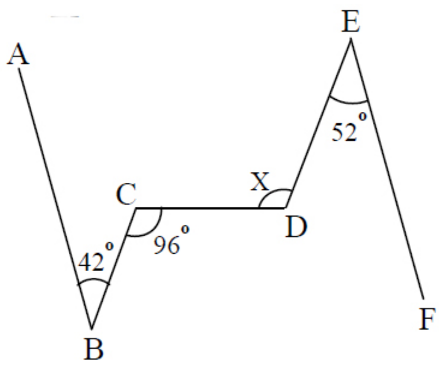
Definição super simples: ângulos agudos são ângulos menores que um ângulo de $90°$, enquanto ângulos obtusos são ângulos maiores que um ângulo de $90°$. São termos utilizados com bastante constância, que devemos reconhecer prontamente quando surgirem.

[5] A definição mais precisa de bissetriz é a de que bissetriz é um lugar geométrico. Não entraremos nesse ponto aqui, mas posteriormente será mencionado.

QUESTÕES COMENTADAS

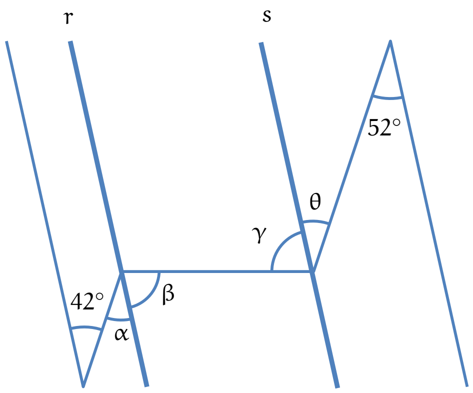
(EEAR-2000) QUESTÃO 3

Na figura $\overline{BA} \parallel \overline{EF}$. A medida de X é:



(a) $105°$
(b) $106°$
(c) $107°$
(d) $108°$

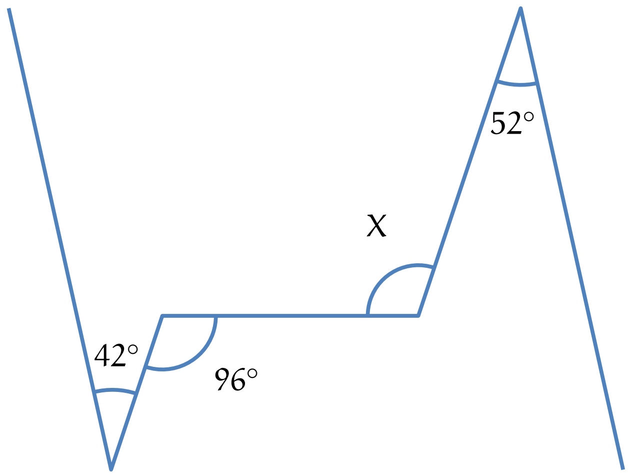
R: Observe a ilustração abaixo.



Da figura que nos foi apresentada, traçamos duas retas paralelas a AB e EF, que seriam as que representei como r e s. Essas duas retas "quebraram" o ângulo de $96°$ em dois pedaços (α e β), e o ângulo X em dois pedaços também (γ e θ). Perceba que α e $42°$ são alternos internos, e portanto $\alpha = 42°$. Mas como $\alpha + \beta = 96°$, temos $42° + \beta = 96°$ e portanto $\beta = 96° - 42° = 54°$. Até aí, tudo beleza?

Veja também que β é alterno interno com γ, e portanto, $\beta = \gamma$. Logo $\gamma = 54°$. Mas veja também que θ e $52°$ também são alternos internos! Portanto $\theta = 52°$ e daí o ângulo pedido, X, vale: $X = \gamma + \theta = 54° + 52° = 106°$.

Aqui vai, porém, uma forma mais **simples** de resolvermos. Resolveremos por meio de um teorema conhecido como **teorema do bico**. Vamos entendê-lo. Observe a figura inicial do problema:



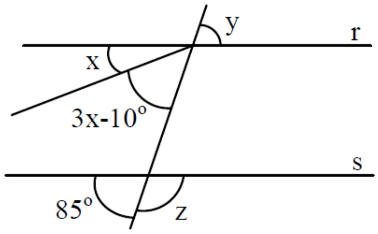
Esse teorema só funciona quando as retas laterais que delimitam a sua figura são paralelas. Nesse caso, o problema de fato afirmou serem paralelas. Então podemos usar o teorema do bico. O teorema do bico diz que se uma *poligonal*[6] for desenhada com extremidades sobre duas retas paralelas, **a soma dos ângulos que olham para um lado será igual à soma dos ângulos que olham para o outro**. Em nossa questão, então, podemos ver que os ângulos $42°$ e X olham para cima enquanto $96°$ e $52°$ olham para baixo. Logo: $42° + X = 96° + 52°$, e portanto $X = 148° - 42° = 106°$.

Gabarito: B

(EEAR-2003) QUESTÃO 4

Nesta figura, as retas r e s são paralelas entre si.
Os valores de x, y e z são, respectivamente

[6] Sequência de segmentos de reta com uma extremidade comum.



(a) $23°45'$, $85°$ e $95°$.
(b) $25°$, $90°$ e $90°$.
(c) $23°7'5''$, $95°$ e $85°$.
(d) $26°15'$, $85°$ e $95°$.

R: Veja que os ângulos de x e $3x - 10°$, juntos, formam um ângulo *correspondente* ao ângulo de $85°$. Então:

$$\begin{aligned} x + 3x - 10° &= 85° \\ 4x &= 85° + 10° \\ 4x &= 95° \\ x &= \frac{95°}{4} \\ x &= 23,75°. \end{aligned}$$

Temos então que $x = 23,75°$, isto é, 23 graus com adicionais $0,75$ graus. Para passarmos esse excedente para minutos[7], basta multiplicar por 60. Então: $0,75° = 60 \cdot 0,75 = 45'$ (45 minutos). Então $x = 23°45'$.
Vamos a y e z. Veja que y é alterno externo com $85°$, e portanto $y = 85°$. Por fim, z é um ângulo suplementar a $85°$; portanto $z = 180° - 85° = 95°$.

Gabarito: A

[7] Graus funcionam como horas, quando comparados a minutos. Um grau equivale a 60 minutos e um minuto equivale a 60 segundos.

(EEAR-2003) QUESTÃO 5

Seja α um ângulo agudo. Se somarmos a medida de um ângulo reto à medida de α e, em seguida, subtrairmos dessa soma a medida do suplemento de α, obteremos sempre a medida de um ângulo

(a) nulo, qualquer que seja a medida de α.
(b) reto, qualquer que seja a medida de α.
(c) agudo, desde que $45° < \alpha < 90°$.
(d) raso, desde que $\alpha < 45°$.

R: Primeiro soma-se um ângulo reto a α, chegando a $90° + \alpha$. Em seguida subtrai-se a medida do suplemento de α. O suplemento de α é $180° - \alpha$, logo, subtraindo essa medida de $90° + \alpha$, obtém-se:

$$\begin{aligned} 90° + \alpha - (180° - \alpha) &= 90° + \alpha - 180° + \alpha \\ &= 2\alpha - 90°. \end{aligned}$$

Agora façamos a análise dos valores que podem ser obtidos com $2\alpha - 90°$. Primeiro, ângulos aqui são positivos. Logo:

$$\begin{aligned} 2\alpha - 90° &> 0 \\ 2\alpha &> 90° \\ \alpha &> 45°. \end{aligned}$$

Em seguida, analisemos quando que esse ângulo torna-se reto. Para isso, basta igualarmos tal ângulo a $90°$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} 2\alpha - 90° &= 90° \\ \alpha &= 90°. \end{aligned}$$

Como $2\alpha - 90°$ é crescente, se $\alpha > 90°$, o ângulo será obtuso; porém, se $\alpha < 90°$, será agudo. Veja então que para o ângulo ser agudo, devemos ter $\alpha < 90°$ e $\alpha > 45°$ (para garantir que seja positivo). Logo será agudo se $45° < x < 90°$.

Gabarito: C

(EEAR-2016) QUESTÃO 6

Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes. Sendo $\hat{A} = 2x + 15°$ e $\hat{B} = 5x - 9°$. Assinale a alternativa que representa, corretamente, o valor de x.

(a) $2°$
(b) $8°$
(c) $12°$
(d) $24°$

R: Como $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes, devemos ter:

$$\begin{aligned} 2x + 15° &= 5x - 9° \\ 2x - 5x &= -9° - 15° \\ -3x &= -24° \\ x &= 8°. \end{aligned}$$

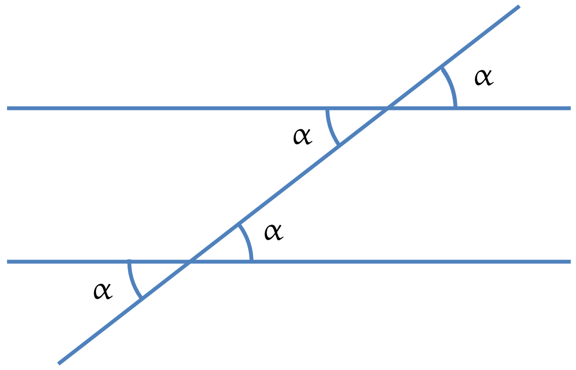
Gabarito: B

(EEAR-2002) QUESTÃO 7

Duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, de modo que a soma dos ângulos agudos formados vale $144°$. Então a diferença entre as medidas de um ângulo obtuso e de um agudo é

(a) $85°$
(b) $92°$
(c) $108°$
(d) $116°$

R: Desenhar uma boa figura nessa questão é essencial. Não fique tentando fazer de cabeça, não. Mesmo que consiga, não é esse o propósito aqui. Vamos então dar uma olhada na figura que resolve esse exercício.



Como são quatro ângulos agudos que somam $144°$, temos:

$$\alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 144°$$
$$4\alpha = 144°$$
$$\alpha = 36°.$$

O suplemento de $36°$ é o ângulo $180° - 36° = 144°$. Daí a diferença entre o ângulo obtuso e o agudo é: $144° - 36° = 108°$.

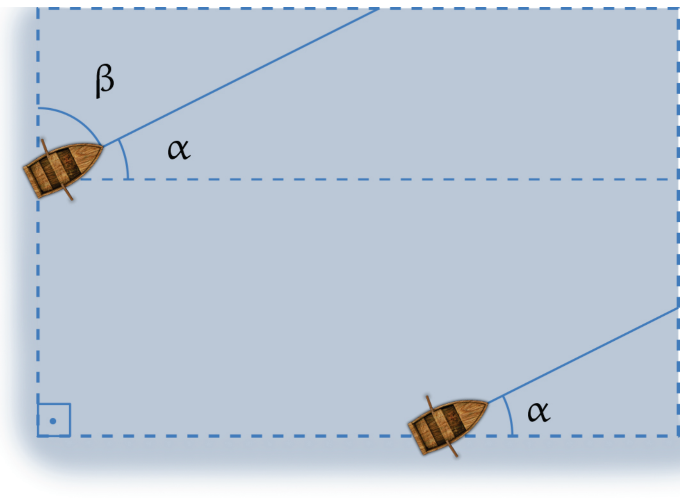
Gabarito: C

(EFOMM-2005) QUESTÃO 8

Dois barcos navegam em direções perpendiculares. A trajetória de um deles forma um ângulo de $18°24'$ com a direção indicada pela agulha da bússola, indicando o norte. Qual é a medida do ângulo agudo formado pela trajetória do outro barco e pela direção indicada pela agulha da bússola?

(a) $41°36'$
(b) $51°36'$
(c) $71°36'$
(d) $75°36'$
(e) $79°36'$

R: Montando a situação, temos o ângulo $\alpha = 18°24'$ formado pelas semirretas da trajetória e da bússola do navio horizontal, e o ângulo β, formado pela trajetória do navio vertical e a direção da agulha da bússola. Veja a representação na figura abaixo:

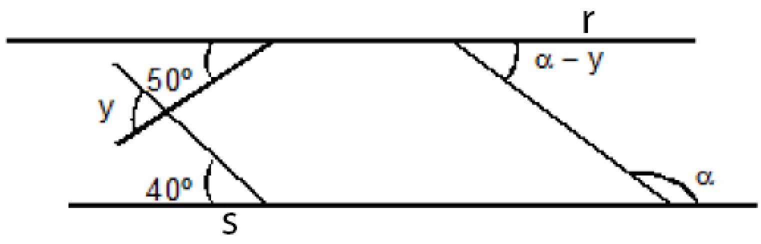


Como α e β são complementares, $\beta = 90° - 18°24' = 71°36'$.

Gabarito: C

(AFA-2001) QUESTÃO 9

Sejam r e s retas paralelas. A medida do ângulo α, na figura abaixo, é



(a) $115°$
(b) $125°$
(c) $135°$
(d) $145°$

R: Observe a figura, na qual destaquei o ângulo y e seu OPV imediato.

Então, pelo *Teorema do Bico*, podemos afirmar que $y = 50° + 40° = 90°$. Veja também que, na direita da figura, o ângulo $\alpha - y$ reaparece com seu alterno interno, tornando-se colateral com α. Portanto $(\alpha - y) + \alpha = 180°$. Visto que $y = 90°$:

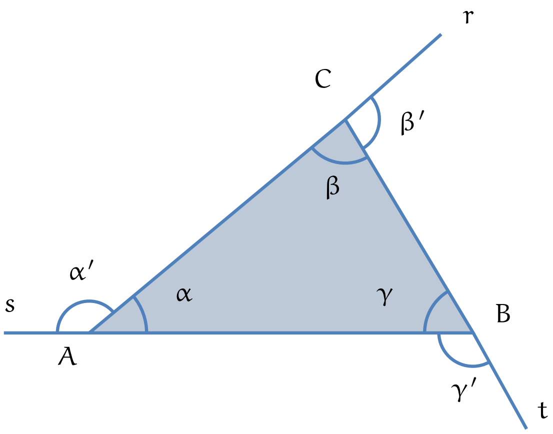
$$
\begin{aligned}
(\alpha - y) + \alpha &= 180° \\
\alpha - 90° + \alpha &= 180° \\
2\alpha &= 180° + 90° \\
2\alpha &= 270° \\
\alpha &= 135°.
\end{aligned}
$$

Gabarito: C

3.0– TRIÂNGULOS

3.1– ELEMENTOS FUNDAMENTAIS

Eis então que começamos a falar das figuras mais importantes de toda a geometria plana: os triângulos.



Triângulos são a forma mais simples de *polígonos*, figuras que posteriormente discutiremos de modo mais geral. Essencialmente o que devemos entender agora é que triângulo é a figura formada e determinada por três segmentos de reta com vértices mutuamente compartilhados. Ao lado vemos um triângulo com todos os seus elementos mais importantes. Falaremos a seguir de cada um deles, explicando os seus funcionamentos, suas definições, e suas propriedades mais importantes. Devemos tomar muito cuidado com essas definições, apesar desse assunto ser relativamente fácil. Vamos lá!

- *Vértices*: são os pontos não-colineares A, B e C. Um triângulo, como pode ser percebido, sempre têm três vértices.

- *Lados*: são os segmentos de reta com extremidades nos vértices. Essa definição somente é válida para triângulos. Polígonos com mais de três lados serão vistos nas próximas aulas. Em nossa figura, são lados os segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. As retas r, s e t são as *retas suportes* desses lados.

- *Ângulos internos*: São os ângulos internos ao triângulo formados pelos seus lados. Em nossa figura, seriam: α, β e γ.

- *Ângulos externos*: São os ângulos suplementares adjacentes aos ângulos internos do triângulo. Em nossa figura, seriam: α', β' e γ'.

- *Região triangular*: É o subconjunto do plano delimitado pelos lados. Na figura, seria a região azulada interior ao triângulo.

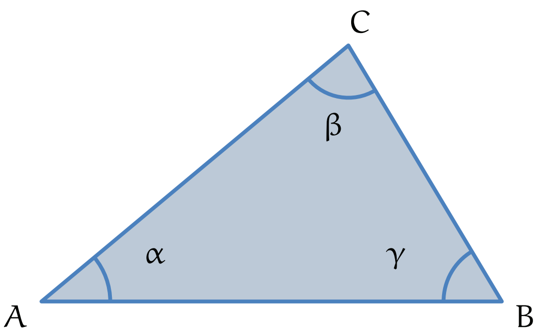
Perceba então que existem dois tipos de ângulos em triângulos: os ângulos externos e os ângulos internos. Eles são suplementares adjacentes, vê isso nas figuras?

Isso mesmo! Se você sabe o valor de um deles, o outro será com certeza o suplementar desse valor. Isso vale não só para triângulos, mas para polígonos quaisquer, como veremos nas aulas seguintes. Veremos que existem diversos atalhos para acharmos ângulos que dependem justamente dessa noção. Excelente!

Falado disso, vamos dar uma olhada agora no teorema angular mais importante de toda a geometria plana, sem sombra de dúvidas.

3.2– Relações angulares em triângulos

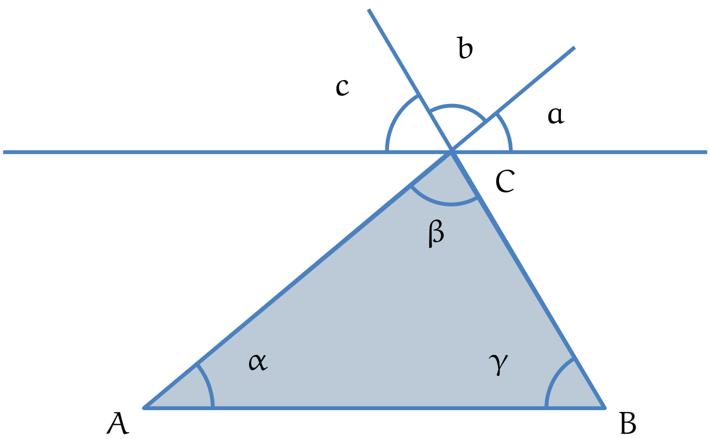
Soma dos ângulos internos



Observe o triângulo ao lado. Suponha que desejemos calcular $\alpha+\beta+\gamma$. Como podemos prosseguir para encontrarmos um resultado de fato?

Pois bem, esse é, como já dito, um dos teoremas mais importantes de toda a geometria e sem sombra de dúvidas é pelo menos o angular mais importante. Vamos mostrar a seguir que essa soma *sempre é igual a* 180°.

Trace, passando por C, uma paralela a $\overline{AB}$, como ilustra a figura ao lado. Prolongue também os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. Veja que formaram-se os ângulos a, b e c naturalmente, e veja que $a+b+c=180^\circ$.

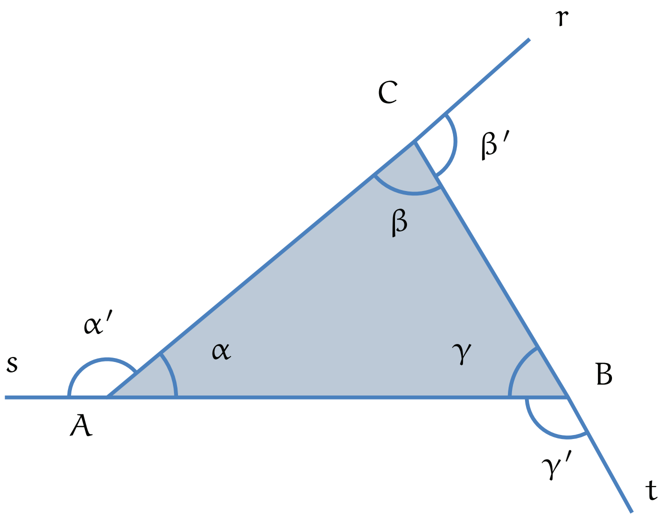


Mas veja também que a e α são *ângulos correspondentes*, assim como c e γ. Logo $a=\alpha$ e $c=\gamma$. Visto que b e β são OPV, temos finalmente que $b=\beta$ e portanto $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$.

Portanto:

A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°.

Soma dos ângulos internos não-adjacentes



Olhemos novamente a nossa figura inicial. Veja que $\alpha' + \alpha = 180°$, e portanto $\alpha' = 180° - \alpha$. Certo, mas também sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, e portanto $\beta + \gamma = 180° - \alpha$. Ora se tanto α' quanto $\beta + \gamma$ são iguais a $180° - \alpha$, então $\alpha' = \beta + \gamma$. Veja que β e γ são justamente os ângulos internos de $\triangle ABC$ (triângulo ABC) que *não são adjacentes* a α'. Então, é sempre verdade que um ângulo externo qualquer de um triângulo será sempre a soma das medidas dos ângulos internos não-adjacentes àquele ângulo externo. Para esse triângulo, por exemplo, podemos dizer que: $\alpha' = \beta + \gamma$, $\beta' = \alpha + \gamma$ e $\gamma' = \alpha + \beta$. Essa propriedade é um grande atalho para a resolução de questões diversas. Veremos nos exercícios.

3.3– Condição de existência e classificações

Imagine três medidas para os lados de um triângulo. Sério mesmo, imagine. Imagine três números positivos e assuma que esses números sejam as medidas dos lados de um triângulo.

Muito bem, a pergunta é: será que esse triângulo que você imaginou existe? Será que existe um triângulo com lados $7, 9$ e 11? Ou $11, 20, 35$? Para analisarmos essas condições, devemos utilizar o que chamamos de *condição de existência triangular*. Vamos então ao conceito.

Para que um triângulo exista, basta que a soma de dois lados quaisquer *sempre supere o terceiro*. isso nos diz, por exemplo, que existe o primeiro triângulo sugerido, de lados $7, 9$ e 11; isso porque a soma de quaisquer dois lados superará o restante. Veja que $7 + 9 = 16$, que supera 11; $7 + 11 = 18$, que supera 9; e $9 + 11 = 20$, que supera 7.

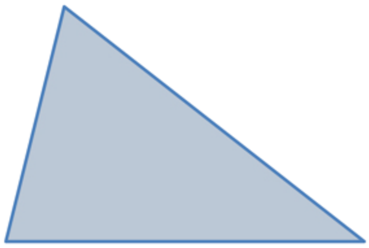
Porém, o mesmo não acontece com o hipotético triângulo de lados $11, 20$ e 35. Veja que $11 + 20 = 31$, que *não supera* 35. Logo, tal triângulo não existe.

Muito bem resumido! Sim, esse é o teste que sempre fazemos para verificar se um triângulo existe ou não. Algebricamente falando, podemos dizer que dado um triângulo de lados a, b e c, sempre deve acontecer $a + b > c$ para que o triângulo exista. Excelente, vamos que vamos!

Existem algumas classificações de triângulos que merecem a nossa atenção. Vamos a elas.

TOME NOTA!

QUANTO AOS LADOS

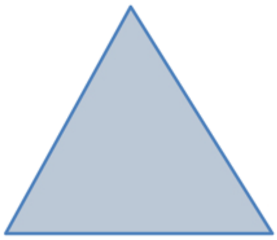


TRIÂNGULO ESCALENO

Todos os lados com medidas diferentes.

TRIÂNGULO ISÓSCELES

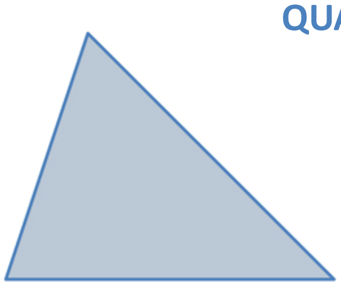
Dois lados com mesmas medidas.



TRIÂNGULO EQUILÁTERO

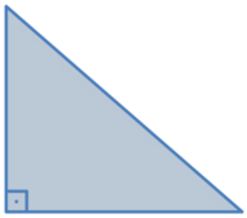
Todos os lados com mesmas medidas.

QUANTO AOS ÂNGULOS



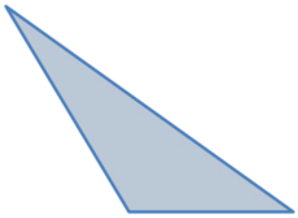
TRIÂNGULO ACUTÂNGULO

Todos os ângulos agudos.



TRIÂNGULO RETÂNGULO

Um ângulo reto.



TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO

Um ângulo obtuso.

Essas classificações, acho que não preciso nem falar, são extremamente recorrentes em exercícios diversos.

QUESTÕES COMENTADAS

(EEAR-2002) QUESTÃO 10

Coloque V ou F conforme as afirmações sejam verdadeiras ou falsas:

( ) Dois ângulos adjacentes são suplementares.

( ) Dois ângulos que têm o mesmo complemento são congruentes.

( ) Dois ângulos suplementares são adjacentes.

( ) Um triângulo obtusângulo pode ser isósceles.

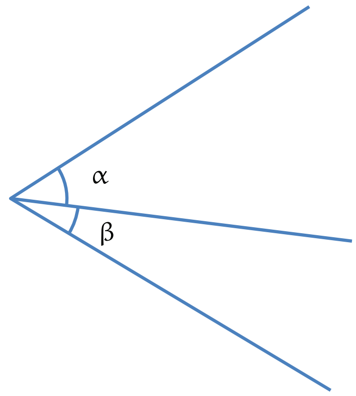
( ) Um triângulo retângulo é escaleno.

Assinale a seqüência correta.

(a) F - V - F - V - V
(b) F - V - V - V - F
(c) F - V - F - V - F
(d) F - F - V - V - F

R: Comentemos afirmativa por afirmativa.

- *Dois ângulos adjacentes são suplementares:* Não necessariamente. Temos de tomar muito cuidado com essas afirmações categóricas assim, porque elas são generalizantes. Temos de tomar cuidado com essas generalizações, podem esconder uma baita de uma pegadinha. Bom, se lembra do conceito de ângulo adjacente? E de ângulos suplementares? Pois bem, construa um e outro na sua cabeça. Agora pense: necessariamente ser adjacente implica em ser suplementar? Vamos dar uma olhada. Observe a figura a seguir:



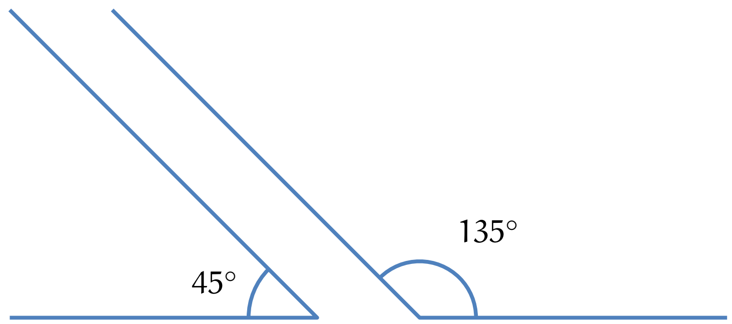
Veja que os ângulos α e β são adjacentes, de fato, mas *não são suplementares*. Como conseguimos encontrar um contra-exemplo que quebra a afirmação feita, ela é falsa. Não podemos generalizar da forma que ele fez.

- *Dois ângulos que têm o mesmo complemento são congruentes:* Vamos dar um nome para esses dois ângulos: α e β. É dito que eles têm o mesmo complement. O complemento de α é $90^\circ - \alpha$, enquanto o complemento de β é $90^\circ - \beta$. Vamos então dar a condição de igualdade e ver no que dá:

$$
\begin{aligned}
90^\circ - \alpha &= 90^\circ - \beta \\
\cancel{90^\circ} - \alpha &= \cancel{90^\circ} - \beta \\
-\alpha &= -\beta \\
-\alpha &= -\beta \\
\alpha &= \beta.
\end{aligned}
$$

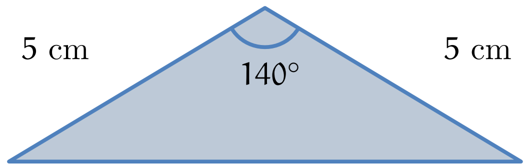
Concluímos disso que, de fato, caso os complementos de α e β sejam iguais, seus complementos também serão.

- *Dois ângulos suplementares são adjacentes:* Não necessariamente. Novamente aqui ele faz uma generalização. E novamente aqui eu peço que você, estudante, procure imaginar a comdicional que ele criou. Será que é verdade? Será que dois ângulos suplementares são sempre, necessariamente, adjacentes? Você consegue criar na sua cabeça a imagem de dois ângulos adjacentes que não o sejam? Se você conseguir, achou um contra-exemplo e pode concluir que a afirmativa é falsa. Mas caso não tenha conseguido, não se preocupe. Estou aqui para ajudar você. Vem comigo e observa a figura a seguir.

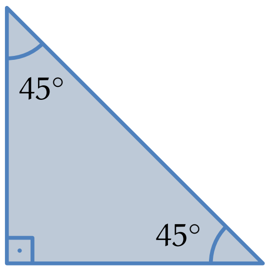


Esses ângulos são, de fato, suplementares, pois $45° + 135° = 180°$. Mas não são adjacentes, pois não compartilham uma mesma semirreta como lado.

- *Um triângulo obtusângulo pode ser isósceles:* Sim, verdadeiro! Observe a figura abaixo e constate por si mesmo um exemplo de triângulo obtusângulo isósceles.



- *Um triângulo retângulo é escaleno:* Não necessariamente. Observe abaixo um triângulo retângulo isósceles, por exemplo (todos os outros, porém, são necessariamente escalenos sim; esse é o único contra-exemplo).



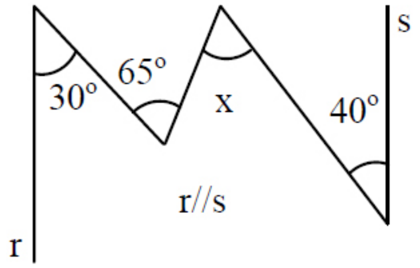
Trata-se de um triângulo retângulo que não é escaleno, falsificando portanto a afirmativa.

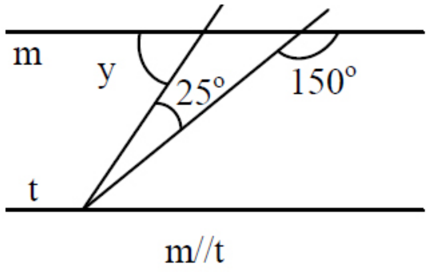
Baseando-nos nas conclusões que fizemos, temos **F V F V F**.

Gabarito: C

(EEAR-2003) QUESTÃO 11

Observando as figuras abaixo, o valor, em graus, de $x - y$ é



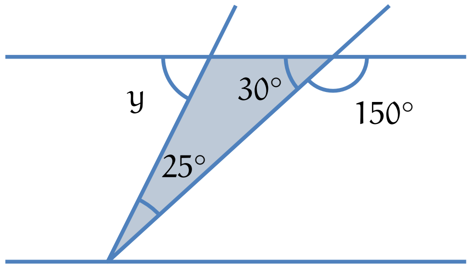


(a) 25
(b) 20
(c) 15
(d) 10

R: Na primeira figura, basta usarmos o Teorema do Bico, visto que as retas r e s são paralelas. Os ângulos "olhando para cima" são: $65°$ e $40°$; os ângulos "olhando para baixo" são $30°$ e x. Logo:

$$30° + x = 65° + 40°$$
$$x = 65° + 40° - 30°$$
$$x = 75°.$$

Na segunda figura, observe que temos um triângulo.

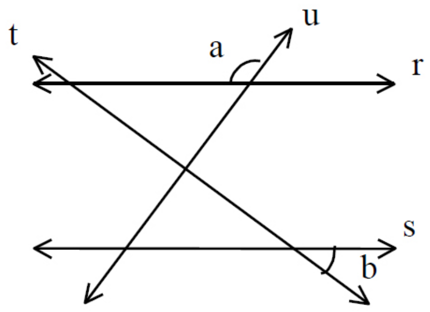


Já coloquei aquele angulo de $30°$ adjacente suplementar ao de $150°$, calculado a partir de $180° - 150° = 30°$. Agora, é útil reconhecermos que y é um *ângulo externo* ao triângulo azul. Lembre-se então que o ângulo externo é a *soma dos externos não-adjacentes*. Portanto, $y = 30° + 25° = 55°$. Como o problema pede o valor de $x - y$, temos finalmente o resultado $75° - 55° = 20°$.

Gabarito: B

(EEAR-2003) QUESTÃO 12

Na figura, $r \parallel s$ e $t \perp u$.

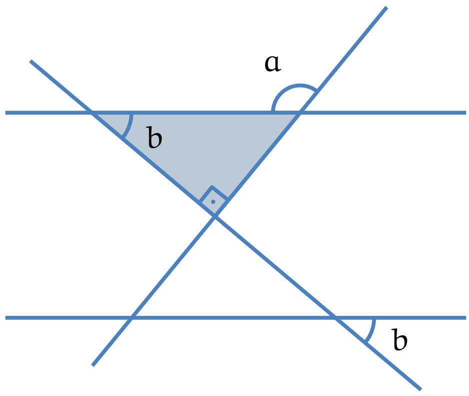


O valor de $a - b$ é

(a) $100°$
(b) $90°$
(c) $80°$
(d) $70°$

R: Essa é uma excelente questão para integrarmos nossas teorias angulares e triangulares. Mas antes, um recado para o estudante. Você talvez esteja perguntando e questionando-se quanto a: *mas cadê as questões da EFOMM?* Jovem, não fique se fazendo essa pergunta. O concurso da EFOMM apenas não cobra o assunto diretamente, mas ele é necessário. Daí utilizo questões com similaridade e que envolvam o conteúdo técnico para o seu aprendizado. Pare imediatamente com esses questionamentos e não os deixem perpetuar. Essa perpetuidade é nociva. Confie no trabalho que estamos fazendo. No final você só terá a se surpreender com a rapidez e consigo. Agora, à resolução.

Observe a figura com um dos triângulos destacados:



Veja que já trouxe o ângulo b para o seu *correspondente* interno ao triângulo. Novamente, vê como a é um ângulo externo ao triângulo? Lembra que um ângulo externo de um triângulo é sempre a soma dos internos não-adjacente àquele ângulo? Pois bem, isso vale para qualquer triângulo certo? Então lógico que também serve para o da figura, e portanto:

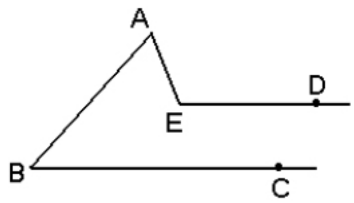
$$a = b + 90^\circ$$
$$a - b = 90^\circ.$$

Gabarito: B

Isso se chama *cartear*, coruja! E não, não basta apenas acertar, porque se seus estudos forem guiados dessa forma, pode ser que em algum momento você dê um tiro no pé. Faça sempre pela técnica. Sempre! A técnica é o caminho para o acerto direto. Cartear é a técnica para o acerto na sorte. E se formos depender de sorte, melhor começar carreira de apostador de loteria, correto? Aqui não tem carteado não, é técnica seguida de boa ordenação. Agora vá estudar!

(EEAR-2004) QUESTÃO 13

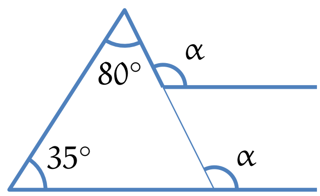
Na figura, $\overline{ED}//\overline{BC}$, med$(E\hat{A}B) = 80^\circ$ e med$(C\hat{B}A) = 35^\circ$.



Assim, a medida de $D\hat{E}A$ é

(a) $100°$.
(b) $110°$.
(c) $115°$.
(d) $120°$.

R: Essa é a primeira questão que fazemos que precisaremos prolongar um segmento de reta (especificamente o segmento AE). Vamos dar uma olhada:



Observe o prolongamento que fiz na figura. Percebe que com ele conseguimos fechar um triângulo? Isso é útil porque triângulos são figuras cheias de propriedades, como por exemplo o aparecimento de dois ângulos iguais (os ângulos α correspondentes, que aparecem naturalmente na figura). E olha só que interessante: o ângulo α é um ângulo externo ao triângulo! E como funcionam ângulos externos? Em um triângulo, como já cansamos de ver, um ângulo externo é a soma dos internos não-adjacentes. Então, $\alpha = 80° + 35° = 115°$, que é exatamente o que buscamos!

Gabarito: C

(AFA-1998) QUESTÃO 14

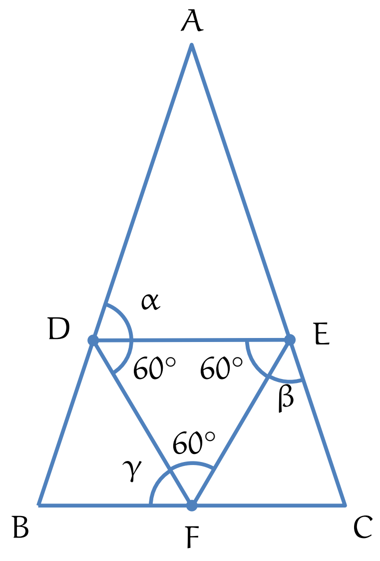
Seja o triângulo eqüilátero DEF, inscrito no triângulo isósceles ABC, com $AB = AC$ e DE paralelo a BC. Tomando-se $A\hat{D}E = \alpha$, $C\hat{E}F = \beta$ e $D\hat{F}B = \gamma$ pode-se afirmar que:

(a) $\alpha + \beta = 2\gamma$
(b) $\gamma + \beta = 2\alpha$

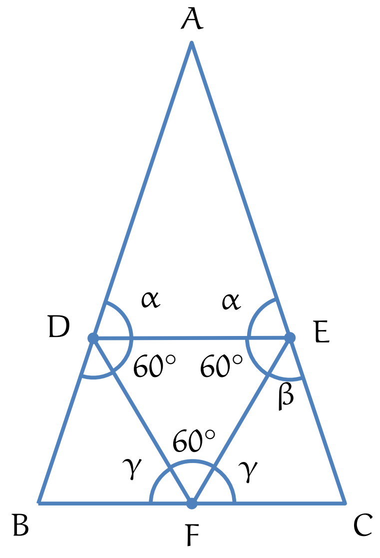
(c) $2\alpha + \gamma = 3\beta$

(d) $\beta + 2\gamma = 3\alpha$

R: Antes de qualquer raciocínio, desenhemos a figura:



Devido às simetrias e à presença de triângulos isósceles, podemos redesenhar a figura da seguinte forma:



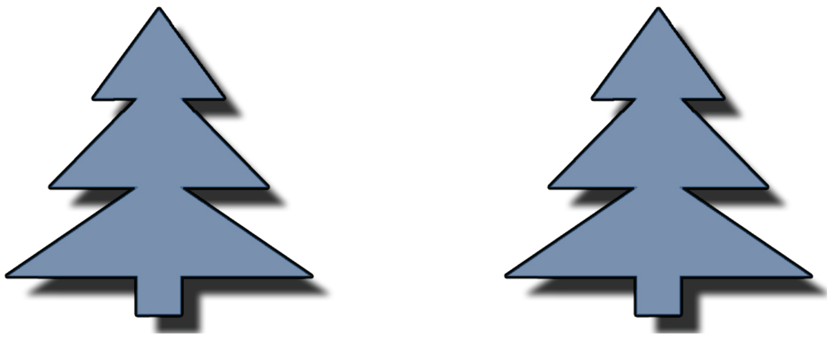
Daí retiramos duas informações: $\gamma + 60^\circ + \gamma = 180^\circ$ e portanto: $2\gamma = 120^\circ$, permitindo-nos concluir que $\gamma = 60^\circ$. Mas veja que $\alpha + \beta + 60^\circ = 180^\circ$, isto é, $\alpha + \beta = 120^\circ$. E daí, caro estudante, podemos escrever que $\alpha + \beta = 2 \cdot 60^\circ = 2\gamma$. Logo $\alpha + \beta = 2\gamma$.

Gabarito: A

3.4– Congruência de triângulos

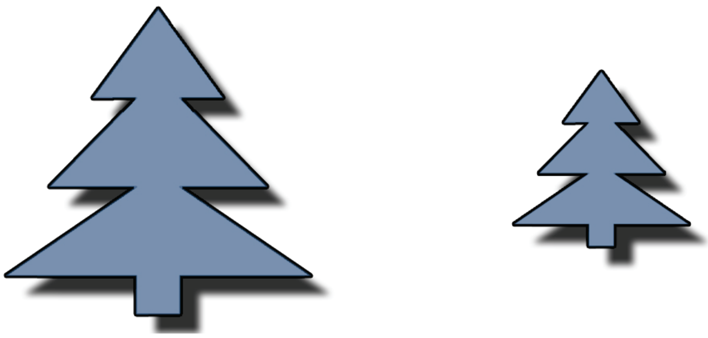
Não é o assunto mais importante do mundo. Não mesmo. Mas a importância da congruência de triângulos se dá para que possamos, posteriormente, aprender o que vem a ser uma *semelhança* de triângulos. Então um bom entendimento desse tópico trará benefícios depois (inclusive, ainda nesse livro eletrônico). Vamos lá!

Mas o que são, afinal, figuras congruentes? Bom, observe atentamente as duas formas desenhadas a seguir:



Imagine que eu recorte uma delas (recortar mesmo, imagine que estão desenhadas num papel e que são recortadas com uma tesoura) e cole em cima da outra que restou. Se as figuras se encaixam *perfeitamente*, dizemos que são *congruentes*. Acima, então, vemos um exemplo de formas congruentes.

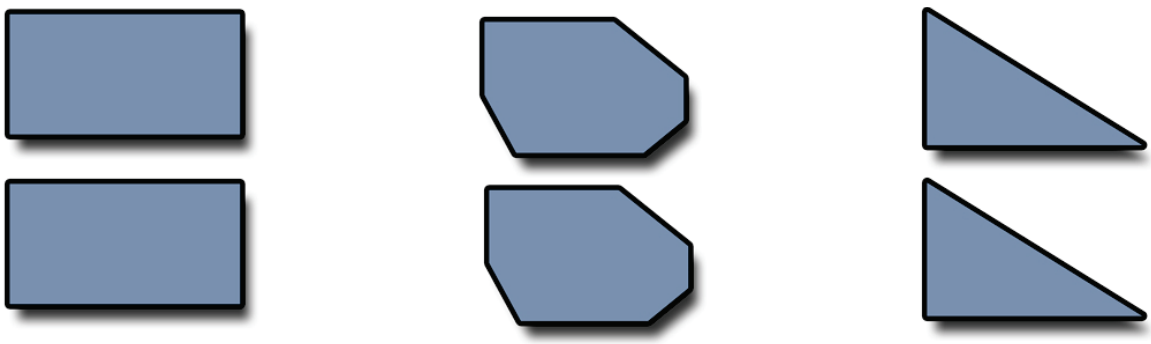
E quanto às formas abaixo? O que você acha? São congruentes?



Pense, antes de responder. Será que, após recortar uma das formas (qualquer uma), poderemos encaixar tal forma na restante perfeitamente, com perfeita harmonização?

É claro que não. As formas têm tamanhos diferentes, uma é maior que a outra. Acabará sobrando espaço ou faltando, dependendo do corte.

Seguem alguns exemplos de pares de figuras congruentes:

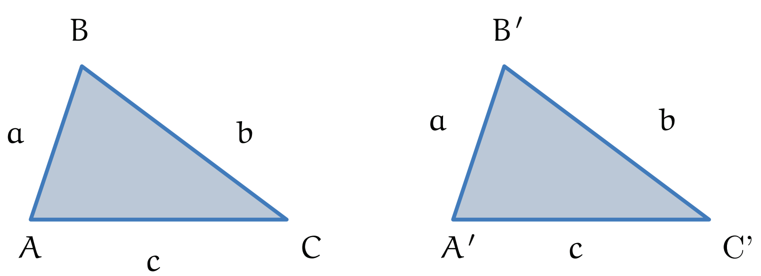


"Iguais" é uma palavra muito forte, mas sim, essencialmente são "iguais" (mas as aspas aqui se fazem super necessárias). O que acontece é que em matemática, quando dizemos que duas coisas são iguais, é porque não há a menor diferença entre elas. No caso das formas que vimos, ao dizer que são iguais, pecamos pela posição delas. A rigor, não são iguais porque, por exemplo, uma está acima da outra. Isso já seria suficiente para não serem iguais, iguais. Porém: quando não há riscos de confusão, podemos dizer "iguais" sem problemas. Eu mesmo em nossos materiais utilizarei deliberadamente esse termo, ao invés de congruente. Por simplicidade.

Aqui, o que discutiremos é quanto à congruência de triângulos. Na prática, é claro que você não vai sair recortando os triângulos para ver se encaixam perfeitamente. É impraticável e inviável. O que podemos fazer, porém, é adotar *casos de congruência*, situações que sempre que acontecem, concluímos os triângulos congruentes. Entendamos melhor.

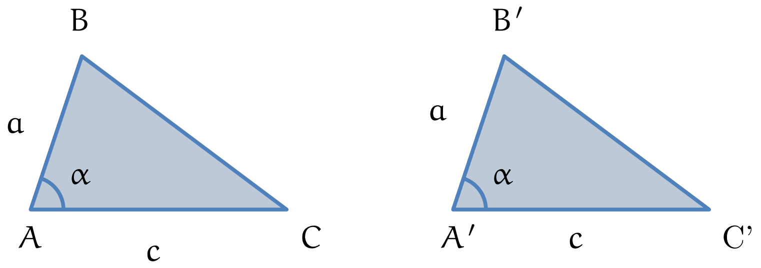
Existem quatro casos de congruência de triângulos. Vejamos e analisemos cada um deles:

- *LLL:* Quando dois triângulos possuem lados correspondentemente iguais, pode-se concluir que os triângulos são congruentes. Veja a representação abaixo:



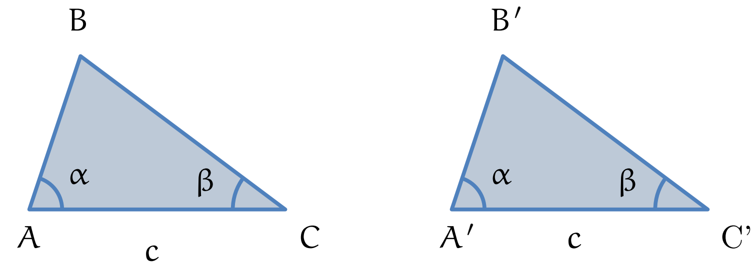
Como os lados são iguais, temos que $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (o símbolo "$\equiv$" refere-se à congruência entre as figuras).

- *LAL:* Quando dois triângulos possuem dois lados iguais, e, também, o ângulo formado por esses lados, esses triângulos serão considerados congruentes.



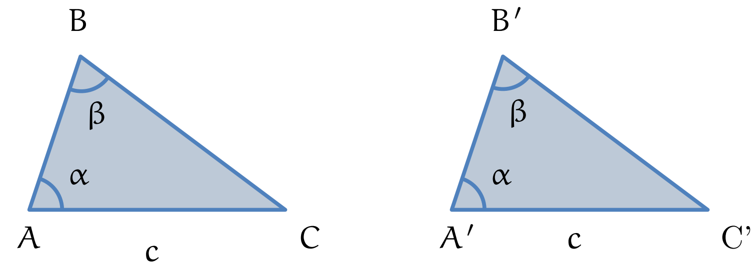
Como os lados a e c são iguais e, o ângulo formado entre eles (α) também, temos $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

- *ALA:* Quando dois triângulos posseum dois ângulos iguais e, também, o lado comum a esses ângulos, esses triângulso serão considerados congruentes.



Como os ângulos α e β são iguais e o lado comum c também, temos $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

- *LAA_o:* Quando dois triângulos tiverem um lado igual, um ângulo adjacente a esse lado igual e, também, o ângulo oposto àquele lado também igual, os triângulos serão considerados congruentes. Mei complicada essa, não? Dê uma boa olhada na figura enquanto lê e relê a definição.



Veja que temos um lado igual (c), um ângulo adjacente igual (α) e, finalmente, o ângulo oposto àquele lado também igual (β).

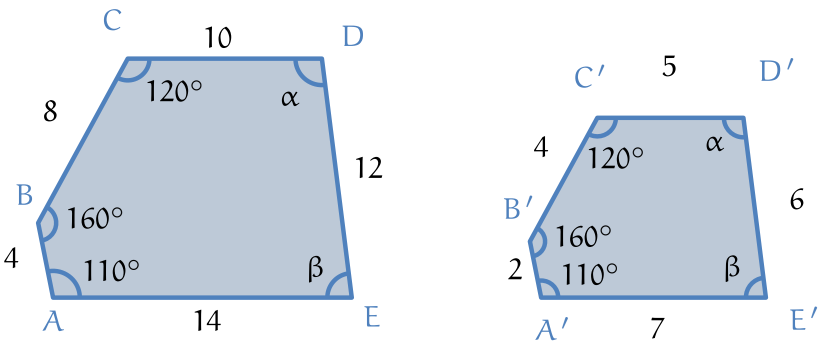
Meio complicado né? Mas são apenas regras para verificarmos se dois triângulos são ou não congruentes. A vantagem de dois triângulos serem congruentes é que se você descobrir que de fato são, todas as medidas de um podem ser transferidas para o outro, e vice-versa.

Então, vamos então ao conceito de semelhança de triângulos. Quero porém, antes de começar a próxima seção, criar um clímax na sua cabeça: preste bastante atenção na frase que iniciará a próxima seção. É um frase super impactante porém extremamente verdadeira. Em nosso material atual, já falei por diversas vezes sobre a importância de teoremas, como, por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo (mencionei ser o teorema angular mais importante da geometria plana). Mas semelhança de triângulos, tem uma importância que está em outro nível. Vamos lá.

3.5– Semelhança de triângulos

Esse é o assunto mais importante de TODA a geometria plana. Sim, jovem, o *mais importante*. Praticamente tudo o que veremos de agora em diante (e nisso eu incluo os próximos materiais) vem do conceito de semelhança de triângulos: potência de ponto em relação a círculos, TODAS as relações métricas em triângulos retângulos (inclusive o Teorema de Pitágoras), a trigonometria INTEIRA nasce do conceito de semelhança de triânguios, etc. Então, olhando sério pra você, com ênfase eu digo: dê bastante atenção para esse tópico. Parece simples, mas não é. Vamos juntos que tudo dá certo ao final. Mas temos de ir juntos. Não houve entendimento? Use nosso fórum em nossa plataforma online e fale diretamente conosco. Terei muito prazer em tirar todas as suas dúvidas.

Bom, ao assunto. Observe o par de figuras abaixo:



Percebe que seus ângulos são todos iguais? Mas percebe também que as figuras não são congruentes? Pois bem, mas há uma relação super útil nelas também.

Quero que você faça essas operações de divisão que vou te sugerir agora. Faça primeiro: $\frac{AB}{A'B'}$. Encontrou quanto? Achou 2? Muito bom. Agora, faça essas aqui: $\frac{BC}{B'C'}$, $\frac{CD}{C'D'}$, $\frac{DE}{D'E'}$, $\frac{AE}{A'E'}$. Pois bem. Encontrou resultado para todas elas? E mais importante, encontrou 2 para todas elas? Agora, por causa disso e porque seus ângulos são todos iguais, podemos dizer que essas duas figuras são semelhantes (escreve-se $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$, onde "$\sim$" é o símbolo que indica semelhança entre duas figuras).

De forma mais prática e resumida, aqui vão as duas condições para que duas figuras sejam consideradas semelhantes:

- os ângulos correspondentes devem ser iguais;
- os lados correspondentes devem ter razões iguais.

Na nossa figura anterior, por exemplo, além dos ângulos serem todos de fato iguais, constatamos que qualquer lado do maior dividido pelo seu correspondente[1] no menor resulta em 2. Logo, verificadas verdadeiras as duas condições, podemos afirmar sem medo que as figuras são semelhantes. Inclusive, aqui vai um nome novo para você. No exemplo anterior, ao dividir o lado do maior pelo seu correspondente, encontramos sempre 2, correto. Pois bem, esse 2 recebe o nome especial de *razão de semelhança*. Então razão de semelhança nada mais é que o valor constante que se encontra ao dividir o lado (ou outra medida qualquer) de uma das formas com a sua medida correspondente na outra forma.

E em triângulos? Como funciona a semelhança? Ora, triângulos seguem as mesmas regras que falei acima, **só que:** para triângulos, e exclusivamente para triângulos, *você não precisa checar as duas condições, APENAS UMA!* Sim, escolha uma delas, se funcionar, já pode concluir que os triângulos são semelhantes. Então se os lados dividirem na mesma razão, já pode dizer que são semelhantes sem precisar checar que os ângulos são iguais. E se os ângulos forem iguais, pode afirmar sem medo que os triângulos são semelhantes, sem precisar checar a razão de semelhança.

Sim, coruja. Incrivelmente é só fazer isso! Se em algum momento dois triângulos foram notados e você perceber que eles têm ângulos correspondentemente iguais, vai por mim: são semelhantes com certeza! E daí funciona tudo o que eu falei sobre a razão de semelhança. Os lados dividirão na mesma razão, simplesmente porque você percebeu que os ângulos são iguais. E digo mais: nem precisa fazer a verificação de três ângulos; se você conseguir perceber que dois ângulos já são iguais, *game over*! São semelhantes (porque o terceiro ângulo será inevitavelmente igual também).

Atenção para os nossos exercícios agora. Darei uma boa misturada aqui para mexer com ângulos mas também resolvermos as questões de semelhança. Lembrando que as questões da EFOMM não pedem que você resolva semelhança diretamente. Por isso não veremos questões EFOMM aqui. Mas

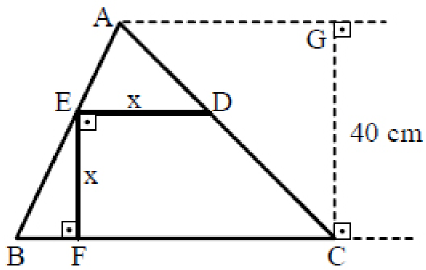
[1] Muitas vezes ao invés do termo *correspondentes*, utilizar-se-á o termo *homólogos*.

precisaremos de semelhança posteriormente. Lembre-se que não há muitas questões do concurso da EFOMM e estamos adotando a estratégia da regularidade. Aprenda a ferramenta sem questionamentos. Não busque esse tipo de atalhos. Confie na gente. Então, vamos lá!

QUESTÕES COMENTADAS

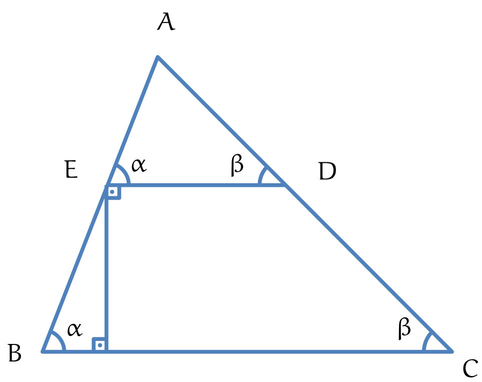
(EEAR-2018) QUESTÃO 15

Na figura, se $BC = 60\,cm$, a medida de $\overline{DE}$, em cm, é



(a) 20
(b) 24
(c) 30
(d) 32

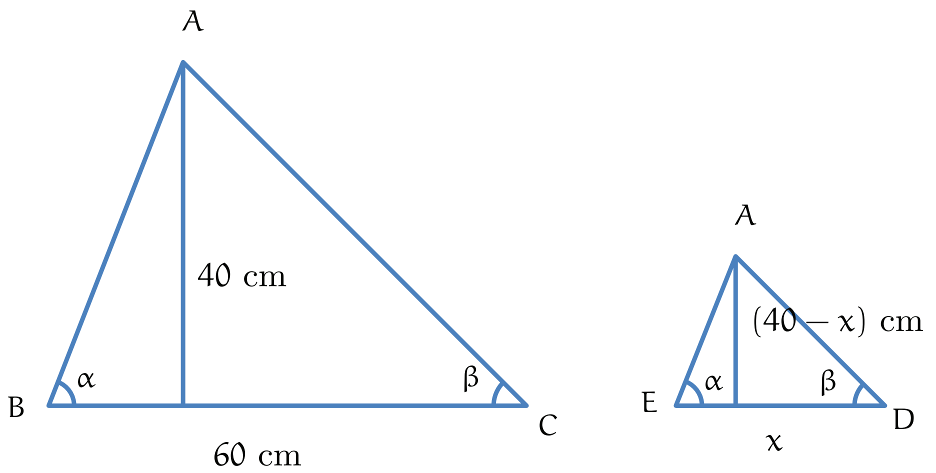
R:



Nossa primeira questão que envolve semelhança de triângulos. Observe os triângulos $\triangle AED$ e $\triangle ABC$. Será que são semelhantes? Como esse é o nosso primeiro exercício de semelhança, resumirei passo a passo como podemos concluir que de fato são. Redesenhei o triângulo do enunciado com alguns ângulos, na figura acima.

Consegue ver o porquê de o ângulo $\angle AED$ ser igual ao ângulo $\angle ABC$? Isso acontece porque as retas DE e BC são paralelas, e portanto tais ângulos são *correspondentes*. Daí só podem ser iguais. Caso não tenha entendido o porquê, retorne lá onde comentamos sobre retas paralelas cortadas por transversais e dê uma revisada.

Muito bem. Perceba que fizemos isso com os ângulos $\angle ADE$ e $\angle ACB$ também, pois também são correspondentes. Daí o porquê utilizei as mesmas letras para identificá-los (α e β). Bom, agora ficou muito fácil vermos que os triângulos citados no início são de fato semelhantes. Veja-os desenhados separadamente:



Uma explicação sobre o $(40 - x)$ cm que escrevi no triângulo menor: trata-se da subtração do 40 cm que o problema menciona na figura inicial e a medida de EF, que é x. Ao fazermos essa subtração, sobra apenas $40 - x$.

Vê então que esses triângulos são semelhantes? Simplesmente porque encontramos dois ângulos correspondentemente iguais! Daí podemos fazer:

$$\frac{40}{40-x} = \frac{60}{x} \quad \text{(condição de semelhança)}$$

$$40 \cdot x = 60 \cdot (40 - x) \quad \text{(multiplicação em cruz)}$$

$$\cancel{40}^{\,2} \cdot x = \cancel{60}^{\,3} \cdot (40 - x) \quad \text{(dividindo tudo por 20)}$$

$$2x = 3(40 - x)$$

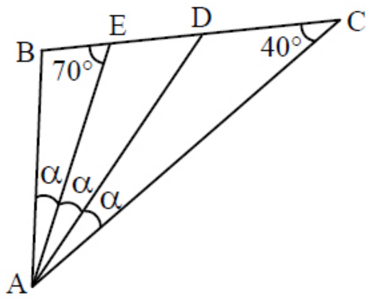
$$2x = 120 - 3x$$

$$
\begin{aligned}
2x + 3x &= 120 \\
5x &= 120 \\
x &= \frac{120}{5} \\
x &= 24\,\text{cm}.
\end{aligned}
$$

Gabarito: B

(EEAR-2017) QUESTÃO 16

Se ABC é um triângulo, o valor de α é



(a) 10°
(b) 15°
(c) 20°
(d) 25°

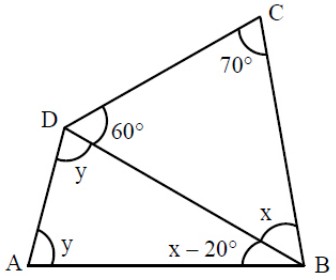
R: Veja que no triângulo ABC, temos $3\alpha + 40° + \hat{B} = 180°$, e portanto $\hat{B} = 140° - 3\alpha$ (verifique!). Então, no triângulo ABE podemos fazer $\alpha + 70° + \hat{B} = 180°$. Fazendo a substituição:

$$
\begin{aligned}
\alpha + 70° + \hat{B} &= 180° \\
\alpha + 70° + 140° - 3\alpha &= 180° \\
210° - 2\alpha &= 180° \\
-2\alpha &= 180° - 210° \\
-2\alpha &= -30° \\
-2\alpha &= -30°
\end{aligned}
$$

$$2\alpha = 30°$$
$$\alpha = 15°.$$

(EEAR-2017) QUESTÃO 17

No quadrilátero $ABCD$, o valor de $y - x$ é igual a



(a) $2x$
(b) $2y$
(c) $\frac{x}{2}$
(d) $\frac{y}{2}$

R: No triângulo BCD, a soma dos ângulos internos nos fornece:

$$60° + 70° + x = 180°$$
$$130° + x = 180°$$
$$x = 180° - 130°$$
$$x = 50°.$$

Assim, no triângulo ABD, a soma dos ângulos internos nos permite concluir:

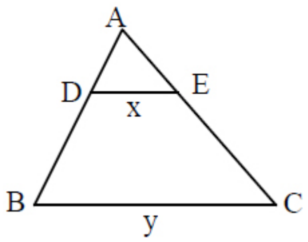
$$y + y + x - 20° = 180°$$
$$2y + 50° - 20° = 180°$$
$$2y + 30° = 180°$$
$$2y = 180° - 30°$$
$$2y = 150°$$
$$y = 75°.$$

E portanto $y - x = 75° - 50° = 25°$, que é a metade de $50°$, logo é igual à metade de x. Esse final aí que poderia nos assustar. Mas não assusta mais, ficaremos super acostumados com essas pegadinhas. Sigamos!

Gabarito: C

(EEAR-2017) QUESTÃO 18

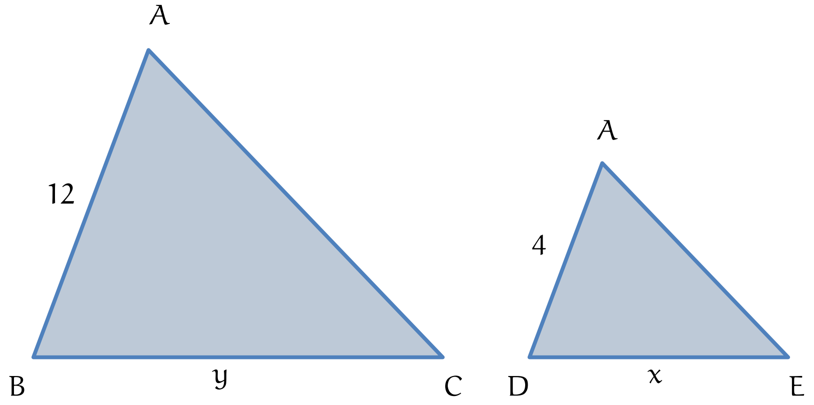
Seja um triângulo ABC, conforme a figura.



Se D e E são pontos, respectivamente, de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, de forma que $AD = 4$, $DB = 8$, $DE = x$, $BC = y$, e se $\overline{DE}//\overline{BC}$, então

(a) $y = x + 8$
(b) $y = x + 4$
(c) $y = 3x$
(d) $y = 2x$

R: Os triângulos ADE e ABC são semelhantes (verifique que dois ângulos são iguais). Separemos os dois triângulos para podermos analisar melhor:



Veja que $\overline{AB} = 12$ pois $AD = 4$ e $DB = 8$, e como $AB = AD + DB$, temos $AB = 4 + 8 = 12$.
Aplicando a condição de semelhança:

$$\frac{12}{4} = \frac{y}{x}$$
$$3 = \frac{y}{x}$$
$$y = 3x.$$

Gabarito: C

(EEAR-2016) QUESTÃO 19

Um triângulo ABC de base $BC = (x + 2)$ tem seus lados AB e AC medindo, respectivamente, $(3x - 4)$ e $(x + 8)$. Sendo este triângulo isósceles, a medida da base BC é

(a) 4
(b) 6
(c) 8
(d) 10

R: Como a base é BC, os lados congruentes ("iguais") são os lados AB e AC, que medem $3x - 4$ e $x + 8$. Logo:

$$3x - 4 = x + 8$$
$$3x - x = 8 + 4$$
$$2x = 12$$
$$x = 6.$$

Porém, estamos interessados em achar a base desse triângulo, que mede $x + 2$; portanto a base mede $6 + 2 = 8\,\text{cm}$.

Gabarito: C

(EEAR-2015) QUESTÃO 20

Seja ABC um triângulo isósceles de base $BC = (x+3)\,\text{cm}$, com $AB = (x+4)\,\text{cm}$ e $AC = (3x-10)\,\text{cm}$. A base de ABC mede ____ cm.

(a) 4
(b) 6
(c) 8
(d) 10

R: Começamos novamente vendo que como a base é BC, os lados congruentes ("iguais") são os lados AB e AC, que medem $x+4$ e $3x-10$. Logo:

$$\begin{aligned} 3x - 10 &= x + 4 \\ 3x - x &= 10 + 4 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7. \end{aligned}$$

Porém, estamos interessados em achar a base desse triângulo, que mede $x+3$; portanto a base mede $7+3=10\,\text{cm}$.

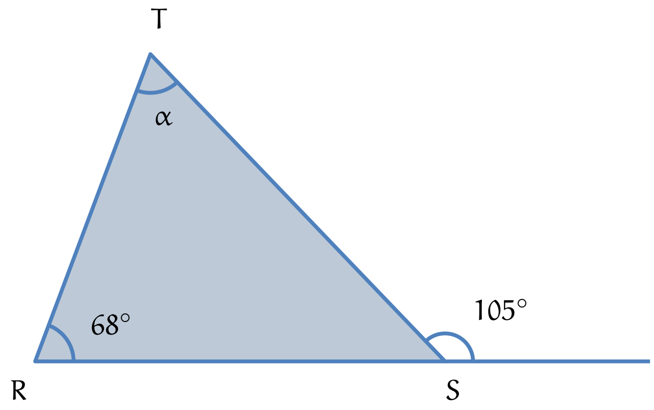
Gabarito: D

(EEAR-2012) QUESTÃO 21

Num triângulo RST a medida do ângulo interno R é 68° e do ângulo externo S é 105°. Então o ângulo interno T mede

(a) 52°.
(b) 45°.
(c) 37°.
(d) 30°.

R: Desenhemos a figura:

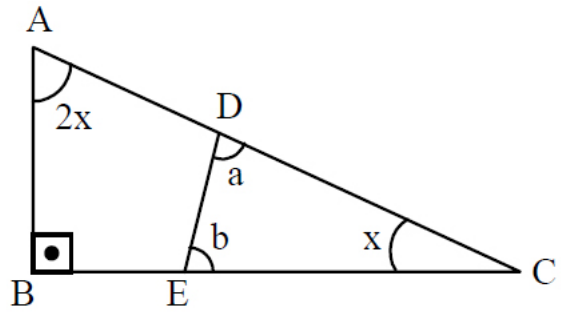


Já falamos diversas vezes: um ângulo externo de um triângulo é sempre igual à soma dos internos não-adjacentes. Então:

$$\alpha + 68^\circ = 105^\circ$$
$$\alpha = 105^\circ - 68^\circ$$
$$\alpha = 37^\circ.$$

(EEAR-2010) QUESTÃO 22

Se o triângulo CDE é semelhante ao triângulo ABC, o valor de $|a - b|$ é



(a) 30°.
(b) 45°.
(c) 60°.
(d) 90°.

R: Antes de qualquer coisa, veja que podemos calcular x. Veja que no triângulo ABC a soma dos ângulos internos nos dá:

$$2x + x + 90^\circ = 180^\circ$$
$$3x = 180^\circ - 90^\circ$$
$$3x = 90^\circ$$
$$x = 30^\circ.$$

Agora vamos a uma argumentação rápida. Ele nos diz que os triângulos CDE e ABC são semelhantes, certo? Então esses triângulos têm de ter ângulos correspondentes iguais. Pois bem. Um dos ângulos de ABC é reto. Então um dos ângulos de CDE também tem de ser reto. É claro que não é x, pois vale 30°. Sobram então a e b. Como DE não é paralelo a AB, b não pode ser o ângulo reto. Isso nos diz então que somente a pode ser tal ângulo, e portanto $a = 90^\circ$. Agora equacione a soma dos ângulos internos de CDE :

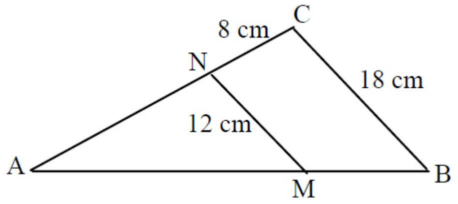
$$a + b + x = 180^\circ$$
$$90^\circ + b + 30^\circ = 180^\circ$$
$$120^\circ + b = 180^\circ$$
$$b = 180^\circ - 120^\circ$$
$$b = 60^\circ.$$

Daí $|a - b| = |90^\circ - 60^\circ| = |30^\circ| = 30^\circ$.

Gabarito: A

(EEAR-2009) QUESTÃO 23

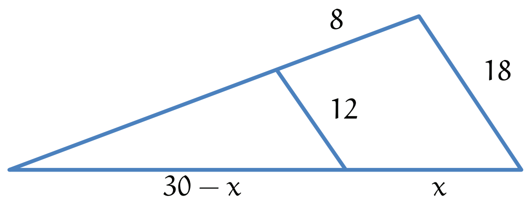
Na figura, $\overline{MN} // \overline{BC}$.



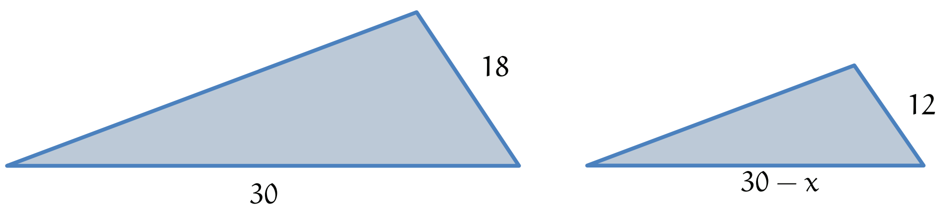
Se $AB = 30\,\text{cm}$, então $\overline{MB}$ mede, em cm,

(a) 5.
(b) 10.
(c) 15.
(d) 20.

R: Essa é novamente uma questão de semelhança de triângulos. Os triângulos ABC e AMN são triângulos semelhantes. Tente verificar isso, mostrando que há dois ângulos iguais entre eles. Bom, vamos então à resolução. Chamarei o segmento pedido de x. Observe as consequências disso:



Separando os triângulos semelhantes:



E daí, basta aplicar a condição de semelhança:

$$
\begin{aligned}
\frac{18}{12} &= \frac{30}{30-x} \\
\frac{\cancelto{3}{18}}{\cancelto{2}{12}} &= \frac{30}{30-x} \quad \text{(simplificando por 6)} \\
\frac{3}{2} &= \frac{30}{30-x} \\
\frac{\cancelto{1}{3}}{2} &= \frac{\cancelto{10}{30}}{30-x} \quad \text{(simplificando por 3)} \\
\frac{1}{2} &= \frac{10}{30-x} \\
30 - x &= 20 \quad \text{(multiplicando em cruz)} \\
-x &= 20 - 30 \\
x &= 10.
\end{aligned}
$$

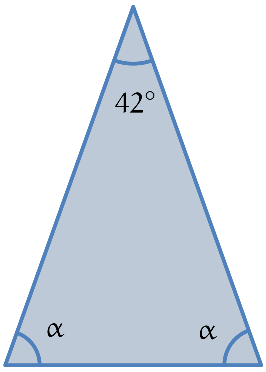
Gabarito: B

(EEAR-2008) QUESTÃO 24

Um triângulo ABC tem dois lados congruentes que formam entre si um ângulo de $42°$. Um dos outros dois ângulos internos desse triângulo mede

(a) $39°$.
(b) $48°$.
(c) $58°$.
(d) $69°$.

R: Como há dois lados congruentes, o triângulo é isósceles. Portanto, pode ser desenhado como segue:



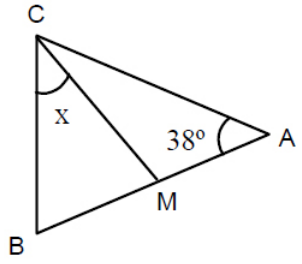
Daí, fazendo a soma dos ângulos internos (veja a quantidade de vezes que já fizemos isso):

$$\begin{aligned} 42° + \alpha + \alpha &= 180° \\ 2\alpha &= 180° - 42° \\ 2\alpha &= 138° \\ \alpha &= 69°. \end{aligned}$$

Gabarito: D

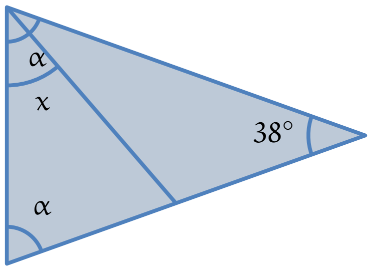
(EEAR-2008) QUESTÃO 25

Na figura, $AB = AC$ e $BC = CM$. O valor de x é



(a) $50°$.
(b) $45°$.
(c) $42°$.
(d) $38°$.

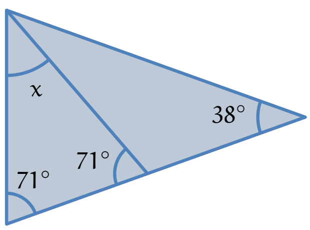
R: Visto que $AB = AC$, pode-se afirmar que o triângulo ABC é isósceles. Assim, temos:



Os dois ângulos α são de fato iguais devido ao fato do triângulo ABC ser isósceles. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, temos:

$$\alpha + \alpha + 38° = 180°$$
$$\alpha = 71°.$$

Mas veja que, segundo o enunciado, $BC = CM$, e portanto $\triangle BCM$ também é isósceles, e portanto nossa figura se torna:



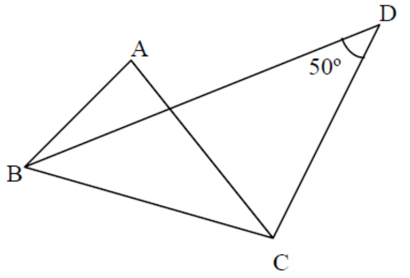
E daí, equacionando a soma dos ângulos internos em BCM:

$$x + 71^\circ + 71^\circ = 180^\circ$$
$$x = 180^\circ - 142^\circ$$
$$x = 38^\circ.$$

Gabarito: D

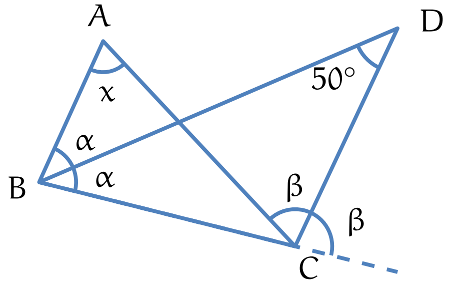
(EFOMM-2005) QUESTÃO 26

Determine a medida do ângulo interno A no triângulo ABC da figura abaixo, sabendo-se que, $\overline{BD}$ é a bissetriz do ângulo interno B, e $\overline{CD}$ a bissetriz do ângulo externo C.



(a) 60°
(b) 80°
(c) 100°
(d) 110°
(e) 120°

R:



Montei a figura já com os ângulos bonitinhos para você poder analisar junto comigo. Observe o triângulo ABC. Vê que 2β é um ângulo externo dele (em C)? E o que sabemos sobre ângulos externos? Sabemos que eles são a soma dos internos não-adjacentes, certo? Então podemos afirmar que $2\beta = 2\alpha + x$, ou seja, $x = 2\beta - 2\alpha$.

Ok, agora olhe para o triângulo BCD. Vê que β é um ângulo externo dele (em C)? Então podemos da mesma forma afirmar que $\beta = \alpha + 50°$, ou seja, $\beta - \alpha = 50°$.

Como $x = 2\beta - 2\alpha = 2 \cdot (\beta - \alpha) = 2 \cdot 50° = 100°$, temos finalmente que $x = 100°$.

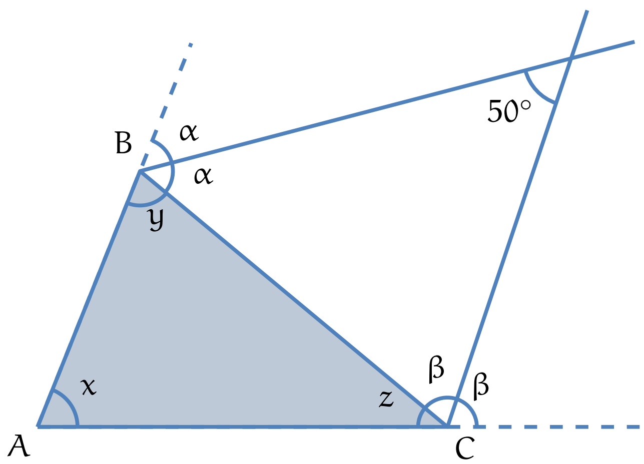
Gabarito: C

(EFOMM-2018) QUESTÃO 27

Num triângulo ABC, as bissetrizes dos ângulos externos do vértice B e C formam um ângulo de medida $50°$. Calcule o ângulo interno do vértice A.

(a) $110°$
(b) $90°$
(c) $80°$
(d) $50°$
(e) $20°$

R: Observe a figura devidamente desenhada abaixo:



Veja que no triângulo branco, podemos afirmar que $\alpha + \beta + 50° = 180°$, ou seja, $\alpha + \beta = 180° - 50° = 130°$.

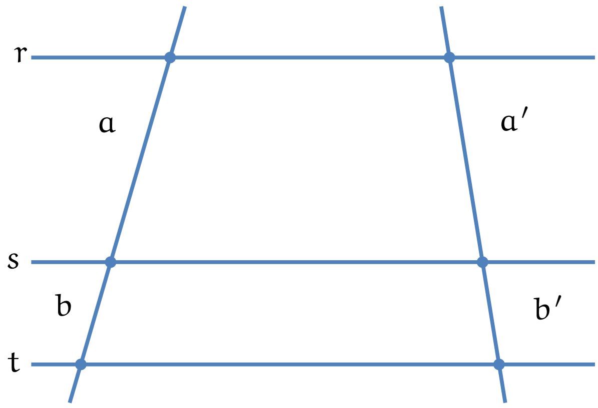
Certo. Agora, veja que, devido ao ângulo raso em $\hat{B}$, temos: $y + 2\alpha = 180°$, ou seja, $y = 180° - 2\alpha$. Analogamente, de $\hat{C}$, temos $z + 2\beta = 180°$, isto é, $z = 180° - 2\beta$. Visto que $x + y + z = 180°$ (soma dos ângulos internos do triângulo ABC), temos finalmente:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 180° \\ x + (180° - 2\alpha) + (180° - 2\beta) &= 180° \\ x + \cancel{180°} - 2\alpha + 180° - 2\beta &= \cancel{180°} \\ x - 2\alpha + 180° - 2\beta &= 0 \\ x &= 2\alpha + 2\beta - 180° \\ x &= 2(\alpha + \beta) - 180° \\ x &= 2 \cdot 130° - 180° \\ x &= 260° - 180° \\ x &= 80°. \end{aligned}$$

Gabarito: C

3.6– Teorema de Tales

Aqui apresentarei uma ferramenta extremamente útil da geometria plana comum. Não é bem um conceito intrínseco dos triângulos apenas, mas uma das grandes utilidades são pertinentes a eles, sim. Vamos então dar uma olhada nesse teorema.



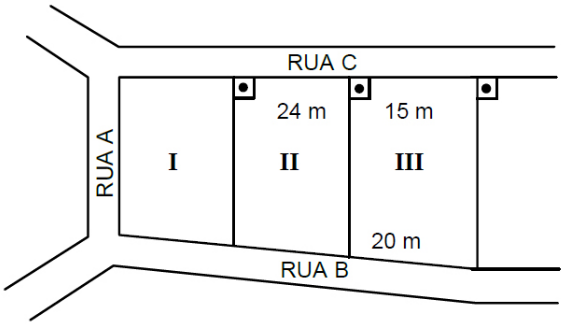
Na figura acima, vemos três retas paralelas (r, s e t) cortadas por duas transversais. Perceba, então, que quatro segmentos foram formados, de comprimentos a, a', b e b'. Vale então que:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Então, podemos dizer que essas transversais determinam sobre as paralelas *segmentos proporcionais*[2]. Vejamos um exemplo de aplicação.

(AFA-2002) QUESTÃO 28

No desenho abaixo, estão representados os terrenos I, II e III.

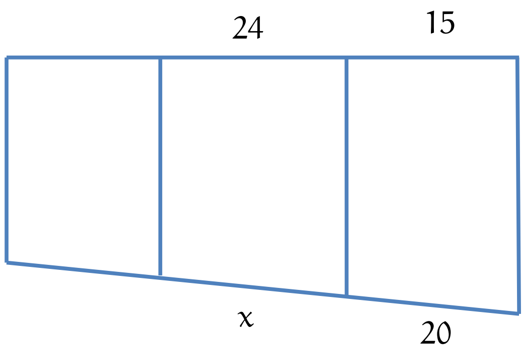


Quantos metros de comprimento deverá ter o muro que o proprietário do terreno II construirá para fechar o lado que faz frente com a rua B?

(a) 28
(b) 29
(c) 32
(d) 35

R: Observe como a figura está contextualizada com o tema de ruas, muros, terrenos, mas na verdade são apenas retas paralelas cortadas por transversais. Dessa forma, podemos redesenhar a figura de acordo com nossas necessidades:

[2] Esse fato será demonstrado posteriormente, quando falarmos de trigonometria.



Daí, pelo Teorema de Tales:

$$\frac{x}{20} = \frac{24}{15}$$
$$x = \frac{20 \cdot 24}{15}$$
$$x = 32.$$

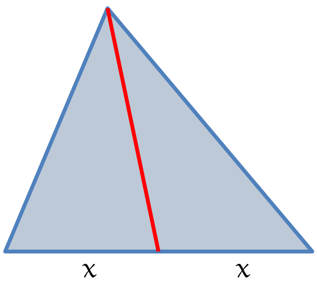
Gabarito: C

4.0– Cevianas e pontos notáveis

4.1– Cevianas

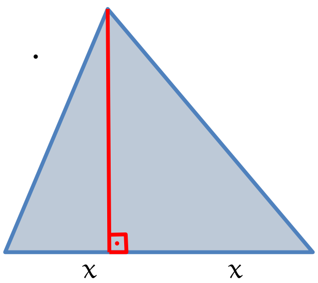
Em um triângulo, chamamos de cevianas quaisquer retas que passem pelo vértice de um triângulo e que não seja paralela a nenhum de seus lados. existem essencialmente três cevianas que devemos dar uma maior atenção:

- *Mediana*: É a ceviana que corta o lado oposto ao vértice ao meio. Veja um exemplo de mediana.



Veja que ela de fato corta o lado oposto em metades.

- *Altura*: É a ceviana que corta o lado oposto ao vértice perpendicularmente. Veja um exemplo de altura.

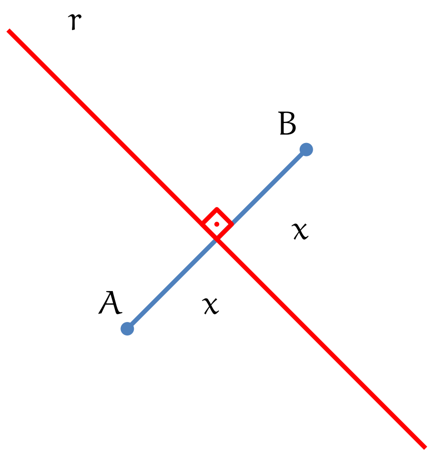


Veja que ela de fato é perpendicular ao lado oposto.

- *Bissetriz*: Já analisada, ela divide o ângulo em metades. Parte sempre de um vértice, como já visto no começo de nosso material.

Mediatriz

É uma construção à parte. Trata-se de uma reta que divide um segmento qualquer perpendicularmente ao meio. Veja então o segmento a seguir:

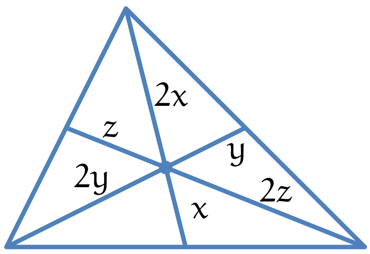


A reta r representada na figura é uma mediatriz, pois além de dividir o segmento ao meio, também lhe é perpendicular. Essas construções são importantes principalmente para lidarmos com os termos e a linguagem que algumas questões podem vir a ter.

4.2– Pontos notáveis do triângulo

As cevianas que acabamos de citar (mediana, altura e bissetriz) têm uma característica especial. Quando desenhadas por completo em um triângulo, elas sempre se encontram num ponto único. Vejamos cada um desses pontos:

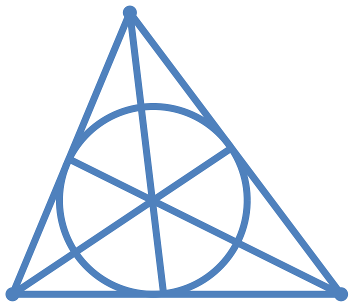
- *Baricentro:* É o encontro das medianas do triângulo. Sua característica principal é a de dividir a mediana em dois pedaços, o maior sendo o sobro do menor. Veja:



O ponto de encontro é o baricentro.

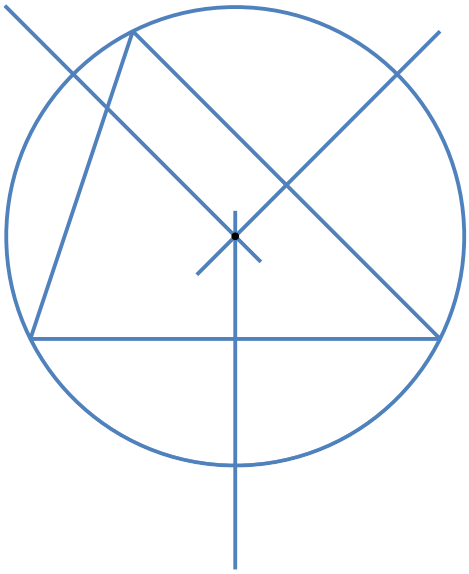
- *Ortocentro:* É o encontro das alturas do triângulo. O mais importante a sabermos aqui é que o ortocentro nem sempre se encontra no interior do triângulo. Se o triângulo for acutângulo estará em seu interior. Se for retângulo estará sobre o vértice reto. E se for obtusângulo, estará fora do triângulo. Não precisa se preocupar com cálculos nem nada do tipo com o ortocentro não. Apenas essa leve teoria, fique tranquilo.

- *Incentro:* É o encontro das bissetrizes do triângulo. Sua grande característica é ser centro do círculo inscrito no triângulo. Veja:



Inscrição de círculos em polígonos será estudado posteriormente. Mas sempre que um círculo for inscrito em um triângulo, seu centro será o encontro das bissetrizes.

- *Circuncentro:* É o encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo. A característica marcante desse ponto é que ele é o centro do círculo circunscrito ao triângulo. Veja:



Os pontos notáveis devem ser, por enquanto, apenas compreendidos em suas definições. É importante que entendamos quais cevianas que os geram e suas propriedades. Finalizaremos agora com alguns exercícios variados e até a próxima aula. Juízo nessa cabeça, nada de ficar achando tudo difícil, impossível. Tire sempre as suas dúvidas, não se esqueça. Um grande abraço!

QUESTÕES
COMENTADAS

(EEAR-2008) QUESTÃO 29

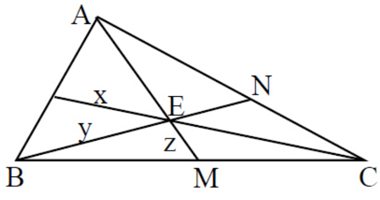
Dado um triângulo qualquer, é FALSO afirmar que

(a) uma de suas alturas pode coincidir com um de seus lados.
(b) suas alturas podem interceptar-se num ponto externo a ele.
(c) o incentro é o centro da circunferência nele inscrita.
(d) o circuncentro é o encontro das suas medianas.

R: Analisemos afirmativa por afirmativa:

- *uma de suas alturas pode coincidir com um de seus lados:* Sim, de fato, quando um triângulo é retângulo, seus catetos exercem papel de altura (porque são perpendiculares entre si).
- *suas alturas podem interceptar-se num ponto externo a ele:* Sim, podem, quando o triângulo é obtusângulo.
- *o incentro é o centro da circunferência nele inscrita:* Sim, é a principal propriedade do incentro, trata-se do centro da circunferência inscrita no triângulo.
- *o circuncentro é o encontro das suas medianas:* Falso! O circuncentro é o encontro das mediatrizes! Encontro das medianas é o baricentro, certo?

(EEAR-2007) QUESTÃO 30



Sendo E o baricentro do triângulo ABC, $AE = 10$cm, $EN = 6$cm, e $CE = 14$cm, o valor, em cm, de $x + y + z$ é

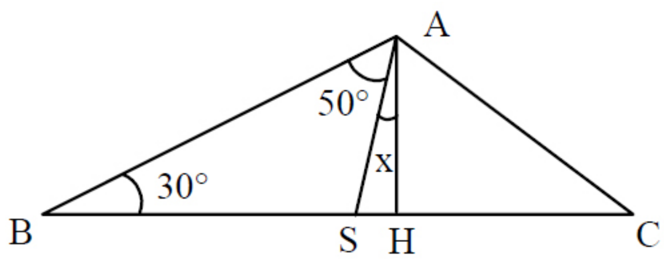
(a) 18.
(b) 20.
(c) 22.
(d) 24.

R: Como $AE = 10\,\text{cm}$, $ME = z = 5\,\text{cm}$, pois é a metade (propriedade do baricentro). O mesmo vale para $EN = 6\,\text{cm}$, fazendo com que $BE = y = 12\,\text{cm}$; e $CE = 14\,\text{cm}$ fazendo com que $x = 7\,\text{cm}$. Daí $x + y + z = 7 + 12 + 5 = 24\,\text{cm}$.

Gabarito: D

(EEAR-2010) QUESTÃO 31

Na figura, $\overline{AH}$ é altura do triângulo ABC.



Assim, o valor de x é

(a) $20°$.
(b) $15°$.
(c) $10°$.
(d) $5°$.

R: Olhando para o triângulo AHB, basta somarmos os seus ângulos internos, visto que AH é a ceviana altura:

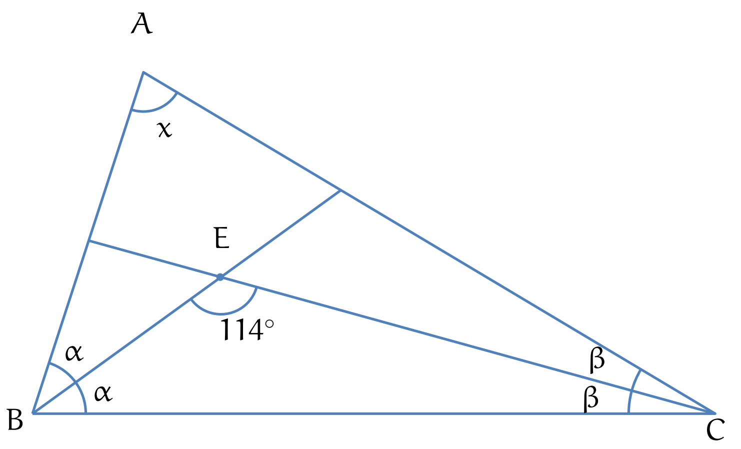
$$\begin{aligned} 30° + 50° + x + 90° &= 180° \\ 170° + x &= 180° \\ x &= 10°. \end{aligned}$$

(EEAR-2006) QUESTÃO 32

Num triângulo ABC, o ângulo $B\hat{E}C$ mede $114°$. Se E é o incentro de ABC, então o ângulo $\hat{A}$ mede

(a) $44°$.
(b) $48°$.
(c) $56°$.
(d) $58°$.

R: Precisamos de uma boa figura para essa questão:



Veja que no triângulo BEC, temos $\alpha + \beta + 114° = 180°$, ou seja, $\alpha + \beta = 66°$. E no triângulo ABC? Também podemos fazer o mesmo, certo? A soma dos ângulos internos seria:

$$2\alpha + 2\beta + x = 180°$$
$$2(\alpha + \beta) + x = 180°.$$

Como $\alpha + \beta = 66°$, podemos substituir na expressão encontrada, obtendo:

$$2 \cdot 66° + x = 180°$$
$$132° + x = 180°$$
$$x = 48°.$$

A seguir faremos uma série de questões sobre toda a nossa aula 00. Assim conseguiremos assentar todo o conteúdo com embasamento e o aprofundamento necessário. Vamos lá!

QUESTÕES COMENTADAS

(EEAR-2006) QUESTÃO 33

Num triângulo ABC, $AB = BC = 5\sqrt{2}$cm. Se R é o ponto médio de $\overline{AC}$, e S é o ponto médio de $\overline{AB}$, então a medida de $\overline{RS}$, em cm, é igual a

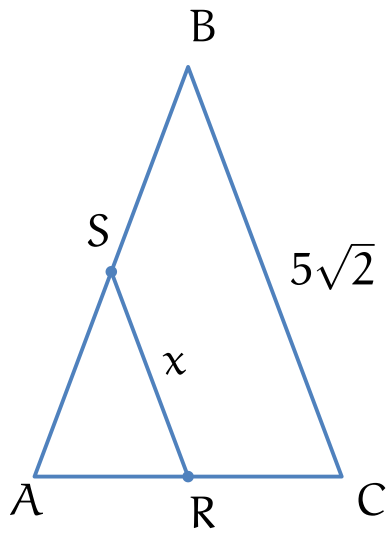
(a) $\frac{5}{2}$

(b) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

(c) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

(d) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

R: Observe a figura formada:



Aqui te apresento o utilíssimo conceito de base média. Um conceito muito melhor aprendido no decorrer da resolução de um exercício. Vê que o segmento RS foi construído a partir dos pontos médios (pontos do meio) de dois lados? Essa é a definição de base média. Uma conclusão que pode se tirar disso é que a base média sempre mede a metade do lado oposto. Então, $RS = x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Então sempre que, em um triângulo, dois pontos médios forem tomados, o segmento formado por esses pontos médios será uma base média e medirá a exata metade do lado oposto. Beleza? Vamos pra próxima!

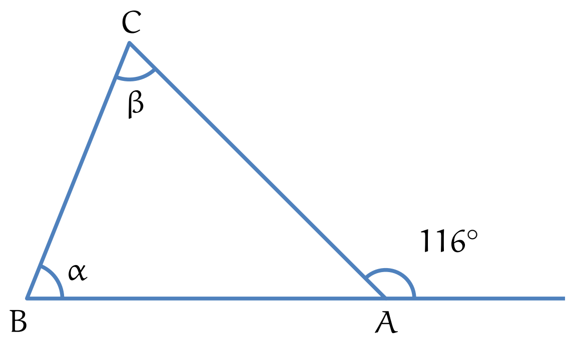
Gabarito: B

(EEAR-2006) QUESTÃO 34

Em um triângulo ABC, o ângulo externo de vértice A mede $116°$. Se a diferença entre as medidas dos ângulos internos B e C é $30°$, então o maior ângulo interno do triângulo mede

(a) $75°$.
(b) $73°$.
(c) $70°$.
(d) $68°$.

R: Observe o triângulo que a questão sugere:



Um dos ângulos internos é o suplemento de $116°$, que é $64°$. Como sempre, sabemos que $116° = \alpha + \beta$. Mas a questão também nos informa que $\alpha - \beta = 30°$, supondo α o maior ângulo. Então:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 116° \\ \alpha - \beta = 30° \end{cases}.$$

Somando as duas equações, temos $2\alpha = 146°$ e portanto $\alpha = 73°$. Como $\alpha + \beta = 116°$, temos $\beta = 116° - 73° = 43°$. O maior ângulo é, portanto, $73°$.

Gabarito: B

(EEAR-2007) QUESTÃO 35

Dois triângulos são semelhantes, e uma altura do primeiro é igual aos $\frac{2}{5}$ de sua homóloga no segundo. Se o perímetro do primeiro triângulo é $140\,\text{cm}$, então o perímetro do segundo, em cm, é

(a) 250.
(b) 280.
(c) 300.
(d) 350.

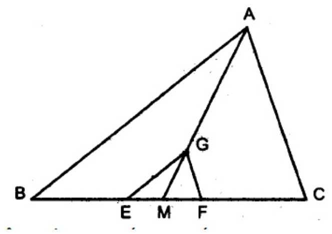
R: Se os triângulos são semelhantes, e a altura do primeiro é $\frac{2}{5}$ da altura do segundo, então o perímetro do primeiro também deverá ser $\frac{2}{5}$ do perímetro do segundo. Não sabemos o perímetro x do segundo, logo:

$$140 = \frac{2}{5}x$$
$$700 = 2x$$
$$x = 350\,\text{cm}.$$

Gabarito: C

(AFA-2005) QUESTÃO 36

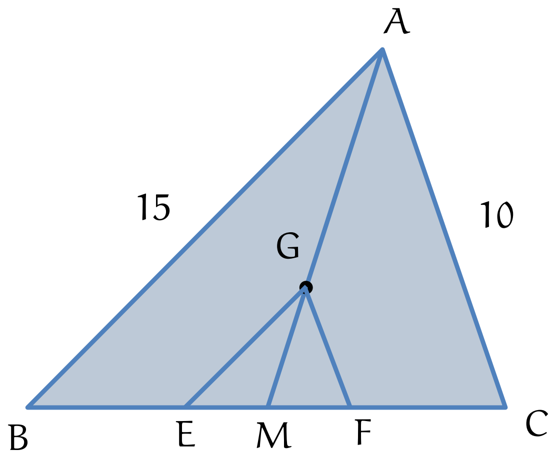
Considere o triângulo ABC, de lados $\overline{AB} = 15$, $\overline{AC} = 10$, $\overline{BC} = 12$ e seu baricentro G. Traçam-se GE e GF paralelos a AB e AC, respectivamente, conforme a figura abaixo.



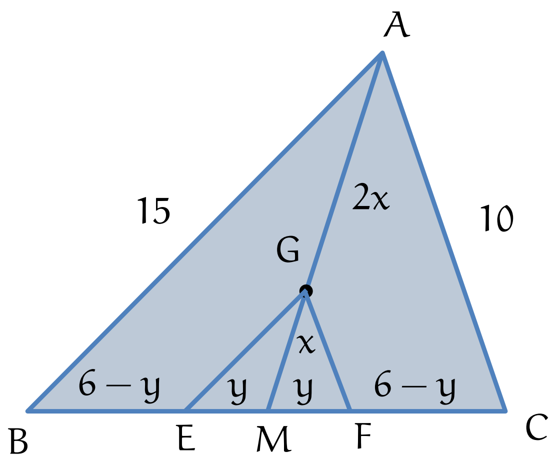
O perímetro do triângulo GEF é um número que, escrito na forma de fração irredutível, tem a soma do numerador com o denominador igual a:

(a) 43
(b) 40
(c) 38
(d) 35

R: Demos uma boa olhada na figura:



Daqui em diante começarei a fazer algumas conclusões sobre a figura. Não leia tudo de uma vez. Vá tentando justificar afirmativa por afirmativa que eu faço, caso contrário você pode acabar se perdendo. Vamos lá. Chamarei a medida do segmento GM de x. Isso fará com que a medida de AG torne-se $2x$, usando uma das propriedades do baricentro.
Ainda, visto que M é ponto médio de BC, que mede 12, temos $BM = MC = 6$. Veja também que o triângulo GEF é semelhante ao triângulo ABC. Por isso, podemos dizer que GM é mediana de GEF e portanto $EM = MF$. Chamarei a medida EM de y. Como BM mede 6, temos que $BE = 6 - y$.



Estamos interessados em calcular o perímetro[1] do triângulo GEF. Vamos começar calculando a medida do lado EF. Podemos usar o Teorema de Tales no triângulo AMC:

[1]Soma dos lados do triângulo

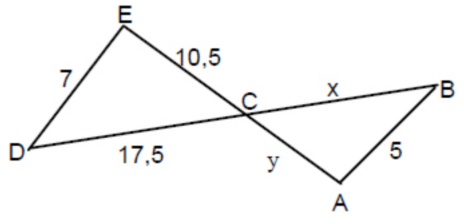
$$\frac{x}{2x} = \frac{y}{6-y}$$
$$\frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{y}{6-y}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{y}{6-y}$$
$$2y = 6 - y$$
$$3y = 6$$
$$y = 2.$$

Portanto, visto que $EF = 2y$, temos que EF mede $2 \cdot 2 = 4$. Podemos então achar a razão de semelhança do triângulo maior para com o menor. Podemos fazer isso da seguinte forma. Sabemos que o lado BC do triângulo ABC mede 12. Sabemos também que seu correspondente no triângulo GEF mede 4 (que seria EF). Então a razão de semelhança do maior para o menor é $\frac{12}{4} = 3$. Visto que o perímetro do triângulo ABC é $15 + 10 + 12 = 37$, temos que o perímetro de GEF é $\frac{37}{3}$. Essa fração já está em sua forma irredutível (pois 37 e 3 são primos entre si[2]). Logo, a soma do numerador e o denominador é $37 + 3 = 40$.

Gabarito: B

(EEAR-2005) QUESTÃO 37

Na figura, $\overline{DE} // \overline{AB}$. O valor de $x + y$ é



(a) $12,5$.
(b) $17,5$.
(c) 20.
(d) 22.

[2] MDC igual a 1

R: Terminamos com uma questão simples de semelhança de triângulos. Perceba que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são iguais (alternos internos), e o ângulo $\hat{C}$ é comum aos dois triângulos, logo, são semelhantes. Temos então:

$$\begin{aligned}
\frac{10,5+17,5}{7} &= \frac{x+y}{5} \\
\frac{28}{7} &= \frac{x+y}{5} \\
4 &= \frac{x+y}{5} \\
x+y &= 20.
\end{aligned}$$

4.2– Índice Remissivo

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.