etrônico

Estratégia
CONCURSOS

Aul

Matemática II p/ EspCEx (Escola Preparatória de Cadetes do Exército) Com Videoaulas - Pós-Edital

Professor: Ismael de Paula dos Santos, Italo Marinho Sá Barreto

AULA 00 – M.M.C, M.D.C, Números Primos, Razão e Proporção.

Sumário

1 – Introdução..2
2- Máximo Divisor Comum (M.D.C) 8
1 - Conceito..8
2 - Processos para determinação do MDC 8
3- Mínimo Múltiplo Comum – M.M.C 22
1 - Conceito..22
2 - Métodos para obtenção do MMC.....................................23
4 - Estudo dos Números Primos 30
1- Conceito...30
2 - Crivo de Eratóstenes...30
3 - Regra para reconhecimento de um número primo......................32
4 - Números primos entre si 34
5- Quantidade de Divisores Naturais de um Número 35
5 – Razão e Proporção..37
1 –Razão 37
2 - Proporção 38
3 - Propriedades Fundamentais da Proporção............................39
4 - Casos Especiais de Razão 54
6 - Divisão Proporcional 56
1 - Grandezas Diretamente Proporcionais...............................56
2 - Grandezas Inversamente Proporcionais 58
3 - Divisão proporcional 61
5 – Torneiras e Misturas...69
1 - PROBLEMAS TIPO TORNEIRA 69
2- Misturas 70
8 - Lista de Questões 83
9- Gabarito..92

1 – INTRODUÇÃO

Olá, querido aluno!

Meu nome é **Ismael Santos**, professor de **Matemática do Estratégia Concursos**. Estarei com você nesta caminhada rumo à **Escola Preparatória de Cadetes do Exército - EsPCEx.** Tenho certeza que faremos uma excelente parceria, que tem como objetivo: a sua tão sonhada **APROVAÇÃO.**

Deixe que me apresente: sou servidor público federal há 12 anos, natural do Rio de Janeiro – RJ, Graduado em Gestão Financeira, Graduando em Matemática pela UFF-RJ, Pós-graduado em Orçamento Público.

Iniciei meus estudos para concursos muito cedo, aos 14 anos. Naquela época, meu objetivo principal era o certame do Colégio Naval. Essa batalha teve início em 2002. Não foi nada fácil! Tive muita dificuldade nesta preparação, em especial devido à falta de base sólida de conhecimento teórico. O resultado já era esperado: REPROVADO em meu primeiro concurso.

Em 2003, consegui focar mais nos estudos. Ver a matéria pela segunda vez foi, certamente, um facilitador. Neste ano, minha evolução foi muito grande. Estava confiante! Pois bem! Chegou a prova! Mais uma reprovação! Este resultado não foi o esperado. Foi duro suportar. No entanto, não podia perder tempo, tinha que voltar a estudar o mais rápido possível, já para o próximo ano.

Chegamos em 2004! Neste ano, além de me preocupar com a parte teórica, resolvi preparar também minha cabeça (psicológico), para que no dia da prova, não fosse surpreendido. Eis que chegou a APROVAÇÃO. Neste certame, obtive a 4ª maior nota do Brasil na primeira fase. Dia inesquecível! Neste mesmo ano, obtive a aprovação também na **EPCAr (Escola Preparatória de Cadetes do Ar).**

Já em 2005, tive a oportunidade de prestar outros concursos, os quais obtive aprovação: **EEAr, UFRJ, UERJ, EsSA, CMRJ e UFFRJ.**

Em 2008, fui morar no Paraná. Cidade na qual servi por 5 anos. Ao fim deste período, fui transferido para o Rio de Janeiro.

Entre os anos de 2014 a 2016, obtive outras aprovações, desta vez, para cargos públicos civis, tais como: **Agente da Polícia Civil –RJ, Papiloscopista da Polícia Civil –RJ, Técnico da Assembleia Legislativa – RJ e Fiscal de Posturas de Niterói.**

No triênio 2015 – 2017, fui instrutor da ESA (Escola de Sargento das Armas). Neste período, inclusive, tive a oportunidade de passar duas semanas em competição desportiva na EsPCEx, sua futura escola, por sinal, de altíssima qualidade.

Ufa! Quanta coisa, não? Pois é! Tudo serviu de experiência! Conhecimento não ocupa espaço! Nunca pare de estudar!

Perceba que minha experiência com concursos militares já vem desde 2002. São mais de 15 anos respirando esta área. Não à toa, é a que mais me identifico para lecionar. Por este motivo aceitei o convite do Estratégia Concursos para assumir a Matemática das Carreiras Militares. Tenha certeza que verás esta fascinante matéria com uma linguagem bem acessível. Digo ainda que a abordagem será totalmente focada no edital seu último concurso - 2018.

E aí, futuro aluno da **"PREP",** animado para saber um pouco mais sobre o nosso curso de Matemática? Vamos nessa?

A matemática do seu edital foi dividida, didaticamente, da seguinte forma: **MAT I, MAT II, e MAT III.**

Em modos gerais, podemos dizer que a **Mat I é a nossa querida Álgebra. Já a Mat II, seria a parte relacionada à Aritmética. Por fim, Mat III, é a que tem uma queda para a Geometria.** Esta divisão irá facilitar seus estudos, no sentido de crescer de forma equitativa (equilibrada) em cada uma das frentes, não deixando nenhuma delas por último.

Dentro desta divisão, o seu edital foi particionado de forma que os tópicos dentro de cada uma das três frentes sejam dependentes entre si. Ou seja, deve ser estudada na forma cronológica proposta. A organização é 70% do seu concurso. Não dê mole! OK?

Eu, Ismael Santos, estarei responsável por toda Mat I e por parte da Mat II. É isso mesmo! Pego metade de toda sua Matemática. A outra parte ficará a cargo do Professor Ítalo Marinho, meu amigo pessoal e de trabalho, com uma didática e um conhecimento absurdo. Certamente irão gostar!

Que tal darmos uma olhadinha no conteúdo Programático do último edital do seu concurso? Simbora?

MATEMÁTICA – EDITAL EsPCEx

a. Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos: representação de conjuntos, subconjuntos, operações: união, interseção, diferença e complementar. Conjunto universo e conjunto vazio; conjunto dos números naturais e inteiros: operações fundamentais, Números primos, fatoração, número de divisores, máximo divisor comum e mínimo múltiplo; conjunto dos números racionais: operações fundamentais. Razão, proporção e suas propriedades. Números direta e indiretamente proporcionais; conjunto dos números reais: operações fundamentais, módulo, representação decimal, operações com intervalos reais; e números complexos: operações, módulo, conjugado de um número complexo, representações algébrica e trigonométrica. Representação no plano de Argand-Gauss, Potencialização e radiciação. Extração de raízes. Fórmulas de Moivre. Resolução de equações binomiais e trinomiais.

b. Funções: definição, domínio, imagem, contradomínio, funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, funções pares e ímpares, funções periódicas; funções compostas; relações; raiz de uma função; função constante, função crescente, função decrescente; função definida por mais de uma sentença; as funções y=k/x, y=raiz quadrada de x e seus gráficos; função inversa e seu gráfico; e Translação, reflexão de funções.

c. Função Linear, Função Afim e Função Quadrática: gráficos, domínio, imagem e características; variações de sinal; máximos e mínimos; e inequação produto e inequação quociente.

d. Função Modular: o conceito e propriedades do módulo de um número real; definição, gráfico, domínio e imagem da função modular; equações modulares; e inequações modulares.

e. Função Exponencial: gráficos, domínio, imagem e características da função exponencial, logaritmos decimais, característica e mantissa; e equações e inequações exponenciais.

f. Função Logarítmica: definição de logaritmo e propriedades operatórias; gráficos, domínio, imagem e características da função logarítmica; e equações e inequações logarítmicas.

g. Trigonometria: trigonometria no triângulo (retângulo e qualquer); lei dos senos e lei dos cossenos; unidades de medidas de arcos e ângulos: o grau e o radiano; círculo trigonométrico, razões trigonométricas e redução ao 1º quadrante; funções trigonométricas, transformações, identidades trigonométricas fundamentais, equações e inequações trigonométricas no conjunto dos números reais; - fórmulas de adição de arcos, arcos duplos, arco metade e transformação em produto; as funções trigonométricas inversas e seus gráficos, arcos notáveis; e sistemas de equações e inequações trigonométricas e resolução de triângulos.

h. Contagem e Análise Combinatória: fatorial: definição e operações; princípio multiplicativo e aditivo da contagem; arranjos, combinações e permutações; e binômio de Newton: desenvolvimento, coeficientes binomiais e termo geral.

i. Probabilidade: experimento aleatório, experimento amostral, espaço amostral e evento; probabilidade em espaços amostrais equiprováveis; probabilidade da união de dois eventos; probabilidade condicional; propriedades das probabilidades; e probabilidade de dois eventos sucessivos e experimentos binomiais.

j. Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares: operações com matrizes (adição, multiplicação por escalar, transposição produto); matriz inversa; determinante de uma matriz: definição e propriedades; e - sistemas de equações lineares.

k. Sequências Numéricas e Progressões: sequências Numéricas; progressões aritméticas: termo geral, soma dos termos e propriedades; progressões Geométricas: termo geral, soma dos termos e propriedades.

l. Geometria Espacial de Posição: posições relativas entre duas retas; posições relativas entre dois planos; posições relativas entre reta e plano: perpendicularidade entre duas retas, entre dois planos e entre reta e plano; e projeção ortogonal.

m. Geometria Espacial Métrica: poliedros Convexos, Poliedros de Platão, Poliedros Regulares: definições, propriedades e Relação de Euler; prismas: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes e troncos; pirâmide: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes e troncos; cilindro: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes e troncos; cone: conceito, elementos, classificação, áreas e volumes e troncos; esfera: elementos, seção da esfera, área, volumes e partes da esfera; projeções; sólidos de revolução; e inscrição e circunscrição de sólidos.

n. Geometria Analítica Plana: ponto: o plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento e condição de alinhamento de três pontos; reta: equações geral e reduzida, interseção de retas, paralelismo e perpendicularidade, ângulo entre duas retas, distância entre ponta e reta e distância entre duas retas, bissetrizes do ângulo entre duas retas, Área de um triângulo e inequações do primeiro grau com duas variáveis; circunferência: equações geral e reduzida, posições relativas entre ponto e circunferência, reta e circunferência e duas circunferências; problemas de tangência; e equações e inequações do segundo grau com duas variáveis; elipse: definição, equação, posições relativas entre ponto e elipse, posições relativas entre reta e elipse; hipérbole: definição, equação da hipérbole, posições relativas entre ponto e hipérbole, posições relativas entre reta e hipérbole e equações das assíntotas da hipérbole; parábola: definição, equação, posições relativas entre ponto e parábola, posições relativas entre reta e parábola; e reconhecimento de cônicas a partir de sua equação geral.

o. Geometria Plana: - ângulo: definição, elementos e propriedades; ângulos na circunferência; paralelismo e perpendicularidade; semelhança de triângulos; pontos notáveis do triângulo; relações métricas nos triângulos (retângulos e quaisquer); relação de Stewart; triângulos retângulos, Teorema de Pitágoras; congruência de figuras planas; feixe de retas paralelas e transversais, Teorema de Tales; teorema das bissetrizes internas e externas de um triângulo; quadriláteros notáveis; polígonos, polígonos regulares, circunferências, círculos e seus elementos; perímetro e área de polígonos, polígonos regulares, circunferências, círculos e seus elementos; fórmula de Heron; razão entre áreas; lugares geométricos; elipse, parábola e hipérbole; linha poligonal; e inscrição e circunscrição.

p. Polinômios: função polinomial, polinômio identicamente nulo, grau de um polinômio, identidade de um polinômio, raiz de um polinômio, operações com polinômios e valor numérico de um polinômio; divisão de polinômios, Teorema do Resto, Teorema de D'Alembert e dispositivo de Briot-Ruffinni; relação entre coeficientes e raízes. Fatoração e multiplicidade de raízes e produtos notáveis. Máximo divisor comum de polinômios;

q. Equações Polinomiais: teorema fundamental da álgebra, teorema da decomposição, raízes imaginárias, raízes racionais, relações de Girard e teorema de Bolzano.

Perceba que os tópicos destacados acima, são referentes a nossa **Mat I e parte da Mat II, que serão repassados por meio de livros eletrônicos + videoaulas, que estão sob minha responsabilidade**. Vale ressaltar que, antes de iniciarmos os pontos efetivos referentes ao edital, decidimos por bem darmos uma **revisada na Matemática Básica**, para que você possa relembrar pontos muito importantes para o bom desempenho do nosso curso. Confie em mim! Tudo fará diferença na sua aprovação. Leia cada detalhe! Não irá se arrepender.

Os Livros Eletrônicos do Estratégia Militar **são materiais completos**, com todo o arcabouço **teórico e prático**, tudo isso para otimizar seu tempo de estudo. É importante, além de saber estudar por eles, também ter uma excelente disciplina de estudos. É de suma importância a leitura atenta a todos os pontos teóricos, ainda que "ache" saber tudo. Antes de fazer as questões propostas, que possuem um grau mais elevado, oriento a **fazer os exercícios resolvidos**, bem como os exercícios-modelo. Eles farão você pegar uma base mais sólida.

Além dos Livros que irão explicar cada ponto do edital, na profundidade necessária ao seu concurso, lembro-vos ainda do acesso às videoaulas. Este material será complementar ao "PDF".

Para você que tem uma certa dificuldade em matemática, segue uma dica importante: **<u>ASSISTA ÀS VIDEOAULAS ANTES DE TUDO</u>**. Isso facilitará muito sua vida!

Além das aulas teóricas gravadas, farei também correção de questões de provas anteriores bem como de alguns desafios, para que fiquem um nível acima da prova. Tentarei esgotar, ao máximo, questões do seu certame, no entanto, utilizarei questões de fixação (modelo) e questões de outros concursos militares, para que tenha uma quantidade razoável de exercícios de cada tópico.

Nossa estratégia é trabalhar com uma teoria simples e aplicada àquilo que sua banca realmente cobra! Nada de perda de tempo. O negócio é atingir o que cai na prova.

Preparado, futuro "Soldado de Caxias"? Sigamos em frente!

Vamos à nossa aula!

O primeiro dos assuntos é: Notações Matemáticas. Por mais que não esteja de forma explícita em seu edital, esses símbolos matemáticos irão aparecer em todas as questões da sua prova. Por este motivo, é muito importante saber quais são e o que significa. Isso irá facilitar sobremaneira o decorrer das outras aulas.

Preparado, futuro "Aluno"? Sigamos em frente!

2- MÁXIMO DIVISOR COMUM (M.D.C)

1 - CONCEITO

O máximo divisor comum entre dois ou mais números é o maior número que os divide exatamente, ou seja, deixa resto zero.

Exemplo:

- ✓ O maior divisor comum de 12 e 18 é 6, pois, dentre os divisores comuns de 12 e 18: 1, 2, 3 e 6, este é o maior deles.

Fica simples encontrar o MDC de números relativamente pequenos, porém, quando são números maiores que o comum, o mais indicado é aplicar os procedimentos comuns para sua determinação.

2 - PROCESSOS PARA DETERMINAÇÃO DO MDC

Veremos a seguir, as principais técnicas para a determinação MDC. Lembrando que MDC significa: MÁXIMO DIVISOR COMUM.

1º Processo: Pela interseção dos divisores comuns

Num primeiro momento, deve-se determinar os divisores de cada um dos números dos quais se deseja calcular o MDC, e verificar, num segundo momento, no conjunto formado pela interseção dos divisores, qual o maior deles.

Lembro-vos que interseção nada mais é que os elementos em comum dos dois conjuntos formados pelos divisores dos números dados.

Exemplo: Encontrar o MDC dos números 90 e 108.

1º passo: Determinar os divisores de cada um dos números

		1
90	2	**2**
45	3	3.1=3, 3.2= **6**
15	3	3.3=**9**, 3.6=**18**
5	5	5, 19, 15
1		30, 45, 90

As setas indicam um produto dos fatores primos da decomposição do número 90 (coluna central), com divisores (coluna da direita), encontrados um a um, a partir do 1, que é divisor de todos os números naturais. Ressalto que, sempre o fator abaixo será multiplicado pelos divisores acima dele.

		1
108	2	**2**
54	2	**4**
27	3	**3, 6, 12**
9	3	**9, 18, 36**
3	3	**27, 54, 108**
1		

As setas indicam um produto dos fatores primos da decomposição do número 90 (coluna central), com divisores (coluna da direita), encontrados um a um, a partir do 1, que é divisor de todos os números naturais. Ressalto que, sempre o fator abaixo ser multiplicado pelos divisores acima dele.

Desta forma, pode-se afirmar que:

- D(90) = {1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90}

- D(108) = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27,36, 54, 108}

2º passo: Determinar os divisores comuns a 90 e 108 pela interseção entre os conjuntos dos divisores.

$$D(90) \cap D(108) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

3º passo: Verificar o maior divisor comum

MDC (90, 108) = 18

2º Processo: Pela decomposição em fatores primos de cada um dos números

Primeiramente, decompomos cada um dos números dados em fatores primos. A partir daí, o MDC será obtido multiplicando-se os fatores primos comuns elevados pelos seus menores expoentes obtidos na decomposição.

▪

Isso mesmo: será o resultado do produto dos fatore comuns com os seus menores expoentes.

Exemplos:

1) Vamos determinar o MDC dos números 72 e 240

1º passo: decompomos os números dados.

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$72 = 2^3.3^2$ $\qquad\qquad$ $240 = 2^4.3.5$

2º passo: os fatores primos comuns são: 2 e 3. Perceba que o fator 5 não entra na conta, pois não aparece na decomposição do número 72. Elevando-os aos menores expoentes encontrados na decomposição, obtemos:

$$2^3 \text{ e } 3^1$$

Logo, o MDC (72, 240) = $2^3.3^1 = 24$

2) Sendo A = $2^3.3^4.5^2.7$, B = $2^4.3^2.7^2.11$ e C = $2^2.3^5.5.7^3$. Determine o MDC entre A, B e C.

Exemplo bastante interessante, que é pura aplicação do conceito. Vamos a sua resolução.

Como os números já estão na forma fatorada, basta verificar os fatores primos comuns com seus respectivos menores expoentes.

MDC (A, B, C) = $2^2.3^2.7 = 4.9.7 = 252$

Segue abaixo, algumas das principais propriedades dentro do tema MDC

INDO MAIS FUNDO!

1ª) Caso não haja nenhum número que divide exatamente os números dados, além da unidade, isto é, MDC = 1, diz-se que os números dados são primos entre si.

Exemplos:

a) MDC (4, 15) = 1

b) MDC (50, 51) = 1

2ª) Caso o menor dos números dados seja divisor dos outros, o MDC será o menor dos números dados.

Exemplos:

a) MDC (8, 16, 24) = 8

b) MDC (12, 60, 84) = 12

3ª) Multiplicando-se ou dividindo-se dois ou mais números naturais por um outro número qualquer diferente de zero, o MDC deles ficará também multiplicado ou dividido por este número.

Exemplos:

a) MDC (12, 18) = 6

MDC (12.10, 18.10) = 6 . 10 $\Rightarrow$ logo, o MDC (120, 180) = 60

b) MDC (45, 60) = 15

MDC (45:3, 60:3) = 15 : 3 $\Rightarrow$ logo, o MDC (15, 20) = 5

4ª) Dividindo-se dois ou mais números naturais pelo MDC deles, encontraremos sempre quocientes primos entre si.

Demonstração: Sejam A, B, C, ... números dados e MDC (A, B, C,...) = d

Dividindo os números A, B, C ... pelo maior divisor comum deles **d**:

$$A|d = q_A, B|d = q_B, C|d = q_B, ...e$$
$$MDC(A|d, B|d, C|d, ...) = d|d = 1$$

Teremos MDC $(q_A, q_B, q_C, ...) = 1$ .Logo, os quocientes q_A, q_B, q_C são primos entre si.

Exemplo:

MDC (60, 36) = 12

Fazendo:

60 : 12 = 5

36 : 12 = 3

Teremos: MDC (5, 3) = 1, isto é, 5 e 3 são primos entre si.

3º Processo: Por divisões sucessivas

Este método também é conhecido como “Algoritmo de Euclides”.

Para determinarmos o MDC de dois números **a** e **b** (a > b), devemos dividir o maior número (a) pelo menor (b), em seguida dividirmos **b** pelo resto da divisão R_1 (primeiro resto encontrado). Depois dividirmos R_1 pelo resto da última divisão, R_2 (resto da segunda divisão), e assim sucessivamente, até encontrarmos resto igual a zero. O último divisor é o MDC procurado.

Na prática, organizam as divisões sucessivas conforme o dispositivo ilustrado abaixo.

	q_1	q_2	q_3	...	q_n	q_{n+1}
a	b				R_{n-1}	$R_n = MDC$
R_1	R_2	R_3	R_4	...	0	

Exemplo: Vamos calcular o MDC dos números 198 e 54 com o emprego do dispositivo acima mencionado:

1º passo: Armamos uma grade, parecida com o famoso “Jogo da Velha” e posicionamos os números 198 e 54 conforme a figura:

198	54	

2º passo: Efetuamos a divisão, colocando o quociente acima do divisor (54) e o resto abaixo do dividendo (198). Caso a divisão não seja exata, o resto passa a ser o novo divisor (ao lado do 54). Repetimos o procedimento **até ocorrer resto zero**. **O MDC será o último divisor (penúltimo resto).**

	3	
198	54	
36		

	3	
198	54	36
36		

	3	1	
198	54	36	18
36	18		

	3	1	2
198	54	36	**18**
36	18	0	

MDC (198, 54) = 18

INDO MAIS **FUNDO!**

> **Os quocientes $q_1, q_2, q_3...$ e q_{n-1} encontrados nas divisões sucessivas são números maiores ou iguais a 1 ($\geq$ 1) e, q_n (último quociente encontrado) só poderá ser maior ou igual a 2 ($\geq$ 2).**

Exemplo: O MDC de dois números é 13 e os quatro quocientes encontrados na pesquisa pelo Algoritmo de Euclides são os menores possíveis. Determine os números em questão.

Comentário:

Como os quatro quocientes são os menores possíveis, teremos:

	1	1	1	2
A	B	x	y	13
X	y	13	0	

A partir de agora, basta fazermos o caminho inverso de uma divisão. Sabemos que o dividendo será sempre igual ao divisor multiplicado pelo quociente, somado ao resto. Assim, observe o esquema abaixo:

$$y = 13.2 + 0 \Rightarrow y = 26$$
$$x = 26.1 + 13 \Rightarrow x = 39$$
$$B = 39.1 + 26 \Rightarrow B = 65$$
$$A = 65.1 + 39 \Rightarrow A = 104$$

Resposta: 104 e 65

4º Processo: Por decomposição simultânea (processo prático)

Consiste em determinar o MDC de dois ou mais números, efetuando a divisão simultânea deles pelos seus fatores primos comuns até encontrarmos quocientes primos entre si. Diferente da decomposição normal (simples), nesta do MDC, VOCÊ SÓ PODERÁ CONTINUAR A DIVISÃO SE O FATOR PRIMO FOR COMUM A TODOS OS NÚMEROS DADOS, ou seja, o fator deverá dividir todos os elementos em questão.

Exemplo: Vamos determinar o MDC entre 90 e 108 pela decomposição simultânea.

108	90	2

54	45	3
18	115	3
6	5	
↑	↑	
Primos entre si		

Percebam que a divisão em fatores primos terminou quando chegamos aos elementos 6 – 5, pois são primo entre si, que significa não ter fatores primos em comum.

MDC (108, 90) = 2 . 3 . 3 = 18

Divisores e Quantidade de divisores comuns de dois ou mais números:
Os divisores comuns de dois ou mais números são obtidos determinando-se os divisores do MDC desses números.

Exemplos:

a) Quantos divisores apresentam os números 300 e 480?

Temos que: MDC (300, 480) = 60, e como $60 = 2^2.3.5$, a quantidade de divisores de 60 é:

Q_D (60)= (2+1) . (1+1). (1+1) = 12 divisores

Logo, 300 e 480 possuem 12 divisores comuns.

b) Determine os divisores comuns dos números 252 e 378

Encontramos o MDC, usando a fatoração simultânea e obtemos os divisores do MDC

			1
378	252	2	**2**
189	126	3	**3, 6**
63	42	3	**9, 18**
21	14	7	**7, 14, 21**
3	2		**42, 63, 126**

Assim, os divisores comuns dos números 252 e 378 são: {1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126}

QUESTÕES COMENTADAS

(Exercício Fixação)

01. Quais os três menores números pelos quais devem ser divididos os números 144, 192 e 272 para que os quocientes sejam iguais?

Comentário:

O MDC entre 144, 192 e 272, obtido pela decomposição simultânea é:

144	192	272	2
72	96	136	2
36	48	68	2
18	24	34	2
9	12	17	

MDC (144, 192 e 272) = $2^4 = 16$

Dividindo-se cada número dado pelo MDC, obtemos os números procurado: 9, 12 e 17 respectivamente.

Resposta: 9, 12 e 17

(Exercício Fixação)

02. O MDC entre dois números A e B (A > B) é 18. Os quocientes obtidos pelo algoritmo de Euclides (divisões sucessivas) foram 1, 2, 2 e 3. A soma A + B vale:

Comentário:

	1	2	2	3
A	B			18
			0	

O MDC(18) fixa embaixo do último quociente (3). O resto da última divisão é sempre zero. Efetuamos, em seguida, o produto do MDC (18) pelo quociente (3), e encontramos 54. Retornamos com o divisor (18) à posição resto.

	1	2	2	3
A **432**	**B** **306**	126	54	18
126	54	18	0	

Efetuando 2 . 54 + 18, obtemos 126. Retornamos 54 à posição resto e efetuando 2 . 26 + 54, obtemos o valor B = 306, e retornando 126 para a posição resto, encontramos A = 1 . 306 + 126 = 432. A soma A + B = 432 + 306 = 738

Resposta: 738

(Exercício Fixação)

03. O MDC entre A e B (A > B) é 24. Os quocientes encontrados pelo Algoritmo de Euclides são os menores possíveis. A diferença A – B vale:

Comentário:

Os 4 menores quocientes são, 1, 1, 1 e 2, logo:

	1	1	1	2
192	120	72	48	24
72	48	24	0	

A – B = 192 – 120 = 72

(Exercício Fixação)

04. Três turmas de uma escola apresentam 60, 72 e 84 alunos, respectivamente. Num dia de festa o diretor ordenou que formassem no pátio grupamentos de alunos da mesma turma e que cada grupamento tivesse o mesmo e o maior número possível de alunos. Quantos alunos deve ter cada grupamento e quantos são os grupamentos?

Comentário:

O MDC entre 60, 70 e 84 representa o número de alunos em cada grupamento.

60	72	84	2
30	35	42	2
15	18	21	3
5	6	7	

MDC = 2.2.3 = 12

Dividindo-se o número de alunos de cada turma pelo MDC, obtemos o número de grupamentos que formamos em cada turma. Total de grupamentos 5+6+7 = 18

Resposta: 12 alunos em cada grupamento e 18 grupamentos.

(Exercício Fixação)

05. Uma linha telefônica vai ser instalada entre duas cidades. A estrada por onde deve passar a linha é dividida em dois trechos, formando em L. Um trecho mede 832m e o outro 876m. Devem-se colocar postes ao longo da estrada, guardando entre si a mesma distância, que deve ser a maior possível. Calcular o número de postes, sabendo-se que coloca um no ponto de encontro dos dois trechos da estrada e um em cada extremidade.

Comentário:

A distância entre dois postes consecutivos é dada pelo MDC (832, 676) = 52m

Note que, num trecho em L (aberto), o número de postes excede de uma unidade o número de divisões de todo o trecho, logo, dividindo-se o comprimento de todo o trecho pelo MDC e acrescentando uma unidade, obtemos o número de postes. [(832+676) : 52]+1 = 30

Resposta: 30 postes.

(Exercício Fixação)

06. Determinar A e B (A > B) sabendo-se que A + B = 360 e MDC (A,B) = 72

Comentário:

Imaginemos que MDC (A, B) = d, então A = d.q e B = d.q', onde q e q' são números primos entre si.

Somando-se as equações obtidas, temos: A + B = d.(q + q')

Se A + B = d.(q + q'), substituindo os dados da questão, encontramos:

$360 = 72(q + q') \rightarrow (q + q') = 5,$ logo

$q = 3; q' = 2$ ou $q = 4; q' = 1$

Se $A = dq$ e $B = dq'$, temos

$A = 3.72 = 216; B = 2.72 = 144$ ou $A = 4.72 = 288; B = 1.72 = 72$

Resposta: A = 216 e B = 144 ou A = 288 e B = 72

(Exercício Fixação)

07. O MDC entre dois números é 123. O maior é 738. Calcular o menor.

Comentário

Sejam A e B os dois números e A > B, temos:

$$A = dq \rightarrow q = \frac{A}{d}$$

$$q = \frac{738}{123} = 6$$

q e q' são primos entre si (q > q'), logo q' = 5 ou q' = 1

A = 5.124 = 615 ou B = 1.123 = 123

E aí, meu querido aluno!! Tudo bem até aqui??

Lembro-vos que estes tópicos não são comuns nem aparecem de forma explícita em sua prova, no entanto, serve como melhora de raciocínio e como ponte de resolução de possíveis problemas, como por exemplo de polinômios.

Sigamos firme!! Vamos estudar um pouco mais sobre o MMC.

3- Mínimo Múltiplo Comum – M.M.C

1 - Conceito

O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números naturais é o menor, excluindo o zero, que é múltiplo desses números.

Por exemplo, considere M(3) e M(4) os múltiplos naturais de 3 e 4, respectivamente.

M(3) = {0, 3, 6, 9, **12**, 15, 18, 21, **24**, 27, 30, 33, **36**, 39, ...}

M(4) = { 0, 4, 8, **12**, 16, 20, **24**, 28, 32, **36**, 40, 44,...}

Podemos verificar que dentre os múltiplos comuns de 3 e 4, o menor, excluindo o zero, é 12. Logo, MMC (3, 4) = 12

2 - MÉTODOS PARA OBTENÇÃO DO MMC

1º Método: Pela interseção dos múltiplos dos números dados

Devemos determinar os conjuntos dos múltiplos dos números dados, e verificar dentre os múltiplos comuns aos conjuntos o menor múltiplo não nulo.

Por exemplo, como determinar o MMC entre 12 e 18?

1º passo: Determinar os conjuntos dos não nulos de 12 e 18. Lembro-vos que conjunto não nulo, utiliza-se como simbologia o asterisco.

$$M^{*}(12) = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, ...\}$$

$$M^{*}(18) = \{18, 36, 54, 72, 90, 108, ...\}$$

2º passo: Determinar a interseção entre os conjuntos

$$M^{*}(12) \cap M^{*}(18) = \{36, 72, 108, ...\}$$

3º passo: Basta verificar o menor elemento.

Dentre os múltiplos comuns, o menor é 36.

Logo MMC (12, 18) = 36

<u>2º Método</u>: Por decomposição em fatores primos separadamente

A partir da decomposição dos números em fatores primos, o MMC é calculado multiplicando-se os fatores primos comuns e não comuns, elevados aos maiores expoentes que apresentarem.

Exemplo: Determinar o MMC de 90 e 252

1º passo: Decompor os números 90 e 252 em fatores primos

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$90 = 2.3^2.5$

$252 = 2^2.3^2.7$

2º passo: Multiplicar os fatores primos comuns e não comuns de 90 e 252, tomando cada um deles com o maior expoente obtido.

MMC (90, 252) = $2^2.3^2.7$

MMC (90, 252) = 1260

<u>3º Método</u>: Por decomposição Simples (não simultânea)

O método consiste em fazer a decomposição completa dos números dados simultaneamente, e o MMC será obtido através do produto dos fatores primos obtidos.

Por exemplo, vamos calcular o MMC de 15, 20 e 30

1º passo: Escrevemos os números dados, separando-os por vírgula, e fazemos um traço vertical ao lado do último número.

$$\begin{array}{r|l} 15,20,30 & \\ & \\ & \\ & \end{array}$$

2º passo: No outro lado do traço colocamos o menor dos fatores primos comuns ou não dos números dados, e abaixo dos números que forem divisíveis pelo fator, colocamos o quociente da divisão. Já os que não forem divisíveis, repetimos.

$$\begin{array}{r|l} 15,20,30 & 2 \\ 15,10,15 & \\ & \\ & \end{array}$$

3º passo: Repetimos o procedimento até que todos os quocientes sejam iguais a 1

$$\begin{array}{c|l} 15,20,30 & 2 \\ 15,10,15 & 2 \\ 15,5,15 & 3 \\ 5,5,5 & 5 \\ 1,1,1 & \end{array}$$

4º passo: M MMC será o produto dos fatores primos escritos à direita do traço.

MMC (15,20,30) = $2^2.3.5 = 60$

- **Propriedades**

1ª) O MMC entre dois números primos entre si é igual ao produto deles.

Exemplos:

a) MMC (3,5) = 3 . 5 = 15

b) MMC (11,16) = 11 . 16 = 176

2ª) O MMC entre dois ou mais números naturais, onde o maior é múltiplo do(s) outro(s), é o maior.

Exemplos:

a) MMC (3,27) = 27

b) MMC (12,36) = 36

c) MMC (8,16,24) = 24

3ª) Qualquer múltiplo do MMC de dois ou mais números, também será múltiplo destes números.

Exemplos:

Seja MMC (12,18) = 36

Portanto, 36,72,108,144,... são múltiplos do MMC e são múltiplos de 12 e de 18

4ª) Relação entre o MMC e o MDC de dois ou mais números.

O produto de dois ou mais números naturais diferentes de zero é igual ao produto do MDC pelo MMC deles.

$a.b = \text{mdc}(a,b).\text{mmc}(a,b)$; consequência da última propriedade.

5ª) Dividindo-se o MMC de dois ou mais números naturais A, B, C,...,por cada um deles, encontramos sempre quocientes primos entre si.

Exemplo: Como MMC (12,18) = 36, temos que:

$$\frac{36}{12} = 3$$

onde 3 e 2 são primos entre si

$$\frac{36}{18} = 2$$

6ª) Multiplicando-se ou dividindo-se o MMC de dois ou mais números naturais por um número diferente de zero, o MMC deles também ficará multiplicado ou dividido por este número.

Exemplos:

a) MMC (12,18) = 36

MMC (12.10, 18.10) = 36.10 $\Rightarrow$ MMC (120,180) = 360

b) MMC (20,30,60)

MMC $\left(\frac{20}{15}, \frac{30}{5}, \frac{60}{5}\right) = \frac{60}{5} = 12$

Vamos partir para algumas aplicações das propriedades aprendidas sobre MMC?? Simbora!

QUESTÕES COMENTADAS

(Exercício Fixação)

08. O menor número inteiro que dividido por 8, 15 e 18 deixa sempre resto 5 é:

Comentário

O MMC (8,15,18) é menor número que dividido por 8, 15 e 18 deixa sempre resto zero. Para restarem 5 unidades, somamos 5 unidades ao MMC, isto é:

$$MMC\ (8,15,18) + 5 = 360 + 5 = 365$$

Resposta: 365

(Exercício Fixação)

09. Uma pessoa possui mais de R$6.000,00 e menos de R$ 7.000,00. Contando essa quantia de R$ 100,00 em R$ 100,00, de R$ 150,00 em R$ 150,00 ou de R$ 250,00 em R$ 250,00, verificou-se que sempre sobravam R$ 60,00 Quanto possui esta pessoa?

Comentário

MMC (100, 150, 250) = 1500

O múltiplo de 1500 que acrescido de 60 situa-se entre 6000 e 7000 é:

$$1500.4 = 6000$$
$$6000 + 60 = 6060$$

Resposta: 6060

(Exercício Fixação)

10. De um aeroporto partem aviões para São Paulo, Belo Horizonte, Porto Alegre e Brasília, respectivamente de 10 em 10, 20 em 20, de 25 em 25 e de 45 em 45 minutos. Tendo em uma ocasião partido todos no mesmo instante, pergunta-se: No fim de quanto tempo voltarão a partir juntos?

Comentário:

MMC (10, 20, 25, 45) = 900

900 minutos = 15 horas

Resposta: 15 horas

(Exercício Fixação)

11. Duas rodas de engrenagem tem 48 e 54 dentes, respectivamente. Cada roda tem um dente estragado. Se num dado instante estão em contato os dentes estragados, esse encontro repetir-se-á novamente, quando a primeira roda que tem 48 dentes tiver dado x voltas. Qual o valor de x?

Comentário

Os dentes estragados se encontram novamente daqui a:

MMC (48, 54) = 432 engates

A roda menor terá dado: 432 : 48 = 9 voltas

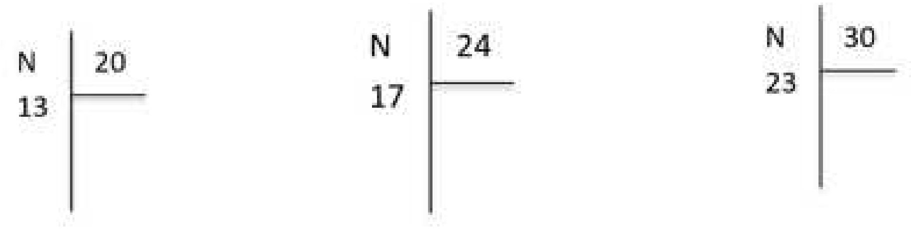
Resposta: 9 voltas

(Exercício Modelo)

12. Determine o menor número dividido por 20 deixa resto 13, dividido por 24 deixa resto 17 e dividido por 30 deixa resto 23.

Comentário

Seja N o número procurado, então:



Observe que a diferença entre o divisor e o resto é constante e igual a 7, isto é, N + 7 é múltiplo comum de 20, 24 e 30. Como o problema pede o menor número, igualamos N + 7 ao MMC (20, 24 e 30), logo:

N+7 = MMC(20, 24, 30)

N+7 = 120

N = 113

Resposta: 113

Opaaaaa.....está acabando esta linda aula(rsrsrssr).

Sigamos em frente!

4 - Estudo dos Números Primos

1- Conceito

Um número natural é primo quando admite apenas dois divisores naturais exatos e distintos: ele mesmo e a unidade (1).

2 - Crivo de Eratóstenes

Eratóstenes (267 a.c. – 194 a.c) foi um matemático nascido na Grécia, criador do primeiro método para encontrar números primos, hoje conhecidos como Crivo de Eratóstenes.

O método resume-se em grifar (riscar) os números divisíveis por 2, 3, 5 e 7,..., maiores que 2, 3, 5, 7,..., conforme forem aparecendo.

Vejamos:

	2	3	**4**	5	**6**	7	**8**	**9**	**10**	
	11	**12**	13	**14**	**15**	**16**	17	**18**	19	**20**
	21	**22**	23	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	29	**30**
	31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	37	**38**	**39**	**40**
	41	**42**	43	**44**	**45**	**46**	47	**48**	**49**	**50**

Os números que restaram sem ser marcados nesse quadro foram:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 e 47

Esses são os números primos menores que 50.

Cuidado!!!
- O número 1 não é primo, porque ele tem apenas um divisor, que é ele mesmo.

- Os números que têm mais de dois divisores são denominados de números compostos.

Exemplos de números compostos: 4, 6, 8, 9, 10, 12,...

Todo número composto pode ser expresso como um produto de fatores de potências de números primos. Por exemplo:

$$4 = 2^2$$
$$6 = 2.3$$
$$8 = 2^3$$
$$9 = 3^2$$
$$10 = 2.5$$
$$12 = 2^2.3...$$

Observações e Curiosidades

1ª) O único número par primo é 2.

2ª) Teorema de Euclides: “Existe uma quantidade infinita de números primos”.

3 - Regra para reconhecimento de um número primo

Para reconhecer se um número diferente de 1 e 2 é primo, basta dividi-lo pela sucessão de números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13,...). Se alguma divisão der exata, o número é composto. Caso contrário, continuamos as divisões até que o quociente se torne igual ou menor que o divisor, caso seja, o número em questão será primo.

Exemplos:

1) Vamos verificar se o número 257 é primo.

Dividindo o número 257 por 2, 3, 5, 7, 11 e 13, nesta ordem, podemos observar que nenhuma divisão é exata. Ao dividirmos 257 por 17, obtemos quociente 15 e resto 2, isto é, quociente menor que o divisor. **Podemos afirmar então que 257 é primo.**

$$\begin{array}{r|l} 257 & 13 \\ \cline{2-2} 127 & 19 \\ 10 & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r|l} 257 & 17 \\ \cline{2-2} 19 & 15 \\ 2 & \end{array}$$

Como q = 15 < d = 17 $\Longrightarrow$ 257 é primo

Para dividir por 2, 3, 5, 7 e 11 utilizar as regras de divisibilidade já conhecidas.

2) Vamos verificar se o número 197 é primo.

Dividindo o número 197 por 2, 3, 5, 7, 11 e 13, nesta ordem, podemos observar que nenhuma divisão é exata. Ao dividirmos 197 por 17, obtemos quociente 11 e resto 10, isto é, o quociente é menor que o divisor. **Podemos afirmar então que 197 é primo.**

$$\begin{array}{r|l} 197 & 13 \\ \cline{2-2} 67 & 15 \\ 2 & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r|l} 197 & 17 \\ \cline{2-2} 27 & 11 \\ 10 & \end{array}$$

Como q = 11 < d = 17 $\Longrightarrow$ 197 é primo

3) Já o número 253 não é primo. Vejamos:

$$\begin{array}{r|l} 253 & 7 \\ \hline 1 & 36 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r|l} 253 & 11 \\ \hline 33 & 23 \\ 0 & \end{array}$$

Como a divisão de 253 por 11 é exata, 253 é divisível por 11.

4 - NÚMEROS PRIMOS ENTRE SI

Dois ou mais números são primos entre si quando não admitirem divisores comuns além da unidade (1).

Exemplos:

1) **8 e 15 são primos entre si**

D(8) = {1, 2, 4, 8}

D(15) = {1, 3, 5, 15}

- O único divisor comum é 1.

2) **20 e 21 são primos entre si**

D(20) = {1, 2, 4, 5, 10, 20}

D(21) = {1, 3, 7, 21}

- O único divisor comum é 1

3) **21 e 33 não são primos entre si**

D(21) = {1, 3, 7, 21}

D(33) = {1, 3, 11, 33}

- Há dois primos comuns: 1 e 3

Vejamos algumas propriedades dos números primos entre si

1ª) Dois números naturais sucessivos são sempre primos entre si.

2ª) As potências de dois ou mais números primos, também são números primos entre si.

3ª) Se dois números a e b forem primos entre si, a soma e o produto deles serão sempre números primos entre si.

4ª) Se a e b são dois números quaisquer ($\neq 0$), os números b e a.b + 1 são sempre primos entre si.

5ª) Os números a; a+1 e 2a+1 são sempre primos entre si, dois a dois.

6ª) Um número ímpar qualquer e a metade de seu sucessor são sempre primos entre si.

7ª) Dois números a e b, cuja soma seja um número primo P, são primos entre si.

5- Quantidade de Divisores Naturais de um Número

A quantidade de divisores naturais exatos de um número N é dada pelo produto dos sucessivos de todos os expoentes de seus fatores primos.

Demonstração: Seja $N = a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}....$, então:

$D(a^{\alpha}) = \{a^0, a^1, a^2, ..., a^{\alpha}\}$, ou seja, $(\alpha + 1)$ divisores;

$D(b^{\beta}) = \{b^0, b^1, b^2, ..., b^{\beta}\}$, ou seja, $(\beta + 1)$ divisores;

$D(c^{\gamma}) = \{c^0, c^1, c^2, ..., c^{\gamma}\}$, ou seja, $(\gamma + 1)$ divisores

Portanto, $a^{\alpha}, b^{\beta}, c^{\gamma}, ...$, possuem, respectivamente, $(\alpha + 1)$, $(\beta + 1)$, $(\gamma + 1)$,... divisores.

Agora,

Para calcular a quantidade de divisores naturais de $N = a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}....$, basta utilizar o princípio multiplicativo, isto é

$$Q_D(N) = (\alpha + 1).(\beta + 1).(\gamma + 1)...$$

Exemplos:

a) Calcule a quantidade de divisores naturais de 12.

Seja $12 = 2^2.3^1$

$D(2^2) = \{2^0, 2^1, 2^2\}$

$D(3^1) = \{3^0, 3^1\}$

$n[D(2^2)] = 3$

$n[D(3^1)] = 2$

Portanto, os divisores de $12 = 2^2.3^1$ são:

$\{2^0.3^0, 2^0.3^1, 2^1.3^0, 2^1.3^1, 2^2.3^0, 2^2.3^1\}$

Ou seja,

$Q_D(12) = 3.2 \Rightarrow Q_D(12) = 6$ divisores

b) Determinar o total de divisores naturais do número 1200. Decompondo o número 1200, obtemos:

$1200 = 2^4.3^1.5^2$

Acrescentando uma unidade a cada expoente e efetuando o produto, temos:

$Q_D = (1200) = (4+1).(1+1).(2+1)$

$Q_D = (1200) = 5.2.3 = 30$ divisores

5 – Razão e Proporção

1 – Razão

É a comparação entre dois números ou duas grandezas. Essa comparação pode ser feita por subtração ou divisão.

- <u>As razões feitas por subtração, são ditas razões aritméticas, cujo resultado é uma diferença entre as grandezas.</u>
- <u>As razões feitas por divisão (quociente), são ditas razões geométricas, cujo resultado indica quantas vezes um número contém ou está contido em outro.</u>

Em nosso curso, utilizaremos a palavra Razão, nos referindo a Razão Geométrica. OK?

A Razão, em outras palavras, é o quociente entre o antecedente e o quociente, sendo este último, diferente de zero.

Quadro Resumo:

Razão
- Aritmética: R = a – b
- Geométrica: R = $\frac{a}{b}$; b≠0

Assim, dado dois números **a** e **b** (b≠0), o quociente entre eles, nesta ordem, é a razão de **a** para **b.**

Vejamos algumas nomenclaturas:

a : b ⇒ Razão de **a** para **b**

$\frac{a}{b}$ ⇒ **a** está para **b**

a: chama-se antecedente
b: chama-se consequente

2 - PROPORÇÃO

É a igualdade de duas ou mais razões. Sua forma mais característica é a igualdade entre duas razões.

Segue exemplo abaixo:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ⇒ Proporção

Vejamos algumas nomenclaturas:

a e **c**: antecedentes da proporção
b e **d**: consequentes da proporção
a e **d**: extremos
b e **c**: meios

Não fique preso aos diversos nomes que estou apresentando. O importante para sua prova, além de saber que existe, é saber usar os conceitos no momento certo, ok?

3 - PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS DA PROPORÇÃO

Veremos a partir de agora, algumas propriedades muito importantes para o prosseguimento da nossa aula. Ressalto que ao repassar a definição e o esquematizado de cada propriedade, irei demonstrar como se chega àquela determinada definição, passando um exemplo prático de sua aplicação. Isso ajudará sobremaneira no entendimento do conteúdo. Sem mais, vamos nessa!

1ª Propriedade:

Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a.d=b.c$$

Verificação:

- ✓ Seja a proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.
- ✓ Agora, vamos multiplicar os dois membros por pelo produto *b.d*.
- ✓ Após esta operação, simplifique os termos semelhantes.

$$\frac{a}{\cancel{b}}.\cancel{b}d=\frac{c}{\cancel{d}}.b\cancel{d}\Rightarrow a.d=c.b$$

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Uma distribuidora de combustível mistura gasolina e álcool em quantidades proporcionais a 8 e 5. Em uma encomenda de um posto de combustível havia 4800l de gasolina. Quantos litros de álcool foram utilizados nessa encomenda?

Pelo enunciado do problema temos que $\frac{\text{gasolina}}{\text{álcool}}=\frac{8}{5}$ que é a proporção da mistura.

Para a quantidade de 4800l de gasolina vamos utilizar *x* l de álcool.

Ou seja: $\frac{4800}{x}=\frac{8}{5}$, pela 1ª propriedade (propriedade fundamental das proporções), teremos:

$$8.x = 5.4800$$
$$x = \frac{5.4800}{8}$$
$$x = 5.600$$
$$x = 3000l$$

Portanto, foram utilizados 3000l de álcool nessa encomenda.

Essa primeira propriedade nos traz duas consequências, a saber:

a) Uma proporção não se altera quando permutamos meios ou extremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

b) Uma proporção não se altera quando invertemos as razões:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

2ª Propriedade:

Em toda proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como qualquer antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Verificação:

- ✓ Sendo a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (b, c ≠ 0), $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ (constante de proporcionalidade).
- ✓ Podemos dizer que: $\begin{cases} a = kb \\ c = kd \end{cases}$

✓ Somando as equações, encontramos:

$$a+c=kb+kd \Rightarrow a+c=k.(b+d)$$

$$k=\frac{a+c}{b+d}$$

Portanto, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Calcule x e y na proporção $\frac{x}{2}=\frac{y}{5}$, dado x + y = 14.

Utilizando a 2ª propriedade, podemos escrever:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{x+y}{2+5}$$

Como x + y = 14, teremos:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{14}{7}=2$$

Logo, x = 4 e y = 10

3ª Propriedade:

Em toda proporção, a diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes, assim como qualquer antecedente está para o seu respectivo consequente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$$

Verificação:

✓ Sendo a proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ (constante de proporcionalidade)

- ✓ Podemos dizer que: $\begin{cases} a = bk \\ c = dk \end{cases}$
- ✓ Subtraindo as equações, teremos:

$$a - c = bk - dk \Rightarrow a - c = k.(b - d)$$

$$k = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\text{Portanto, } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Determine x e y, sendo $\frac{x}{5} = \frac{y}{2}$ **e** $x - y = 12.$

Utilizando a 3ª propriedade, podemos escrever:

$$\frac{x}{5} = \frac{x}{2} = \frac{x-y}{5-2}$$

Como x – y = 12, teremos

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{12}{3} = 4$$

Logo x = 20 e y = 8

4ª Propriedade:

Em toda proporção, o produto das duas razões sempre será igual a qualquer uma delas, porém, elevadas a segunda potência (ao quadrado).

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a.c}{b.d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a.c}{b.d}$$

Verificação:

✓ Sendo a proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ (b, d ≠ 0) podemos dizer que:

$$\begin{cases} a = kb \\ c = kd \end{cases}$$

✓ Multiplicando as equações, vem:

$$a.c = kb.kd \Rightarrow a.c = k^2.b.d$$

$$k^2 = \frac{a.c}{b.d}$$

Portanto, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a.c}{b.d} \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a.c}{b.d}$

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Determine x e y, sendo $\frac{x}{5}=\frac{y}{2}$ e x . y = 160

Utilizando a 4ª propriedade podemos escrever:

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x.y}{5.2} = \frac{x^2}{5^2} = \frac{y^2}{2^2}$$

$$\frac{x.y}{10} = \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{4}$$

Como x . y = 1600, teremos:

$$\frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{4} = \frac{160}{10} = 16$$

Logo,

$$x^2 = 16.25 \therefore x = 20$$

$$y^2 = 16.4 \therefore y = 8$$

5ª Propriedade:

Em toda proporção, a soma dos termos da primeira razão estará para seu antecedente ou consequente, assim como a soma dos termos da segunda razão estará para seu antecedente ou consequente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}\text{ ou }\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

Verificação:

- ✓ Seja a proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ (b, d $\neq$ 0)

$$\begin{cases} a = kb(1) \\ c = kd(2) \end{cases}$$

- ✓ Somando-se b aos dois membros (1), e somando-se d aos dois membros de equação (2), vem:

$$\begin{aligned} a+b &= kb+b \\ a+b &= b.(k+1) \\ k+1 &= \frac{a+b}{b} \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} c+d &= kd+d \\ c+d &= d.(k+1) \\ k+1 &= \frac{c+d}{d} \end{aligned}$$

- ✓ Igualando-se, teremos

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

TOME NOTA!

Para demonstrarmos a 5ª propriedade, poderíamos fazer simplesmente:

Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, então $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

6ª Propriedade:

Em toda proporção, a diferença dos termos da primeira razão estará para seu antecedente ou consequente, assim como a diferença dos termos da segunda razão estará para antecedente ou consequente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

PRESTE MAIS ATENÇÃO!!

A 6ª propriedade pode ser verificada por procedimento análogo ao da 5ª propriedade.
Exemplo. Se a razão entre os números **a** e **b**, nesta ordem, é 0,75, então a razão entre os números a + b e b é:

Vejamos que: $\frac{a}{b}=0,75\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{75}{100}\Leftrightarrow\frac{a}{8}=\frac{3}{4}$

Pela 5ª propriedade, vem: $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{3+4}{4}$

Logo, $\frac{a+b}{b}=\frac{7}{4}$

QUESTÕES COMENTADAS

(Exercício Modelo)

13. Determine x e y, respectivamente, sendo $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{2} \\ x.y = 160 \end{cases}$

Comentário:

Permutando os meios da proporção, obtemos:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2}$$

Efetuando o produto das razões, encontramos:

$$\frac{x.y}{5.2} = \frac{160}{10} = 16$$

Sendo as razões iguais, o produto é igual ao quadrado de qualquer uma delas, logo:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = 4$$

$$\begin{cases} x = 4.5,\ x = 20 \\ y = 4.2,\ y = 8 \end{cases}$$

Gabarito: ***x = 20 e y = 8***

(Exercício Modelo)

14. Determine x e y, respectivamente, sendo $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3}$ e $x^2 + y^2 = 52$

Comentário:

Quadrando os membros da proporção, obtemos:

$$\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{x^2 + y^2}{4+9} = \frac{52}{13} = 4$$

$$\text{Se } \frac{x^2}{4} = 4, \quad \text{então} \quad x^2 = 16, x = 4$$

$$\text{Se } \frac{y^2}{9} = 4, \quad \text{então} \quad y^2 = 36, y = 6$$

Gabarito: ***x = 4 e y = 6***

(Exercício Modelo)

15. Sendo $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \\ x.y.z = 1920 \end{cases}$, calcule os valores de x, y e z.

Comentário:

Efetuando o produto das razões, obtemos:

$$\frac{x.y.z}{30} = \frac{1920}{30} = 64 \text{ , } \quad \text{logo} \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\begin{cases} x = 2.4, x = 8 \\ y = 3.4, y = 12 \\ z = 5.4, z = 20 \end{cases}$$

Gabarito: ***x = 8 ,y = 12 e z = 20***

(Exercício Modelo)

16. A diferença entre os consequentes de uma proporção é 2, e os antecedentes são 75 e 45. Ache os consequentes desta proporção.

Comentário:

Com os dados da questão, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{75}{x} = 15 \therefore x = 5 \\ \dfrac{45}{y} = 15 \therefore y = 3 \end{cases}$$

Gabarito: ***x = 5 e y = 3***

Depois de praticar alguns exercícios de fixação, começaremos agora a estudar alguns nomes específicos e outras propriedades tão importantes quanto as vistas anteriormente. OK? Vamos nessa!

- **Proporção Contínua**

É toda proporção cujos meios ou extremos são iguais.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{ou} \quad a : b = b : c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{b} \quad \text{ou} \quad b : a = c : b$$

- **Terceira Proporcional**

É o terceiro termo de uma proporção contínua.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x} \qquad x \rightarrow \text{3ª proporcional}$$

$$a : b = b : x \therefore x = \frac{b^2}{a}$$

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Calcule a 3ª proporcional entre 4 e 6.

Montando a proporção, teremos:

$$\frac{4}{6}=\frac{6}{x}\Rightarrow\frac{36}{4},\ x=9$$

➢ Média Proporcional

É o termo igual de uma proporção contínua.

Seja a proporção contínua entre os termos a, x e b:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}\Rightarrow x=\sqrt{a.b}\ \text{(média proporcional)}$$

Assim,

A média proporcional é igual a raiz quadrada do produto obtido entre duas grandezas (*a e b*).

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Calcule a média proporcional entre 9 e 16

$$x=\sqrt{9.16}\Rightarrow x=\sqrt{144}\therefore x=12$$

➢ Quarta Proporcional

É o quarto termo de uma proporção não contínua.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}\qquad x\rightarrow \text{4ª proporcional}$$

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Determinar a 4ª proporcional dos números 9, 4 e 18.

$$\frac{9}{4}=\frac{18}{x}\Rightarrow 9.x=4.18 \therefore x=8$$

Não irei aprofundar tanto neste tema Propriedades da Proporção, tendo em vista extrapolar o conteúdo do seu edital.

17. (ESA 85) A idade de um pai somada com a de seu filho dá 45 anos. Sabendo-se que a idade do filho está para a idade do pai assim como 1 está para 4, podemos dizer que as idades são:

a) 9 e 36 anos

b) 8 e 32 anos

c) 8 e 37 anos

d) 6 e 39 anos

Comentário:

Vamos extrair alguns dados da questão!

- ✓ **Idade do Pai: P**
- ✓ **Idade do Filho: F**
- ✓ **P + F = 45**
- ✓ **P/F = 1/4**

Assim,

$$\frac{P}{F} = \frac{4x}{1x}$$
$$4x + 1x = 45$$
$$5x = 45 \therefore x = 9$$

Logo,

$$P = 4x = 4.9 = 36$$
$$F = 1x = 1.9 = 9$$

Gabarito: A

---

18. (ESA 87) Os preços de duas peças de fazenda estão entre si como 7 está para 8. Sabendo-se que o triplo do preço de uma menos o dobro do preço da outra vale R$ 50,00. Os preços dessas peças são:

a) R$ 60,00 e R$ 70,00

b) R$ 70,00 e R$ 80,00

c) R$ 30,00 e R$ 40,00

d) R$ 80,00 e R$ 90,00

e) R$ 50,00 e R$ 60,00

Comentário:

Vamos extrair alguns dados da questão!

- ✓ Peça: x
- ✓ Peça: y
- ✓ x/y: 7/8
- ✓ 3x – 2y = 50,00

Assim, temos que:

$$\frac{x}{y} = \frac{7k}{8k}$$
$$3x - 2y = 50$$
$$3.(7k) - 2.(8k) = 50$$
$$21k - 16k = 50$$
$$5k = 50$$
$$k = 10$$

Logo,

$$x = 7k = 7.(10) = 70$$
$$y = 8.k = 8.(10) = 80$$

Gabarito: B

---

19. (ESA 91) Um atirador acerta, no alvo, 3(três) de cada 5(cinco) disparos que faz. Tendo feito uma série de 30 tiros, ele errou:

(A) 28

(B) 15

(C) 12

(D) 25

(E) 24

Comentário:

Vamos extrair alguns dados da questão!

- ✓ A cada 5 tiros: 2 são certos e 3 errados.
- ✓ C/E = 3/2
- ✓ C + E = 30

Assim, temos que:

$$\frac{c}{e}=\frac{3k}{2k}$$
$$2k+3k=30$$
$$5k=30$$
$$k=6$$

Logo,

$$e=2k$$
$$e=2.(6)$$
$$e=12$$

Gabarito: C

---

20. (ESA 91) Se a razão entre os números a e b, nesta ordem, é de 0,75; então a razão entre os números (a + b) e b é:

(A) 4/3

(B) 1/3

(C) 3/4

(D) 1,75

(E) 0,25

Comentário:

Vamos a conta!

$$\frac{a}{b} = 0,75$$
$$\frac{a}{b} = \frac{75}{100}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \to \frac{a+b}{b} = \frac{3+4}{4} = \frac{7}{4}$$
$$\frac{a+b}{b} = \frac{7}{4} = 1,75$$

Gabarito: D

4 - Casos Especiais de Razão

Agora, veremos alguns casos bem especiais de Razão. Ressalto que são bem comuns nas resoluções de problemas. Vamos a eles!

Escala:

É a razão entre a mediana de comprimento do desenho e a medida real desse comprimento, representado na mesma unidade.

$$E = \frac{medida\ de\ comprimento\ do\ desenho}{medida\ de\ comprimento\ real}$$

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

A escala da planta de um terreno, na qual o comprimento de 60 metros foi representado por um segmento de 3 cm, é:

a) 1 : 10.000

b) 1 : 2.000

c) 1 : 3.000

d) 1 : 6.000

e) 1 : 4.000

Como 60 metros equivalem a 60.000 centímetros, temos que:

$$E = \frac{3}{6000} = \frac{1}{2.000}$$

Probabilidade:

São as "chances", "possibilidades" de ocorrer determinado evento.

Caso se queira encontrar a probabilidade de determinado evento ocorrer, basta calcular a razão entre o número de situações favoráveis para que o evento ocorra, é o número total de situações que podem ocorrer.

$$P = \frac{Evento\ Favorável}{Total}$$

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Qual a probabilidade de sair o número 2 num lançamento de um dado não viciado com 6 faces?

Evento favorável: uma possibilidade (só o número 2)

Espaço amostral: seis possibilidades (1 a 6)

Assim, $P = \frac{1}{6}$

Densidade demográfica:

É a razão entre o número de habitantes de uma região e a área dessa região.

$$D = \frac{número\ de\ habitantes}{área}$$

Na cidade de Três Corações, o número de habitantes é 30.000. Sabendo-se que a área é de 100.000 m², podemos afirmar que a densidade desta cidade é?

$$D = \frac{30.000}{100.000} = \frac{3}{10} = 0{,}3\ hab/m^2$$

Velocidade Média:

É a razão entre a variação do espaço percorrido pela variação do tempo.

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta T}$$

A velocidade constante para se percorrer 240 km em 3 horas é

$$v = \frac{240\text{km}}{3\text{h}} = 80\text{km}/\text{h}$$

Densidade:

É a razão entre uma certa quantidade de massa e o volume dessa quantidade de massa.

$$D = \frac{massa}{volume}$$

Qual é a densidade de um líquido sabendo que 100 litros do mesmo têm massa 60 kg?

$$d = \frac{60\text{kg}}{100\ell} = 0{,}6\text{kg}/\ell$$

6 - Divisão Proporcional

1 - Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando (ou diminuindo) uma delas, a outra aumenta (ou diminui) na mesma proporção da primeira.

São grandezas **diretamente proporcionais**, por exemplo:

- ✓ O salário de um operário e o tempo de trabalho;

- ✓ O preço e quantidade e a quantidade de mercadorias adquiridas;
- ✓ Os juros de um capital empregado durante um determinado tempo etc.

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Um carro percorre, com velocidade constante em 1h,60km e, em duas horas, 120km.

Grandeza tempo	Grandeza distância
1h	60km
2h	120km
...	...

A proporção correspondente é: $\frac{1}{2}=\frac{60}{120}$ ou $\frac{1}{60}=\frac{2}{120}$

Caso o veículo do exemplo mantenha a velocidade constante ao longo do percurso, teremos a sequência de razões.

$$\frac{1}{60}=\frac{2}{120}=\frac{3}{180}=\frac{4}{240}=\ldots$$

Resumindo: para cada hora, o veículo percorre mais 60 Km.

Portanto,

Duas sucessões de números ou grandezas *(a, b, c, ...) e (a', b', c', ...)* são diretamente proporcionais quando $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\ldots=k$ constante, na qual K é dita constante de proporcionalidade.

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

As sucessões de números (2, 6, 8) e (3, 9, 12) são diretamente proporcionais, pois:

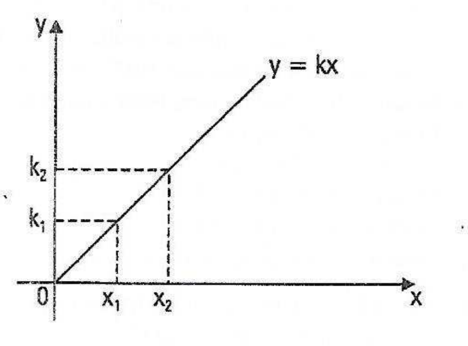
$$\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}$$

No estudo de várias ciências, constata-se a existência de proporcionalidade entre grandezas.

- A cinemática nos mostra que o espaço percorrido por um corpo animado de movimento uniforme é proporcional ao tempo gasto em percorrê-lo.

- Na Geometria, as áreas de dois retângulos de mesma base ou altura, são proporcionais as suas alturas ou bases, respectivamente. E os comprimentos de duas circunferências, são proporcionais aos seus raios

- Duas grandezas diretamente proporcionais também podem ser representadas graficamente, expressas por uma "função linear" do tipo: $y - k.x$, onde k é a constante de proporcionalidade ($k \in \mathbb{R}^*$)



2 - GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando (diminuindo) uma delas, a outra diminui (aumenta) na proporção inversa da primeira.

São grandezas **inversamente proporcionais,** por exemplo:

- O número de operários e o tempo necessário à realização de uma obra;
- A velocidade de um móvel e o tempo gasto etc.

Vejamos um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Um carro percorre uma distância em 2h com velocidade constante de 100km/h. A mesma distância é percorrida em 4h se a velocidade for de 50km/h.

Grandeza	Grandeza distância
2h	100km
4h	50km
...	...

Nesse caso, conforme a grandeza tempo aumenta, a grandeza velocidade diminui na mesma proporção, ou seja, as grandezas são inversamente proporcionais.

A proporção correspondente é a igualdade da primeira razão ($2/4$) com o **inverso** da 2ª razão (100/50):

$$\frac{2}{4}=\frac{50}{100}$$

Que também é escrita da forma: $\frac{2}{\frac{1}{100}}=\frac{4}{\frac{1}{50}}=\frac{8}{\frac{1}{25}}$

Portanto, duas sucessões de números ou grandezas *(a, b, c, ...) e (a’, b’, c’, ...)* são inversamente proporcionais se uma for proporcional aos inversos dos termos da outra. Isto é:

$$\frac{a}{\frac{1}{a'}}=\frac{b}{\frac{1}{b'}}=\frac{c}{\frac{1}{c'}}=\ldots=k$$

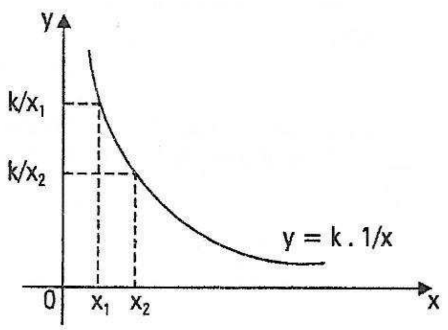
a . a’ = b . b’ = c . c’ = ... = k (constante de proporcionalidade)

Como exemplo também podemos citar o volume ocupado por uma certa massa de gás e a **pressão** que ele suporta; dentre outros exemplos em física.

A "função" que expressa duas grandezas variáveis inversamente proporcionais é do tipo:

$y = k.\frac{1}{x} \Leftrightarrow x.y = k \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{1}{y}} = k,$ *onde k é a constante de proporcionalidade* ($k \in \mathbb{R}^*$)

E o gráfico no plano cartesiano é um ramo da hipérbole, ou seja:



Vejamos a mais um exemplo bem prático do que acabamos de verificar!

Dividir 235 em três partes inversamente proporcionais a 3, 4 e 5.

Sejam x, y e z, as três partes, então $x + y + z = 235$ e $\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{5}}$.

Assim, temos:

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{5}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} = \frac{235}{\frac{47}{60}} = 300$$

$x = \frac{1}{3} \cdot 300 = 100$, $y = \frac{1}{4} \cdot 300 = 75$ e $z = \frac{1}{5} \cdot 300 = 60$

3 - DIVISÃO PROPORCIONAL

Do capítulo anterior sabemos que:

Duas sucessões de número ou grandezas (a, b, c ,...) e (a', b', c', ...) são ditas:

- Diretamente proporcionais, quando:

$$\left\{ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots = k \right.$$

- Inversamente proporcionais, quando:

$$\left\{ \frac{a}{\frac{1}{a'}} = \frac{b}{\frac{1}{b'}} = \frac{c}{\frac{1}{c'}} = \ldots = k \right. \qquad \text{ou} \qquad a.a' = b.b' = c.c' = \ldots = k$$

Onde k é a constante ou coeficiente ou fator de proporcionalidade.

Perceba, por exemplo que: as sucessões (1, 2, 3) e (2, 4, 6) são diretamente proporcionais, pois, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$. Enquanto (2, 3, 6) e (6, 4, 2) são inversamente proporcionais, pois 2 .6 = 3 . 4 = 6 . 2

✓ **<u>Divisão diretamente proporcional</u>**

Dividir o número ou uma grandeza N em partes diretamente proporcionais a vários números dados a, b, c, ..., é determinar os valores de x, y, z ..., cuja soma seja igual ao número N.

Da proporção contínua: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$=..., desde que x + y + z + ... = N, teremos:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \ldots = \frac{x + y + z + \ldots}{a + b + c + \ldots}$$

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=...=\frac{N}{a+b+c+...}$$

Para calcular x, y, z, ..., podemos escrever:

$$\begin{cases} x=\dfrac{N}{a+b+c+...}.a \\ y=\dfrac{N}{a+b+c}.b \\ z=\dfrac{N}{a+b+c}.c \end{cases}$$

QUESTÕES COMENTADAS

(Exercício Modelo)

21. Dividir o número 280 em partes diretamente proporcionais aos números 2, 5 e 7

Comentário:

As sucessões (x, y, z) e (2, 5, 7) são diretamente proporcionais, logo:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}=\frac{x+y+z}{2+5+7}=\frac{280}{14}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}=20$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = 20 \therefore x = 40 \\ \dfrac{y}{5} = 20 \therefore y = 100 \\ \dfrac{y}{7} = 20 \therefore z = 140 \end{cases}$$

Gabarito: x=40, y=100, z=140

(Exercício Modelo)

22. Paulo e Roberto apostaram R$ 15,00 e R$ 25,00 num sorteio da loteria. Faça a divisão correta, sabendo que o prêmio foi de R$ 300.000,00

Comentário:

Sendo x e y as quantias que Paulo e Roberto devem receber, respectivamente, temos que:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{25} = \frac{x+y}{15+25} = \frac{30.000}{40}$$

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{25} = 7500$$

$$\begin{cases} x = 15.7500 \therefore x = 112.500,00 \\ y = 25.7500 \therefore y = 187.500,00 \end{cases}$$

Gabarito: x = 112.500,00 e y = 187.500,00

Ufa....quanta coisa, não? Sigamos em frente! Sem desanimar.

✓ **Divisão inversamente proporcional**

No caso de querermos dividir o número N em partes inversamente proporcionais a a, b, c,...,

isto é $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c},...,$ cuja soma $x+y+z+...$ seja igual a N

Da proporção contínua $\frac{x}{\frac{1}{a}}=\frac{y}{\frac{1}{b}}=\frac{a}{\frac{1}{c}}=...$ desde que x + y + z + ... = N, teremos

$$\frac{x}{\frac{1}{a}}=\frac{y}{\frac{1}{b}}=\frac{z}{\frac{1}{c}}=...=\frac{x+y+z+...}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+...}$$

$$\frac{x}{\frac{1}{a}}=\frac{y}{\frac{1}{b}}=\frac{z}{\frac{1}{c}}=...=\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+...}$$

Para calcular x, y, z, ..., podemos escrever:

$$\begin{cases} x=\dfrac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+...}.\dfrac{1}{a} \\ y=\dfrac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+...}.\dfrac{1}{b} \\ z=\dfrac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+...}.\dfrac{1}{c} \end{cases}$$

QUESTÕES COMENTADAS

(Exercício Modelo)

23. Dividir o número 3.850 em partes inversamente proporcionais a 2, 3, 4 e 5

Comentário:

As sucessões (x, y, z, w) e (2, 3, 4, 5) são inversamente proporcionais, logo:

$$2x = 3y = 4z = 5w$$

Dividindo todos os termos pelo MMC (2, 3, 4, 5) = 60, obtemos:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{30} = 50 \therefore x = 1500 \\ \dfrac{y}{20} = 50 \therefore y = 1000 \\ \dfrac{z}{15} = 50 \therefore z = 750 \\ \dfrac{w}{12} = 50 \therefore w = 600 \end{cases}$$

Gabarito: x=1500, y=1000, z=750 e w=600

(Exercício Modelo)

24. João e José trabalharam um ano inteiro como sócios. Sabendo que João tirou três meses de férias e José 4 meses, efetue a divisão correta do lucro total obtido de R$ 36000,00

Comentário:

Sendo x e y quantias que João e José devem receber, respectivamente, teremos:

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 3x = 4y$$

Dividindo todos os termos pelo MMC (3,4) = 12

$$\text{Teremos } \frac{x}{4} = \frac{y}{3}$$

(Dica: Poderíamos simplesmente multiplicar em cruz)

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{x+y}{7} = \frac{36000}{7}$$

Portanto,

$$\begin{cases} x = 4.\dfrac{36000}{7} \therefore x = 20.571,47 \\ x = 3.\dfrac{36000}{7} \therefore y = 15.428,57 \end{cases}$$

Gabarito: x = R$20.571,47 e y = R$15.428,56

- ✓ **Divisão proporcional composta**

Diremos que a divisão proporcional é composta quando a grandeza (ou número) N for proporcional (direta ou inversamente) a duas ou mais grandezas (ou números) simultaneamente.

(Exercício Modelo)

25. Dividir o número 23,5 em três partes simultaneamente proporcionais às sucessões (5, 3, 2) e (4, 7, 3)

Comentário:

A divisão proporcional às duas sucessões será proporcional ao produto dos elementos correspondentes, isto é:

$$\frac{x}{5.4}=\frac{y}{3.7}=\frac{z}{2.3}=\frac{x+y+z}{40+21+6}=\frac{23,5}{47}=0,5$$

Logo

$$\begin{cases}\frac{x}{20}=0,5 \therefore x=10\\ \frac{y}{21}=0,5 \therefore y=10,5\\ \frac{z}{6}=0,5 \therefore z=3\end{cases}$$

Gabarito: *x*=10; y=10,5 e z=3.

(Exercício Modelo)

26. Dois técnicos receberam juntos a quantia de R$ 8.680,00. O primeiro trabalhou 20 dias à razão de 8 horas por dia; o segundo 30 dias, à razão de 4 horas por dia. Quanto receberá cada um?

Comentário:

Sendo x e y as quantias correspondentes ao 1º e ao 2º técnico, respectivamente, temos:

$$\frac{x}{20.8}=\frac{y}{30.4}=\frac{x+y}{160+120}=\frac{8.680}{280}$$

$$\frac{x}{160}=\frac{y}{120}=31$$

Logo

$$\begin{cases}\frac{x}{160}=31 \therefore x=4960\\ \frac{y}{120}=31 \therefore y=3720\end{cases}$$

Gabarito: x=R$ 4960,00 e y=R$ 3.720,00

(Exercício Modelo)

27. Dividir 3.400 em duas partes que sejam ao mesmo tempo, diretamente proporcionais a 4 e 10 e inversamente proporcionais a 8 e 14.

Comentário:

Sendo x a 1ª parte e y a 2ª parte, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4.\dfrac{1}{8}} = \dfrac{y}{10.\dfrac{1}{4}} \\ x + y = 3400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{y}{\dfrac{5}{7}} = \dfrac{x+y}{\dfrac{17}{14}} \\ x + y = 3400 \end{cases}$$

Donde se conclui que:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = 2800 \Rightarrow x = 1400$$

$$\frac{y}{\frac{5}{7}} = 2800 \Rightarrow y = 2000$$

Gabarito: x=*1400 e y=2000*

Antes de terminar nossa aula, irei abordar dois pontos fundamentais relacionados a este tópico: divisão proporcional. Espero que estejam gostando do conteúdo. Sem mais delongas, vamos ao que interessa?

5 – TORNEIRAS E MISTURAS

1 - PROBLEMAS TIPO TORNEIRA

São aqueles em que são abordadas as relações entre os tempos que cada torneira demora a encher um recipiente e o tempo que elas demorariam para enchê-lo juntas.

Para resolver esse tipo de problema, deve-se calcular quanto do recipiente cada torneira enche na unidade de tempo (vazão). A soma desses valores será o que as torneiras juntas encherão na unidade de tempo. Para finalizar, basta observar que essa soma multiplicada pelo tempo tem como resultado o volume do recipiente.

TOME NOTA!

Algumas variações desse problema apresentam um ralo. Nesse caso deve-se subtrair o quanto o ralo esvazia o recipiente na unidade de tempo.

TOME NOTA!

Problemas que envolvem trabalhadores realizando determinada tarefa simultaneamente também podem ser resolvidos pelo mesmo método.

Uma torneira sozinha enche um tanque em 2 horas e outra também sozinha enche o mesmo tanque em 3 horas. Quanto tempo as duas torneiras juntas levam para encher o tanque?

Deve-se observar que em 1 hora a primeira torneira sozinha enche $\frac{1}{2}$ do tanque e a segunda $\frac{1}{3}$ do tanque.

Logo, as duas torneiras juntas, em 1 hora, encherão $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$ do tanque. Assim, temos:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{6}{5} = 1h\,12min$$

2- MISTURAS

Problemas de misturas abordam a relação entre as concentrações dos componentes nas misturas originais e, após sua reunião, as concentrações na mistura resultante.

A fim de resolver esses problemas, basta calcular a massa ou volume de cada um dos componentes nas misturas originais e somá-los para obter a quantidade de cada componente na mistura resultante. Com essa informação, pode-se calcular que percentual cada componente representa na mistura resultante. A seguir, vamos analisar algumas situações exemplificativas.

Misturando-se x gramas da substância A com y gramas da substância B, obtém-se uma mistura com $\frac{x}{x+y}\cdot 100\%$ da substância A e $\frac{y}{x+y}\cdot 100\%$ da substância B.

Misturando-se p gramas de uma mistura que contém $x\%$ da substância A com q gramas de uma mistura que contém $y\%$ da substância A, obtém-se uma nova mistura com $\frac{p\cdot x+q\cdot y}{p+q}\%$ da substância A, ou seja, a concentração de A na nova mistura é a média aritmética ponderada das concentrações tendo as massas como pesos.

Isso ocorre porque a primeira mistura contém $p\cdot\frac{x}{100}$ gramas de A e a segunda mistura contém $q\cdot\frac{y}{100}$ gramas de A, portanto a mistura resultante contém $\frac{p\cdot x+q\cdot y}{100}$ gramas de A em uma massa total de $(p+q)$ gramas.

Tem-se 500 ml de soro glicosado a 5%. Quando se acrescentam 10 (dez) ampolas de 10 ml cada de glicose a 23%, a concentração do volume final do soro glicosado será:

(A) 6%

(B) 6,3%

(C) 7,0%

(D) 7,3%

(E) 8,0%

Veremos como resolver este tipo de questão!

Em $500\,\text{ml}$ de soro glicosado a 5%, há $5\% \cdot 500 = \frac{5}{100} \cdot 500 = 25\,\text{ml}$ de glicose.

Em 10 ampolas de $10\,\text{ml}$ de glicose a 23%, há $23\% \cdot 100 = \frac{23}{100} \cdot 100 = 23\,\text{ml}$ de glicose.

No soro glicosado resultante, o volume total é $500 + 100 = 600\,\text{ml}$ e o volume de glicose é $25 + 23 = 48\,\text{ml}$. Assim, a sua concentração é $\frac{48}{600} = 8\%$.

Note que a concentração da mistura é a **média aritmética ponderada** das concentrações dos componentes, sendo os volumes dos componentes os pesos. Assim, o problema poderia ser resolvido diretamente como segue: $\frac{500 \cdot 5\% + 100 \cdot 23\%}{500 + 100} = \frac{25 + 23}{600} = 8\%$.

Gabarito: E

QUESTÕES COMENTADAS

28. Dois trabalhadores podem fazer um trabalho em 15 e 16 dias, respectivamente, trabalhando sós. Com o auxílio de um terceiro podem fazê-lo em 6 dias. Em quanto tempo o terceiro trabalhador pode fazer o serviço, trabalhando só?

Comentário:

1º trabalhador realiza $\frac{1}{15}$ do trabalho em 1 dia

2º trabalhador realiza $\frac{1}{16}$ do trabalho em 1 dia

3º trabalhador realiza $\frac{1}{d}$ do trabalho em 1 dia

Se os três trabalhadores estão trabalhando juntos, temos:

$$\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{d}\right)\cdot 6=1 \Leftrightarrow \frac{1}{d}=\frac{9}{240} \Leftrightarrow d=26\frac{2}{3}\text{dia}$$

Gabarito: $26\frac{2}{3}\text{dias}$

29. Uma torneira aberta só enche um tanque em 5 horas e outra, igualmente só, o enche em 6 horas. Por outro lado um ralo aberto esvazia o mesmo tanque em 10 horas. Estando o tanque, inicialmente, vazio, e abertas as duas torneiras e o ralo, em quanto tempo o tanque estará cheio?

Comentário:

1ª torneira enche $\frac{1}{5}$ do tanque em 1 hora

2ª torneira enche $\frac{1}{6}$ do tanque em 1 hora

Ralo esvazia $\frac{1}{10}$ do tanque em 1 hora

Se as duas torneiras e o ralo estão abertos, temos:

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)\cdot t=1 \Leftrightarrow t=\frac{30}{8}=3\text{horas}45\text{min}$$

Gabarito: 3h 45 min

30. (ESA 88) Dividindo-se 580 em partes diretamente proporcionais a 7, 10 e 12, obtém-se:

a) 100, 220 e 26

b) 140, 200 e 240

c) 120, 220 e 240

d) 150, 200 e 230

e) 70, 100 e 120

Comentários:

Sabemos que as partes são diretamente proporcionais, então:

$$\frac{a}{7}=k;\frac{b}{10}=k;\frac{c}{12}=k$$
$$a=7k;b=10k;c=12k$$
$$a+b+c=580$$
$$7k+10k+12k=580$$
$$29k=580$$
$$k=20$$

Assim,

$$a=7k=7.20=140$$
$$b=10.k=10.20=200$$
$$c=12.k=12.20=240$$

Gabarito: B

---

31. (ESA 94) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180 graus. Num triângulo, as medidas desses ângulos são diretamente proporcionais aos números 3, 4 e 2, respectivamente. Então, os ângulos desse triângulo medem, em graus:

a) 100, 50 e 30

b) 60, 70 e 50

c) 60, 80 e 40

d) 60, 90 e 30

e) 50, 90 e 40

Comentários:

Sabemos que as partes são diretamente proporcionais, então:

$$a+b+c=180$$
$$3k+4k+2k=180$$
$$9k=180$$
$$k=20$$
$$a=3k=3.20=60$$
$$b=4.k=4.20=80$$
$$c=2.k=2.20=40$$

Gabarito: C

(Exercício Modelo)

32. Um casal tem dois filhos, Cláudio e Marisa. A razão entre as idades do pai e do filho e a razão entre as idades da mãe e da filha são proporcionais. Sendo a idade do pai 48, da mãe 42 e do filho 18 anos, a idade de Marisa está entre

a) 12 e 13 anos.

b) 13 e 14 anos.

c) 14 e 15 anos.

d) 15 e 16 anos.

e) 16 e 17 anos.

Comentários:

Como de costume, iremos destacar cada dado do enunciado, para que possamos modelar a questão da melhor forma.

- ✓ **A razão da idade do Pai está para a do Filho assim como: 48/18.**
- ✓ **Idade da mãe: 42 anos**
- ✓ **Idade de Marisa: M**
- ✓ **Razões são iguais, logo formam uma proporção.**

Assim,

$$48/18 = 42/m$$

$$48.m = 18.42$$

$$8.m = 3.42$$

$$4m = 3.21$$

$$m = 15{,}75.$$

Logo, a idade de Marisa está entre 15 e 16.

Gabarito: D

(Exercício Modelo)

33. Em um terminal de autoatendimento bancário há apenas cédulas de R$ 10,00, R$ 20,00 e R$ 50,00.

As quantidades de cada um dos três tipos de cédula na máquina são inversamente proporcionais aos seus valores.

Se há 272 cédulas ao todo, então a quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

a) R$ 3.600,00;

b) R$ 3.960,00;

c) R$ 4.050,00;

d) R$ 4.240,00;

e) R$ 4.800,00.

Comentários:

Como de costume, iremos destacar cada dado do enunciado, para que possamos modelar a questão da melhor forma.

- ✓ Quantidade de 10,00: A
- ✓ Quantidade de 20,00: B
- ✓ Quantidade de 50,00: C

Como as quantidades são inversamente, temos que:

$$10.A = 20.B = 50.C = K \text{ (constante de proporcionalidade)}$$

Desta forma,

$$A = 0{,}1.K$$

$$B = 0{,}05.K$$

$$C = 0{,}02.K$$

Como temos 272 cédulas, então: A + B + C = 272.

Fazendo as trocas de variáveis, ficamos com:

$$0{,}1.k + 0{,}05.k + 0{,}02 = 272$$

$$0{,}17.k = 272$$

$$K = 1600$$

O valor monetário será: 10.A + 20.B + 50.C. Como: 10.A = 20.B = 50.C = K, então:

$$K + k + k = 3.k = 3.\ (1600) = 4.800{,}00$$

Gabarito: E

(Exercício Modelo)

34. A soma de x com 10 está para 3, assim como a diferença entre 15 e x está para 2. O valor de x é

a) 4.

b) 5.

c) 6.

d) 7.

e) 10.

Comentários:

A questão é bem direta. Assim, iremos partir direto para sua resolução.

$$(X+ 10)/3 \quad = \quad (15 - x)/2$$

Multiplicando cruzado, ficamos com:

$$2\,(x + 10) = 3\,(15 - x)$$

$$2x + 20 = 45 - 3x$$

$$5x = 25$$

$$X = 5$$

Gabarito: B

(Exercício Modelo)

35. José Souza, Paulo Almeida e Claudio Prinot são três funcionários que têm que realizar, no total para os três, 72 tarefas diariamente. Cada dia eles escolhem um critério diferente para repartir as tarefas. Por exemplo, no dia de ontem eles decidiram que as 72 tarefas seriam divididas entre eles diretamente proporcional às consoantes do sobrenome de cada um. Sendo assim, ontem Paulo Almeida teve que realizar o total de tarefas igual a

a) 15.

b) 12.

c) 18.

d) 9.

e) 24.

Comentários:

Como de costume, iremos destacar cada dado do enunciado, para que possamos modelar a questão da melhor forma.

Seja "k" a constante de proporcionalidade ente o número de tarefas e o número de consoantes do sobrenome: tarefas =k× consoantes

- ✓ O sobrenome de José Souza tem 2 consoantes, portanto, José realizou "2k" tarefas.
- ✓ O sobrenome de Paulo Almeida tem 3 consoantes, portanto, Paulo realizou "3k" tarefas.

- ✓ O sobrenome de Claudio Prinot tem 4 consoantes, portanto, Claudio realizou "4k" tarefas.

No total, eles realizaram 72 tarefas: 2k+3k+4k=72

Resolvemos a equação: 9k=72→k=8

Paulo realizou: 3k = 3×8=24 tarefas.

Gabarito: E

(Exercício Modelo)

36. José tem três filhas, Ana de 15 anos, Alice de 20 anos e Andressa de 25 anos. José pretende dividir R$ 3.000,00 para as três filhas em valores proporcionais às suas idades. Nessas condições, o valor que Ana deve receber é:

a) R$ 1.000,00

b) R$ 1.250,00

c) R$ 750,00

d) R$ 850,00

e) R$ 900,00

Comentários:

Seja "k" a constante de proporcionalidade entre o valor a receber e a idade: valor a receber =k . idade

- ✓ Como Ana tem 15 anos, irá receber "15k".
- ✓ Alice tem 20 anos e irá receber "20k".
- ✓ Andressa tem 25 anos e irá receber "25k".

Elas receberão um total de 3.000 reais: 15k+20k+25k=3.000

60k=3.000

k=50

Ana irá receber: 15k = 15×50=750 reais.

Gabarito: C

(Exercício Modelo)

37. A grandeza G é diretamente proporcional à grandeza A e inversamente proporcional à grandeza B. Sabe-se que quando o valor de A é o dobro do valor de B, o valor de G é 10.

Quando A vale 144 e B vale 40, o valor de G é:

a) 15;

b) 16;

c) 18;

d) 20;

e) 24

Comentários:

Foi dito que G é diretamente proporcional a "A" e inversamente proporcional a "B". Logo, a relação entre elas é do tipo:

G=k×A/B ; em que "k" é uma constante de proporcionalidade.

Quando A vale o dobro de B, G vale 10. Ou seja:

$$10=k\times 2B/B$$

$$k=10/2$$

$$k=5$$

Em seguida, numa segunda situação, o valor de A passou a ser 144, o de B passou a 40. Vamos calcular G:

$$G=k\times A/B$$

$$G=5\times 144/40$$

$$G=144/8$$

$$G=18$$

Gabarito: C

(Exercício Modelo)

38. Um cartão de banco mede 5,0 cm de largura por 8,5 cm de comprimento. A razão entre a largura e o comprimento dele é da ordem de 1 para

a) 1,35.

b) 1,55.

c) 1,65.

d) 1,70.

e) 1,85.

Comentários:

Questão bem direta. Vamos a ela!

A razão (quociente) entre a largura e o comprimento é igual a:

5/8,5

Vamos simplificar o numerador e o denominador por 5:

1/1,7

Vimos que a relação entre a largura e o comprimento é de 1 para 1,7.

Em outras palavras, a divisão da largura com o comprimento é igual a 1 dividido por 1,7.

Gabarito: D

(Exercício Modelo)

39. Observando a relação y=1/9x, com x e y estritamente positivos, é correto concluir que

a) x e y são quantidades diretamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 9.

b) x e y são quantidades inversamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 9.

c) x e y são quantidades diretamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 1/9.

d) x e y são quantidades inversamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 1/9.

Comentários:

Quando duas grandezas "x" e "y" são inversamente proporcionais, a multiplicação entre elas é uma constante, que podemos chamar de "k".

$$x \times y = k$$

Essa constante "k" é a constante de proporcionalidade.

Na relação y=1/9x, vamos multiplicar os dois lados da equação por "x":

$$xy = 1/9$$

Veja que a multiplicação de x com y é uma constante que vale 1/9.

Portanto, x e y são grandezas inversamente proporcionais e 1/9 é a razão de proporcionalidade.

Gabarito: D

---

40. (CN) O combustível A é composto de uma mistura de 20% de álcool e 80% de gasolina. O combustível B é constituído exclusivamente de álcool. Um motorista quer encher completamente o tanque do seu carro com 50% de álcool e 50% de gasolina. Para alcançar o seu objetivo colocou x litros de A e y litros de B. A razão x/y é dada por:

a) 5/3

b) 3/5

c) 2/5

d) 5/2

e) 3/2

Comentário:

Numa mistura de x litros de A e y litros de B, a quantidade de álcool é:

$$0,2x + y.$$

Se o percentual de álcool nesse combustível é $50\% = \frac{1}{2}$, então:

$$\frac{0,2x+y}{x+y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0,4x + 2y = x + y \Leftrightarrow y = 0,6x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{0,6} = \frac{5}{3}.$$

Gabarito: A

Chegamos ao fim da nossa aula. Espero que tenha gostado. Lembro-vos que o fórum está à disposição para ser usado!! Pode me perturbar...será um prazer ajudá-lo

8 - LISTA DE QUESTÕES

LISTA DE QUESTÕES

01. Quais os três menores números pelos quais devem ser divididos os números 144, 192 e 272 para que os quocientes sejam iguais?

---

02. O MDC entre dois números A e B (A > B) é 18. Os quocientes obtidos pelo algoritmo de Euclides (divisões sucessivas) foram 1, 2, 2 e 3. A soma A + B vale:

---

03. O MDC entre A e B (A > B) é 24. Os quocientes encontrados pelo Algoritmo de Euclides são os menores possíveis. A diferença A – B vale:

---

04. Três turmas de uma escola apresentam 60, 72 e 84 alunos, respectivamente. Num dia de festa o diretor ordenou que formassem no pátio grupamentos de alunos da mesma turma e que cada grupamento tivesse o mesmo e o maior número possível de alunos. Quantos alunos deve ter cada grupamento e quantos são os grupamentos?

---

05. Uma linha telefônica vai ser instalada entre duas cidades. A estrada por onde deve passar a linha é dividida em dois trechos, formando em L. Um trecho mede 832m e o outro 876m. Devem-se colocar postes ao longo da estrada, guardando entre si a mesma distância, que deve ser a maior possível. Calcular o número de postes, sabendo-se que coloca um no ponto de encontro dos dois trechos da estrada e um em cada extremidade.

---

06. Determinar A e B (A > B) sabendo-se que A + B = 360 e MDC (A,B) = 72

---

07. O MDC entre dois números é 123. O maior é 738. Calcular o menor.

---

08. O menor número inteiro que dividido por 8, 15 e 18 deixa sempre resto 5 é:

---

09. Uma pessoa possui mais de R$6.000,00 e menos de R$ 7.000,00. Contando essa quantia de R$ 100,00 em R$ 100,00, de R$ 150,00 em R$ 150,00 ou de R$ 250,00 em R$ 250,00, verificou-se que sempre sobravam R$ 60,00 Quanto possui esta pessoa?

---

10. De um aeroporto partem aviões para São Paulo, Belo Horizonte, Porto Alegre e Brasília, respectivamente de 10 em 10, 20 em 20, de 25 em 25 e de 45 em 45 minutos. Tendo em uma ocasião partido todos no mesmo instante, pergunta-se: No fim de quanto tempo voltarão a partir juntos?

---

11. Duas rodas de engrenagem tem 48 e 54 dentes, respectivamente. Cada roda tem um dente estragado. Se num dado instante estão em contato os dentes estragados, esse encontro repetir-se-á novamente, quando a primeira roda que tem 48 dentes tiver dado x voltas. Qual o valor de x?

---

12. Determine o menor número dividido por 20 deixa resto 13, dividido por 24 deixa resto 17 e dividido por 30 deixa resto 23.

---

13. Determine x e y, respectivamente, sendo $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{2} \\ x.y = 160 \end{cases}$

---

14. Determine x e y, respectivamente, sendo $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3}$ e $x^2 + y^2 = 52$

---

15. Sendo $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5} \\ x.y.z = 1920 \end{cases}$, calcule os valores de x, y e z.

---

16. A diferença entre os consequentes de uma proporção é 2, e os antecedentes são 75 e 45. Ache os consequentes desta proporção.

---

17. (ESA 85) A idade de um pai somada com a de seu filho dá 45 anos. Sabendo-se que a idade do filho está para a idade do pai assim como 1 está para 4, podemos dizer que as idades são:

a) 9 e 36 anos

b) 8 e 32 anos

c) 8 e 37 anos

d) 6 e 39 anos

---

18. (ESA 87) Os preços de duas peças de fazenda estão entre si como 7 está para 8. Sabendo-se que o triplo do preço de uma menos o dobro do preço da outra vale R$ 50,00. Os preços dessas peças são:

a) R$ 60,00 e R$ 70,00

b) R$ 70,00 e R$ 80,00

c) R$ 30,00 e R$ 40,00

d) R$ 80,00 e R$ 90,00

e) R$ 50,00 e R$ 60,00

---

19. (ESA 91) Um atirador acerta, no alvo, 3(três) de cada 5(cinco) disparos que faz. Tendo feito uma série de 30 tiros, ele errou:

(A) 28

(B) 15

(C) 12

(D) 25

(E) 24

---

20. (ESA 91) Se a razão entre os números a e b, nesta ordem, é de 0,75; então a razão entre os números (a + b) e b é:

(A) 4/3

(B) 1/3

(C) 3/4

(D) 1,75

(E) 0,25

21. Dividir o número 280 em partes diretamente proporcionais aos números 2, 5 e 7

22. Paulo e Roberto apostaram R$ 15,00 e R$ 25,00 num sorteio da loteria. Faça a divisão correta, sabendo que o prêmio foi de R$ 300.000,00

23. Dividir o número 3.850 em partes inversamente proporcionais a 2, 3, 4 e 5

24. João e José trabalharam um ano inteiro como sócios. Sabendo que João tirou três meses de férias e José 4 meses, efetue a divisão correta do lucro total obtido de R$ 36000,00

25. Dividir o número 23,5 em três partes simultaneamente proporcionais às sucessões (5, 3, 2) e (4, 7, 3)

26. Dois técnicos receberam juntos a quantia de R$ 8.680,00. O primeiro trabalhou 20 dias à razão de 8 horas por dia; o segundo 30 dias, à razão de 4 horas por dia. Quanto receberá cada um?

27. Dividir 3.400 em duas partes que sejam ao mesmo tempo, diretamente proporcionais a 4 e 10 e inversamente proporcionais a 8 e 14.

28. Dois trabalhadores podem fazer um trabalho em 15 e 16 dias, respectivamente, trabalhando sós. Com o auxílio de um terceiro podem fazê-lo em 6 dias. Em quanto tempo o terceiro trabalhador pode fazer o serviço, trabalhando só?

29. Uma torneira aberta só enche um tanque em 5 horas e outra, igualmente só, o enche em 6 horas. Por outro lado um ralo aberto esvazia o mesmo tanque em 10 horas. Estando o tanque, inicialmente, vazio, e abertas as duas torneiras e o ralo, em quanto tempo o tanque estará cheio?

---

30. (ESA 88) Dividindo-se 580 em partes diretamente proporcionais a 7, 10 e 12, obtém-se:

a) 100, 220 e 26

b) 140, 200 e 240

c) 120, 220 e 240

d) 150, 200 e 230

e) 70, 100 e 120

---

31. (ESA 94) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180 graus. Num triângulo, as medidas desses ângulos são diretamente proporcionais aos números 3, 4 e 2, respectivamente. Então, os ângulos desse triângulo medem, em graus:

a) 100, 50 e 30

b) 60, 70 e 50

c) 60, 80 e 40

d) 60, 90 e 30

e) 50, 90 e 40

---

32. Um casal tem dois filhos, Cláudio e Marisa. A razão entre as idades do pai e do filho e a razão entre as idades da mãe e da filha são proporcionais. Sendo a idade do pai 48, da mãe 42 e do filho 18 anos, a idade de Marisa está entre

a) 12 e 13 anos.

b) 13 e 14 anos.

c) 14 e 15 anos.

d) 15 e 16 anos.

e) 16 e 17 anos.

---

33. Em um terminal de autoatendimento bancário há apenas cédulas de R$ 10,00, R$ 20,00 e R$ 50,00.

As quantidades de cada um dos três tipos de cédula na máquina são inversamente proporcionais aos seus valores.

Se há 272 cédulas ao todo, então a quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

a) R$ 3.600,00;

b) R$ 3.960,00;

c) R$ 4.050,00;

d) R$ 4.240,00;

e) R$ 4.800,00.

---

34. A soma de x com 10 está para 3, assim como a diferença entre 15 e x está para 2. O valor de x é

a) 4.

b) 5.

c) 6.

d) 7.

e) 10.

---

35. José Souza, Paulo Almeida e Claudio Prinot são três funcionários que têm que realizar, no total para os três, 72 tarefas diariamente. Cada dia eles escolhem um critério diferente para repartir as

tarefas. Por exemplo, no dia de ontem eles decidiram que as 72 tarefas seriam divididas entre eles diretamente proporcional às consoantes do sobrenome de cada um. Sendo assim, ontem Paulo Almeida teve que realizar o total de tarefas igual a

a) 15.

b) 12.

c) 18.

d) 9.

e) 24.

---

36. José tem três filhas, Ana de 15 anos, Alice de 20 anos e Andressa de 25 anos. José pretende dividir R$ 3.000,00 para as três filhas em valores proporcionais às suas idades. Nessas condições, o valor que Ana deve receber é:

a) R$ 1.000,00

b) R$ 1.250,00

c) R$ 750,00

d) R$ 850,00

e) R$ 900,00

---

37. A grandeza G é diretamente proporcional à grandeza A e inversamente proporcional à grandeza B. Sabe-se que quando o valor de A é o dobro do valor de B, o valor de G é 10.

Quando A vale 144 e B vale 40, o valor de G é:

a) 15;

b) 16;

c) 18;

d) 20;

e) 24

---

38. Um cartão de banco mede 5,0 cm de largura por 8,5 cm de comprimento. A razão entre a largura e o comprimento dele é da ordem de 1 para

a) 1,35.

b) 1,55.

c) 1,65.

d) 1,70.

e) 1,85.

---

39. Observando a relação y=1/9x, com x e y estritamente positivos, é correto concluir que

a) x e y são quantidades diretamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 9.

b) x e y são quantidades inversamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 9.

c) x e y são quantidades diretamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 1/9.

d) x e y são quantidades inversamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 1/9.

---

40. (CN) O combustível A é composto de uma mistura de 20% de álcool e 80% de gasolina. O combustível B é constituído exclusivamente de álcool. Um motorista quer encher completamente o tanque do seu carro com 50% de álcool e 50% de gasolina. Para alcançar o seu objetivo colocou x litros de A e y litros de B. A razão x/y é dada por:

a) 5/3

b) 3/5

c) 2/5

d) 5/2

e) 3/2

9- Gabarito

1) 9, 12,17

2) 738

3) A – B = 192 – 120 = 72

4) 12 alunos em cada grupamentos e 18 grupamentos

5) 30 postes

6) A = 216 e B = 144 ou A = 288 e B = 72

7) A = 5.124 = 615 ou B = 1123 = 123

8) 365

9) 6060

10) 15h

11) 9 voltas

12) 113

13) x = 20 e y = 8

14) x = 4 e y = 6

15) x = 8; y =12 e z = 20

16) x = 5 e y = 3

17) A

18) B

19) C

20) D

21) x = 40; y = 100; z = 140

22) x = 112500 ; y = 187500

23) x = 1500 ; y = 1000 ; z = 750

24) x = 20571,47 ; y = 15428,56

25) x = 10 ; y = 10,5 e z =3

26) x = 4960 ; y = 3720

27) x = 1400 ; y = 2000

28) $26\frac{2}{3}$ dias

29)3h45min

30) B

31) C

32) D

33) E

34) B

35) E

36) C

37) C

38) D

39) D

40) A

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1 Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2 Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3 Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4 Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5 Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6 Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7 Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8 O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.