etrônico

Aul

Matemática II p/ Colégio Naval - Com videoaulas - Pós-Edital

Professor: Ismael de Paula dos Santos, Italo Marinho Sá Barreto

Aula 00: Números naturais; divisibilidade, multiplicidade, MDC e MMC

Antes de iniciarmos o nosso curso, vamos a alguns AVISOS IMPORTANTES:

1) Com o objetivo de ***otimizar os seus estudos***, você encontrará, em ***nossa plataforma (Área do aluno)***, alguns recursos que irão auxiliar bastante a sua aprendizagem, tais como ***"Resumos", "Slides"*** e ***"Mapas Mentais"*** dos conteúdos mais importantes desse curso. Essas ferramentas de aprendizagem irão te auxiliar a perceber aqueles tópicos da matéria que você precisa dominar, que você não pode ir para a prova sem ler.

2) Em nossa Plataforma, procure pela ***Trilha Estratégica e Monitoria*** da sua respectiva área/concurso alvo. A Trilha Estratégica é elaborada pela nossa equipe do *Coaching*. Ela irá te indicar qual é exatamente o ***melhor caminho*** a ser seguido em seus estudos e vai te ajudar a ***responder as seguintes perguntas***:

    - Qual a melhor ordem para estudar as aulas? Quais são os assuntos mais importantes?
    - Qual a melhor ordem de estudo das diferentes matérias? Por onde eu começo?
    - *"Estou sem tempo e o concurso está próximo!"* Posso estudar apenas algumas partes do curso? O que priorizar?
    - O que fazer a cada sessão de estudo? Quais assuntos revisar e quando devo revisá-los?
    - A quais questões deve ser dada prioridade? Quais simulados devo resolver?
    - Quais são os trechos mais importantes da legislação?

3) Procure, nas instruções iniciais da "Monitoria", pelo Link da nossa ***"Comunidade de Alunos"*** no Telegram da sua área / concurso alvo. Essa comunidade é ***exclusiva*** para os nossos assinantes e será utilizada para orientá-los melhor sobre a utilização da nossa Trilha Estratégica. As melhores dúvidas apresentadas nas transmissões da ***"Monitoria"*** também serão respondidas na nossa ***Comunidade de Alunos*** do Telegram.

    (*) O Telegram foi escolhido por ser a única plataforma que preserva a intimidade dos assinantes e que, além disso, tem recursos tecnológicos compatíveis com os objetivos da nossa Comunidade de Alunos.

Sumário

Olá estimado aluno. É um prazer tê-lo conosco neste novo trajeto para o aprendizado da matemática! Sou o professor **Italo Marinho**, formado em matemática pela UERJ; atuo no ensino de matemática e física no estado do Rio de Janeiro há 12 anos com enfoque em concursos militares. Me especializei na produção de materiais didáticos dentro do mesmo enfoque.

A matemática é uma ciência constante. Galera, ela não muda. É sempre a mesma. Sabem o que, de fato, muda? Nossa perspectiva. Nosso objetivo aqui é fazer **você** mudar a forma de ver a matemática.

Pode ter a certeza de que a abordagem a ser tomada aqui é diferente de qualquer experiência negativa que você, estudante, possa ter vindo a ter no decorrer de sua vida de estudos. A aeronáutica cobra elementos padronizados em suas provas. Pretendo fazer você visualizar esse padrão e, a partir de muita prática, alcançar seus objetivos. Sem mais delongas, vamos ao que interessa!

Fizemos uma divisão bastante precisa de edital para você, aluno. Separamos a matemática em três grandes partes. A matemática I, a matemática II (rainha da matemática, a aritmética) e a matemática III. Esse livro eletrônico tratará, claro, de aritmética. Mas de aritmética para concursos militares, que tem um enfoque bastante específico. Antes de você começar a ler esse material, gostaria de fazer algumas ressalvas. Nesse material você encontrará muitas questões, sendo muitas delas do CN. Essas questões constituem TODAS as questões que já caíram naquele referido concurso. As outras são questões diversas que julgo importantes você aprender. E sabe o porquê ter menos do CN e mais das outras? É porque não há tantas questões assim divulgadas. Então, cabe a você, estudante, confiar nas reuniões feitas aqui e acreditar na experiência que tenho em sala de aula para identificar os pontos mais baixos de um aluno que almeja a carreira militar. Faça todos os exercícios independente de ser ou não do CN. Aritmética se aprende assim. Então, vamos lá!

CRONOGRAMA DE AULAS

DISPONÍVEL	*CONTEÚDO*
Aula 00	*Operações Fundamentais: adição, subtração, multiplicação, divisão e valor absoluto de números inteiros; Números Primos: decomposição em fatores primos, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum e suas propriedades*
Aula 01	*Frações Ordinárias: ideias de fração, comparação, simplificação, as quatro operações fundamentais e redução ao mesmo denominador; Frações Decimais: noção de fração e de número decimal, operações fundamentais, conversão de fração ordinária em decimal e vice-versa, e as dízimas periódicas e suas geratrizes; Sistema Métrico: unidades legais de comprimento, área, volume, ângulo, tempo, velocidade, massa, operações fundamentais, múltiplo e submúltiplo;*
Aula 02	*Potências e raízes: definições, operações em potências, extração da raiz quadrada, potências e raízes de frações, potências de expoentes inteiros e fracionários, e regras de aproximação no cálculo de uma raiz*
Aula 03	*Revisional Estratégico*
Aula 04	*Razões e Proporções: razão de duas grandezas, proporção e suas propriedades, escala, divisão em partes direta e inversamente proporcionais,*
Aula 05	*Congruência modular e função de Euler*
Aula 06	*Cálculo de médias.*
Aula 07	*Regras de três simples e composta, porcentagem e juros simples,*
Aula 08	*Revisional Estratégico*

1.0– Números naturais ($\mathbb{N}$) e números inteiros ($\mathbb{Z}$)

1.1– Operações fundamentais e divisibilidade

Bom, agora entrarmos no estudo dos números naturais, obviamente escritos de acordo com o nosso sistema indo-arábico de escrita.

Mas então: o que vem a ser um número natural?

Números naturais são números relacionados à *contagem*. Contar foi o primeiro critério de *organização* utilizado pelo ser humano. Grupos de caça e pesca eram reunidos em números e quantidades específicas, unidades de alimentação, primórdios de contabilidade, etc.

Falemos um pouco sobre os números naturais, analisando suas propriedades de modo completo. Muita atenção nessas propriedades, e não se enfoque muito nos nomes. Eles são importantes sim, claro, mas não são o mais importante.

Sim, coruja! Muito importante. Muito mesmo! O que eu falei que não era tão importante era quanto ao nome. Mas quanto às propriedades em si, muito importantes! Saber essas propriedades é o que fará a diferença na hora de "será que eu posso fazer esse corte, será que eu posso fazer a distributiva?" Então, foque bastante na hora de estudar essa parte. Vamos lá? Preparado, estudante? Preparada, coruja? Então vamos juntos!

Propriedades aditivas dos números naturais

Os números naturais, como já dito, são números relacionados à contagem. Os números $1, 45, 119$ são, por exemplo, números naturais. Antes porém de fazermos qualquer tipo de análise, aqui vai um fato importante. Não há convergência de autores nem de bibliografia em se o número *zero* é ou não é natural. Há autores que dizem que é, há autores que dizem que não. Mas o mais correto é dizer que: *não há acordo comum*. Portanto, discutir se zero é ou não natural é discutir em torno de um tema fadado ao desacordo mesmo. Porém: algumas provas militares já fizeram a deslealdade de cobrar do estudante exercícios que só poderiam vi a serem feitos caso houvesse um ultimato em se o zero seja ou não natural. Nessas circunstâncias, segue aqui o meu conselho: se lhe for questionado ou se lhe for necessário escolher entre o zero ser ou não um número natural, prefira escolher que **sim**, é natural. Não porque o seja, de fato. Mas porque estatisticamente é mais provável que a sua prova assim adote. Doravante, salvo exceções, considerarei que o zero faz parte dos naturais, mas que fique sempre claro que não há convergência mútua de autores quanto a esse dilema.

Falemos então das propriedades que cercam os números naturais. Para todas as propriedades a seguir, adotarei $a, b, c \in \mathbb{N}$, isto é, a, b e c são números naturais. Veremos a seguir todas as propriedades referentes à adição de naturais.

- *Comutatividade da adição:* A adição de naturais é comutativa. O que isso significa? Significa que somar 2 e 3 resulta no mesmo que se somássemos 3 e 2, isto é, $2 + 3 = 3 + 2$. Em geral, temos $a + b = b + a$.

- *Existência de elemento neutro da adição:* Essa propriedade torna-se verdadeira a partir do momento em que se considera o número zero como um número natural. Trata-se do fato de que "somar zero a um número natural" sempre resultará no próprio número natural. Algebricamente: $a + 0 = a$.

- *Associatividade da adição:* A adição de naturais é associativa. O que quer dizer isso? Bom. Suponha que você, estudante, deseje efetuar a seguinte soma: $2 + 3 + 6$. E aí? Qual a ordem correta para que essa soma seja feita? Suponha que efetuemos primeiro a soma $2 + 3$. Ora, ela vale 5. Logo $2+3+6$ transformar-se-á em $5+6$ que vale, claro, 11. Mas o que aconteceria caso tivéssemos efetuado $3 + 6$ primeiro? Vejamos. Veja que $3 + 6$ vale 9. Logo, $2 + 3 + 6 = 2 + 9$. E veja que $2 + 9$ é, de fato, 11. Portanto, a ordem das somas não altera o resultado final[1]. Isso é o que significa dizer que a soma de naturais é associativa. Algebricamente escreve-se: $(a + b) + c = a + (b + c)$, sendo os parênteses indicadores de quais operações são feitas primeiro.

- *Fechamento dos números naturais quanto à adição:* Dizer que o conjunto dos números naturais é fechado quanto à adição significa dizer que a soma de dois números naturais é, também, um número natural. Então se $a + b = c$, e a e b são números naturais, então c, resultado da soma dos dois, também sê-lo-á.

Quando somamos dois números, sabia que tanto os números quanto o resultado recebem nomes especiais? Quando somamos a e b resultando em um número c, saiba sempre que a e b são chamados de parcelas (ou termos) e c é chamado de soma (ou total).

[1] Na verdade mesmo, isso não prova nada. Apenas verifica para os números escolhidos. Acontece que para conseguirmos demonstrar essas propriedades precisaríamos conhecer axiomas conhecidos como *os axiomas de Peano*, que não nos convém aqui.

Essas são as propriedades básicas referentes à adição de naturais. Vejamos a seguir a definição de sucessor e, em seguida, falamos sobre a multiplicação de naturais. Estudante, agora é ter calma, paciência e ir revendo nossa estrutura de ensino. Use e abuse de nosso fórum para que você retire as suas dúvidas.

Sucessor de um número

Dá-se o nome de o *sucessor* de um número n (natural ou inteiro, como veremos) ao número $n+1$. Trata-se do consequente imediato de n, isto é, o número seguinte na ordem de contagem. O sucessor de 38 é, por exemplo, o natural 39.

Paridades

Números naturais e inteiros têm um bocado de classificações. Um monte mesmo. Aqui venho a esclarecer o que, por enquanto, chamaremos de números *pares* e *ímpares*. Vejamos.

Um número será dito *par* quando seu algarismo das unidades for um dos seguintes algarismos: $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Portanto, 174 será considerado um número par porque seu algarismo das unidades é o 4.

Um número será dito *ímpar* quando seu algarismo das unidades for um dos seguintes algarismos: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Portanto, 245 será considerado um número ímpar, pois seu algarismo das unidades é o 5.

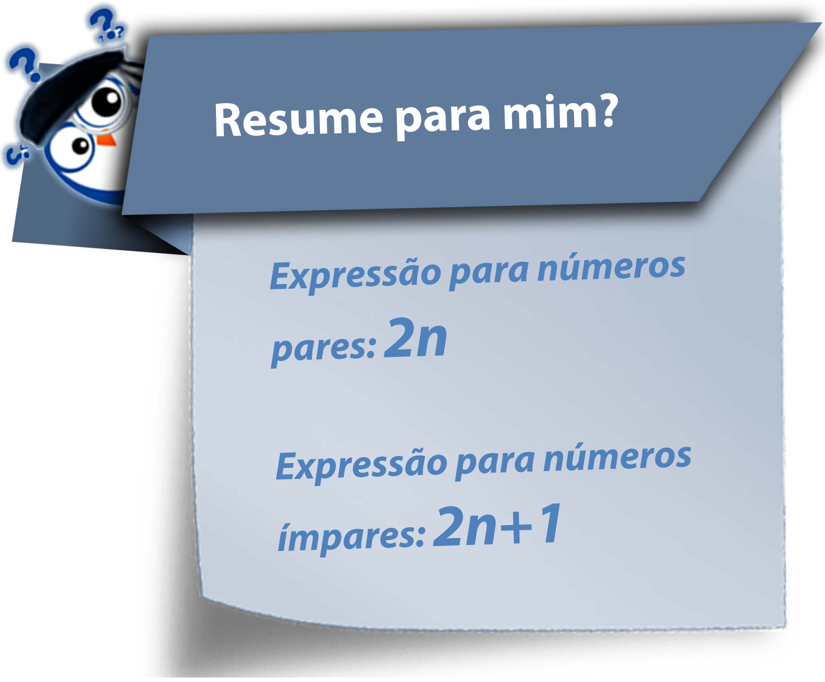
Algo importante sobre esses números é o seguinte. Já parou pra pensar sobre o sucessor de um número par ou o sucessor de um número ímpar? O que podemos dizer sobre eles?

Ora, é exatamente o que ia dizer! Chutou super certo, coruja! Trata-se de um fato fundamental sobre a paridade dos números inteiros (que veremos logo, logo; por enquanto basta saber que todo número natural é inteiro). O sucessor de um número par é um número ímpar, sempre. E o sucessor de um número ímpar, é um número par. Muito bom, coruja!! Agora, você sabe qual é a expressão geral dos números pares e ímpares? Vamos dar uma olhada agora, preste atenção!

Veremos em breve que todo número par é na verdade um número múltiplo de 2. Logo, qualquer número par pode ser escrito no formato $2n$, onde n é um inteiro qualquer. Quer ver como dá certo? Escolha um n qualquer, por exemplo, $n = 5$. "Mas professor 5 NÃO é par, é ímpar; sabe de nada".

Calma, estudante. Eu não disse que n é o número par. Eu disse que $2n$ é. E de fato, será par. Substituindo n por 5 obtemos $2n = 2 \cdot 5 = 10$ que, de fato, é um número par. Pode continuar substituindo n pelo inteiro que quiser, $2n$ continuará sendo um número par.

E como seria, então, a expressão que caracteriza um número ímpar? Bom, como o sucessor de um número par é sempre um número ímpar, basta calcularmos o sucessor de $2n$ que sempre encontraremos um número ímpar, concorda? Então, um número ímpar sempre pode ser representado de acordo com o modo que analisamos para cálculo de sucessor: $2n + 1$.



Então nós temos um acordo? Você entendeu tudo o que falamos até agora, e caso não, não prosseguirá a leitura enquanto não o houver feito. Acordo? Trato? É para o seu próprio bem, jovem. Não vale a pena deixar as dúvidas irem acumulando. Vá fazendo seus próprios resumos, mapas mentais, vá idealizando as possíveis dúvidas. Force-se para ver se realmente tudo está bem entendido. Vamos prosseguir então? Juntos? Vamos lá, falaremos agora sobre a multiplicação de naturais. Vejamos as suas propriedades.

Propriedades multiplicativas dos números naturais

Seguinte. As propriedades que envolvem a multiplicação dos números naturais são praticamente as mesmas das que cercam a adição de naturais. Analise-mo-las:

- *Comutatividade da multiplicação:* A multiplicação de naturais é comutativa. O que isso significa? O mesmo de antes, apenas para fins multiplicativos: multiplicar 2 e 3 resulta no mesmo que se multiplicássemos 3 e 2, isto é, $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$. Em geral, temos $a \cdot b = b \cdot a$.

- *Existência de elemento neutro da multiplicação:* Trata-se do fato de que “multiplicar o número *um* por um número natural” sempre resultará no próprio número natural. Algebricamente: $a \cdot 1 = a$. Daí 1 é chamado de o elemento neutro da multiplicação.

- *Associatividade da multiplicação:* A multiplicação de naturais é associativa. O que quer dizer isso? Bom. Suponha que você, estudante, deseje efetuar o seguinte produto: $2 \cdot 3 \cdot 5$. E aí? Novamente, como fizemos na adição de naturais, qual a ordem correta para que esse produto seja feito? Suponha que efetuemos primeiro o produto $2 \cdot 3$. Ora, ela vale 6. Logo $2 \cdot 3 \cdot 5$ transformar-se-á em $6 \cdot 5$ que vale, claro, 30. Mas o que aconteceria caso tivéssemos efetuado $3 \cdot 5$ primeiro? Vejamos. Veja que $3 \cdot 5$ vale 15. Logo, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 15$. E veja que $2 \cdot 15$ é, de fato, 30. Portanto, a ordem dos fatores não altera o produto. Isso é o que significa dizer que o produto de naturais é associativo. Algebricamente escreve-se: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, sendo os parênteses indicadores de quais operações são feitas primeiro.

- *Distributividade multiplicativa* Imagine que seja de sua vontade multiplicar uma soma, como $5 \cdot (6 + 7)$. É óbvio que poderíamos simplesmente operar $6 + 7 = 13$ e, então, mutiplicar por 5 esse resultado: $13 \cdot 5 = 65$. Porém: podemos nos utilizar da propriedade distributiva que a multiplicação de naturais tem. Funciona da seguinte forma: basta repetir o fator multiplicativo em cada uma das parcelas da soma. "Vish, professor, entendi foi nada!", relaxa, jovem! Não vou te deixar na mão. Veja: queremos efetuar: $5 \cdot (6 + 7)$, correto? Então, elimine os parênteses e repita o 5 multiplicando cada termo de seu interior, da seguinte forma: $5 \cdot (6+7) = 5 \cdot 6+5 \cdot 7$; vê que o 5 aparece junto tanto ao 6 quanto ao 7. Daí, basta fazer as contas: $5 \cdot 6+5 \cdot 7 = 30+35 = 65$. Algebricamente falando: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

- *Fechamento dos números naturais quanto à multiplicação:* Considerando que o zero seja natural, dizer que o conjunto dos números naturais é fechado quanto à multiplicação significa dizer que o produto de dois números naturais é, também, um número natural. Então se $a \cdot b = c$, e a e b são números naturais, então c, resultado do produto dos dois, também sê-lo-á.

Quando multiplicamos a por b encontrando um número c, também temos nomenclaturas próprias: a e b são chamados de fatores e c é chamado de produto.

Muita coisa né, coruja? E é por isso que você não pode agir para com esse livro como se estivesse lendo um livro de ficção ou um romance. Não! Não é um livro de histórias. Trata-se de um material denso de aritmética, que para alguns por ser super simplório mas para outros pode ser extremamente ingrato. Mas não entre em pânico! Sabe essa ingratidão de achar que nada está entrando na sua cabeça? É ilusão! Na verdade uma "barrinha" de *upload* começa a crescer dentro da sua cabeça a cada momento que você lê, relê e resolve exercícios. Até que uma hora simplesmente as coisas começam a dar certo. Confie em mim no que falo. Vai, de fato, dar tudo certo no final. O meio é caótico assim mesmo. Vamos lá então? Corujinha, veremos agora sobre as propriedades que concernem a subtração e a tão

esperada divisão, mais importante das quatro operações para esse material.

Propriedades subtrativas dos números naturais

A subtração não tem as mesmas propriedades que a adição. A única propriedade que de fato permanece é a do elemento neutro, visto que qualquer número subtraído de 0 não se altera.

Bom, subtrair um número b de um número a é calcular o resultado da operação $a - b = c$. Nessa operação, a é chamado o minuendo, b o subtraendo e c a diferença ou o resto.

A subtração fará muito mais sentido quando os números inteiros forem apresentados.

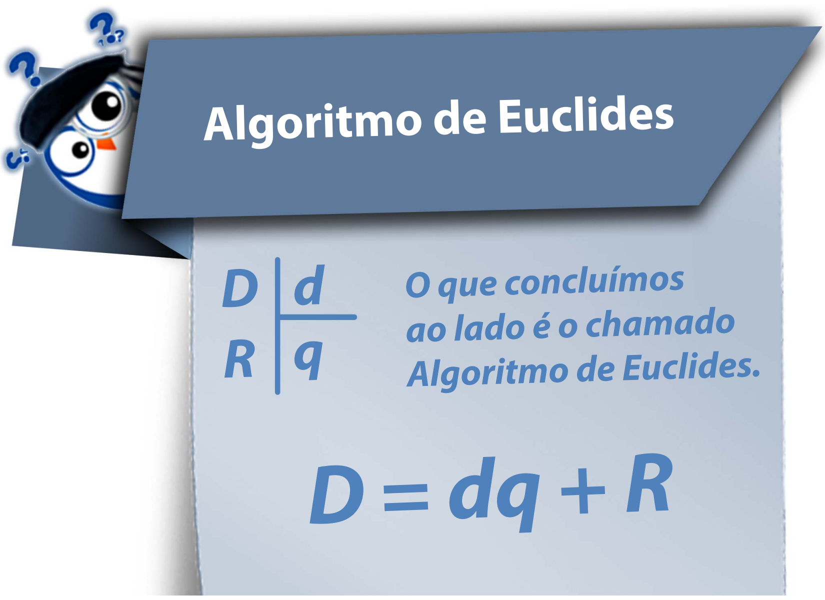
Divisão

E é aqui que temos de dar uma atenção redobrada ao conteúdo. Divisão é, de longe, o assunto mais cobrado da aritmética. Toda a noção de multiplicidade, divisibilidade, MMC e MDC vem da ideia de divisão. Bastante atenção aqui, jovem, para que você alavanque esses conceitos de forma positiva comigo. Vamos lá!

Tudo começa com a seguinte ideia, concentrada no exemplo: tenho 57 objetos a serem distribuídos em 7 sacolas. Quantos objetos conseguirei alocar em cada sacola? Será que consigo fazer isso de modo exato? Ou será que sobram objetos? Vejamos:

$$\begin{array}{r|l} 5\,7 & \underline{7} \\ 1 & 8 \end{array}$$

Veja que obtivemos 8 sacolas com 7 objetos cada, com uma sobra de um objeto. Dizemos então que 57 dividido por 7 resulta em 8 com sobra 1. Aqui vão algumas nomenclaturas: 57 é chamado de dividendo, 7 é o divisor, 8 é chamado de quociente e 1 é chamado de resto.



Perceba também que $8 \cdot 7 + 1 = 57$. Isso não é um fato isolado. Se um dividendo D é dividido por um divisor d, resulta em um quociente q deixando um resto R, podemos afirmar que:

$$D = d \cdot q + R$$

Esse é o fato mais importante sobre a divisão de dois números.

Para ficar ainda mais claro, vejamos outro exemplo super simples:

$$\begin{array}{r|l} 7 & \underline{3} \\ 1 & 2 \end{array}$$

Temos a divisão do dividendo 7 pelo divisor 3, gerando quociente 2 e resto 1. Veja que, de fato, $7 = 3 \cdot 2 + 1$.

Mas é meio abstrato mesmo. Por isso que estou te enchendo de exemplos simples, para garantir que todo mundo entendeu. Agora, quanto à pergunta, coruja: D pode ser qualquer coisa, não importa. Agora, d, q e R têm restrições. Vou bizurar aqui pra você, presta atenção: restrição para d: não pode ser nulo (igual a zero); restrição para q: deve ser menor que d; restrição para r: r deve ser positivo e menor que d.

Podemos provar que para quaisquer dividendo e divisor dados é sempre possível encontrarmos um quociente e um resto seguindo as restrições dadas. Não farei tal demonstração aqui por fugir do foco a que remamos. Mas saiba que é sempre possível!

Terminologias

Vamos agora falar de algumas nomenclaturas importantíssimas que iremos utilizar no decorrer do material e que são amplamente utilizados nas mais diversas questões. Considere a seguinte divisão:

$$\begin{array}{r|l} D & \underline{d} \\ R & q \end{array}$$

Trata-se da divisão do número D pelo número d, dando como resultado q e resto R. Os nomes que darei a seguir serão utilizados quando $R = 0$, isto é, quando o resto for nulo, nada sobrar. Quando isso acontece, podemos dizer utilizar todas as terminologias da nota ao lado.

Percebe a quantidade de terminologias possíveis? Então podemos dizer que, por exemplo, como 8 dividido por 2 deixa resto 0, então 8 é múltiplo de 2; 8 é divisível por 2; 2 é divisor de 8 e 2 divide 8. Todas essas afirmativas são equivalentes.

Critérios de divisibilidade

Como fazemos para saber se um número é ou não divisível por outro? Por exemplo, seria 516 divisível por 4? Façamos as contas:

$$\begin{array}{r|l} 516 & 4 \\ \cline{2-2} 11 & 129 \\ 36 & \\ 0 & \end{array}$$

Deu resto 0? Opa, então 516 é divisível por 4. Ótimo. Mas será que conseguiríamos verificar isso sem, de fato, fazermos as contas? Na maioria das vezes, sim! Mostrarei isso agora para vocês.

Desde já gostaria de adiantar algo. Não é possível provarmos de fato alguns desses critérios sem que estudemos um assunto da Teoria dos Números chamado *congruência modular*. Por isso, não demonstrarei os critérios abaixo, apenas os enunciarei. Sigamos então com o conteúdo. Falaremos dos critérios de divisibilidade dos números de 2 até 11:

- *Divisibilidade por 2:* Basta que o número seja par. Se o número for par, com certeza será divisível por 2.

- *Divisibilidade por 3:* Basta que a **soma** dos algarismos do número seja divisível por 3. Então, sabemos que 729 é divisível por 3 pois $7 + 2 + 9 = 18$ é divisível por 3.

- *Divisibilidade por 4:* Basta que os dois últimos algarismos sejam divisíveis por 4. Então, o número 35732 é divisível por 4, pois seus dois últimos algarismos constituem 32, que é divisível por 4.

- *Divisibilidade por 5:* Basta que finalize em 0 ou 5.

- *Divisibilidade por 6:* Para que um número seja divisível por 6, deve ser divisível por 2 e por 3, isto é, satisfazer ambos os critérios de divisibilidade. Então, deve ser par e ainda ter a soma dos termos divisível por 3.

- *Divisibilidade por 7:* Esse é um pouco mais complicado. Um número será divisível por 7 quando a soma dos números das classes ímpares subtraída da soma dos números das classes pares for um número divisível por 7. Complicado? Calma. Vamos detalhar isso pra você.

  Ordem tem a ver com a hierarquia dos algarismos. A cada três ordens formamos uma classe: classe de milhar, classe de milhão, etc. Então quando escrevemos o número 42336, podemos dizer que o 6 ocupa a primeira ordem. O 3 ocupa a segunda, o outro 3 ocupa a terceira, etc. E quanto às classes? Ora, esse número tem duas classes: 336 que é a primeira classe e 42 que é a segunda. Agora vamos tentar entender o que esse critério nos está tentando ensinar.

Observe novamente o número 42336. Seria esse número divisível por 7? Faça assim: Quais são as classes ímpares? Há apenas uma, a primeira: 336. Logicamente, 42 é a classe par, pois é a segunda. Diminua uma da outra: $336 - 42 = 294$. Faça a conta:

$$\begin{array}{r|l} 294 & 7 \\ \cline{2-2} 14 & 42 \\ 0 & \end{array}$$

De fato, trata-se de um número divisível por 7. Vejamos outro caso. Será o número $6.182.114.400$ um número divisível por 7? Vejamos: classes ímpares: $400+182 = 582$; classes pares: $114+6 = 120$. Subtraindo ambas as classes: $582 - 120 = 462$. Fazendo os cálculos:

$$\begin{array}{r|l} 462 & 7 \\ \cline{2-2} 42 & 66 \\ 0 & \end{array}$$

Dado o resto nulo, tal número é divisível por 7.

- *Divisibilidade por 8:* Basta que os três últimos algarismos sejam divisíveis por 8. Então, o número 4654128 é divisível por 8, pois seus três últimos algarismos constituem 128, que é divisível por 8.

- *Divisibilidade por 9:* Basta que a **soma** dos algarismos do número seja divisível por 9. Então, sabemos que 729 é divisível por 9 pois $7+2+9 = 18$ é divisível por 9.

- *Divisibilidade por 10:* Basta que finalize em 0.

- *Divisibilidade por 11:* Muito parecido com o critério de divisibilidade por 7; a única diferença é que, aqui, a soma não é das classes, mas sim das *ordens*. Um número será divisível por 11 quando a soma dos algarismos das ordens ímpares subtraída da soma dos algarismos das ordens pares for um número divisível por 11. Vejamos um exemplo:

  Seria o número $680.032.584$ um número divisível por 11? Os algarismos de ordem ímpar somados são: $4+5+3+0+6 = 18$; os de ordem par, somados, são: $8+2+0+8 = 18$. Subtraindo um do outro encontramos: $18 - 18 = 0$, que é divisível por 11. Logo, trata-se de um número divisível por 11.

Ora, coruja, claro!!! Sim, são muitos critérios, mas pensa: alguns deles eu tenho quase certeza que você até já sabia! Os que você não sabia, vai tentando aprender brincando com alguns números! Faça nossos exercícios, refaça nossas questões e pronto! Não erra mais questões relacionadas a esse assunto. Vamos lá então, continuar nosso conteúdo? Partiu!

Números primos

Atenção total aqui. Chegamos no conceito mais importante de toda a aritmética: o conceito de número primo. Um número será chamado de *primo* quando tiver apenas dois divisores: ele mesmo e o número 1. Veja então que 6 não é um número primo, pois tem divisores: $1, 2, 3$ e 6. Porém, veja que 5 é primo, pois tem como divisores o próprio 5 e o 1.

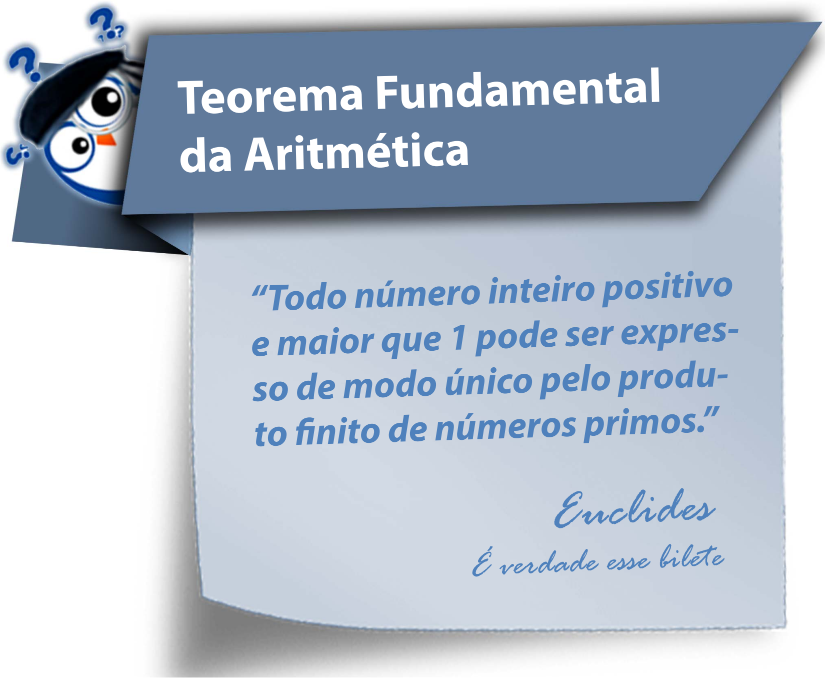
Existem infinitos números primos, segundo Euclides. Não demonstrarei isso aqui, mas alguns consideram essa como a demonstração mais elegante e bela de toda a matemática. Mais informações podem ser encontradas no milenário livro *Os Elementos*, do mesmo autor. Cabe também dizer: um número que não seja primo é chamado de um número *composto*.

Seguem os primeiros 100 números primos (obviamente não precisa decorar todos; mas aconselho que reconheça pelo menos os quinze primeiros):

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541

Entendamos agora o porquê desses números serem tão importantes. Veja a nota a seguir, e comentemos um pouco sobre a mesma.

Fatoração



O teorema anunciado ao lado é o teorema que conecta todos os números da aritmética clássica. Essencialmente o que ele faz é transformar os números primos em espécies de *átomos*, constituintes de todos os números inteiros. Ele nos diz que, por exemplo, 4564 pode ser expresso como um produto de primos, assim como 25, 814, etc. Aprenderemos a seguir como utilizar-nos de um recurso chamado de fatoração prima para conseguirmos transformar um número em um produto de números primos. Alguns também chamam esse processo de decomposição prima. Vejamos como funciona.

Veja como exemplo o número 27720. Vamos tentar escrevê-lo como um produto de números primos. Aqui vai o processo.

Primeiro, escreva o número ao lado de uma barra vertical longa, como ilustra a figura a seguir:

$$\begin{array}{r|l} 27720 & \end{array}$$

Em seguida, escreva o primeiro primo que divide o número dado. Para decidir isso, precisaremos testar se o número é ou não divisível por tal primo. Para isso, teremos de utilizar os critérios de divisibilidade aprendidos na seção anterior. Como se trata de um número par, poderemos dividi-lo por 2. Façamo-lo então. Se dividirmos 27720 por 2, encontramos: 13860. Daí escrevemos esse quociente logo abaixo do 27720, da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|l} 27720 & 2 \\ 13860 & \end{array}$$

Agora você fará o mesmo que fez para o 27720, só que para o 13860. Ele ainda é par, então, podemos dividi-lo por 2:

$$\begin{array}{r|l} 27720 & 2 \\ 13860 & 2 \\ 6930 & \end{array}$$

Continue esse processo, sempre tentando encontrar um número primo que divida o número que está ao lado. Vá fazendo isso até obter o número 1 como quociente:

$$\begin{array}{r|l} 27720 & 2 \\ 13860 & 2 \\ 6930 & 2 \\ 3465 & 3 \\ 1155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Agora que já terminamos a fatoração, basta multiplicarmos todos os fatores obtidos. Em nosso caso: $27720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. essa se chama a forma fatorada do número dado. O legal é que qualquer número pode ser escrito na forma fatorada, desde que tenha módulo maior que 1.

Teste da raiz quadrada

Para verificarmos se um número p é ou não primo, podemos aplicar um teste muito simples. Basta testarmos a divisibilidade de p por todos os primos até $\sqrt{p}$, aproximando-a para baixo.

Vejamos um exemplo. Seria 101 um número primo? Vamos verificar. Veja que $\sqrt{101} \approx 10$. Logo, basta testarmos a divisibilidade de 101 por todos os primos até 10. Veja que não será divisível nem por 2, nem 3 e nem 5. Testemos por 7:

$$\begin{array}{r|l} 101 & \underline{7} \\ 31 & 14 \\ 3 & \end{array}$$

Como 7 é o último primo abaixo de 10, concluímos que 101 é primo.

Divisores de um número

Darei agora um bizu de como achar os divisores de um número de forma fácil e prática. Suponha, por exemplo, que se deseje achar todos os divisores de 280. Como podemos fazer isso?

Primeira coisa que você deve fazer é: fatorar o número proposto. Então, vamos lá.

$$\begin{array}{r|l}
280 & 2 \\
140 & 2 \\
70 & 2 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}$$

Agora, coloca-se uma barra vertical ao lado dos quocientes encontrados, e escreve-se o número 1 logo acima de seu topo. Você deve seguir essas instruções à risca, estudante. Não deixe de ir tentando seguir as minhas instruções paralelamente a mim, enquanto lê. Vá olhando para o que está fazendo com seu lápis no seu caderno, e venha junto. Vamos lá. Veja como ficou a nossa fatoração:

$$\begin{array}{r|l|l}
 & & 1 \\
280 & 2 & \\
140 & 2 & \\
70 & 2 & \\
35 & 5 & \\
7 & 7 & \\
1 & &
\end{array}$$

Agora, multiplique o primeiro fator primo encontrado na fatoração (em nosso caso, o 2) pelo 1 que escrevemos, e coloque ao lado do fator. Assim:

$$\begin{array}{r|l|l}
 & & 1 \\
280 & 2 & 2 \cdot 1 = 2 \\
140 & 2 & \\
70 & 2 & \\
35 & 5 & \\
7 & 7 & \\
1 & &
\end{array}$$

Faça isso para todos os fatores seguintes. Multiplique, então, o próximo fator por todos os seus anteriores:

$$\begin{array}{r|c|l}
 & & 1 \\
280 & 2 & 2 \cdot 1 = 2. \\
140 & 2 & 2 \cdot 2 = 4. \\
70 & 2 & 2 \cdot 4 = 8. \\
35 & 5 & 5 \cdot 1 = 5; 5 \cdot 2 = 10; 5 \cdot 4 = 20; 5 \cdot 8 = 40. \\
7 & 7 & 7 \cdot 1 = 7; 7 \cdot 2 = 14; 7 \cdot 4 = 28; 7 \cdot 8 = 56; 7 \cdot 5 = 35; 7 \cdot 10 = 70; \\
1 & & 7 \cdot 20 = 140 \text{ e } 7 \cdot 40 = 280.
\end{array}$$

Assim os divisores de 280 são: $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 20, 28, 35, 40, 56, 70, 140, 280\}$.

Agora, para o cálculo do número de divisores de um número. Há também um método super prático para fazermos isso. Vou aproveitar o 280, que já fatoramos. Repetirei a sua fatoração aqui:

$$\begin{array}{r|l}
280 & 2 \\
140 & 2 \\
70 & 2 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}$$

Pois bem. escreva o número em sua forma fatorada: $280 = 2^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1$. Para encontrarmos a quantidade de divisores de um número, basta mutliplicar todos os sucessores de cada expoente encontrado. Como assim? Vejamos. Os expoentes encontrados na fatoração feita foram $3, 1$ e 1. Quais são os seus sucessores? Ora, são $4, 2$ e 2. Mutiplicando esses números, obtemos: $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ divisores.

Vejamos um outro exemplo. Considere o número 360. Vamos fatorá-lo.

$$\begin{array}{r|l}
360 & 2 \\
180 & 2 \\
90 & 2 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}$$

Sua forma fatorada será, então: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$. Os expoentes foram: $3, 2, 1$, cujos sucessores são $4, 3, 2$. Multiplicando esses sucessores: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ divisores.

Pois é! É muito interessante que funcione assim, como mágica. Mas na verdade, já estamos cansados de saber que não existe tal mágica. Ou talvez até exista, porque nos impressiona quando vemos pela primeira vez. Mas é claro que há uma explicação lógica para isso. Mas infelizmente mais uma vez vou ter de ficar te devendo, coruja. Existem diversas formas de justificarmos isso, mas a forma mais clássica e produtiva exige conhecimentos de contagens[2] que extrapolam o nosso objetivo nesse livro. Por isso, por enquanto, interessar-nos-emos apenas na aplicação, sem uma justificativa direta. Infelizmente.

[2]Geralmente explica-se sobre esses problemas de contagem em uma disciplina conhecida como Análise Combinatória.

QUESTÕES COMENTADAS

(CN-2000) QUESTÃO 1

Seja $N = xyzzyx$ um número natural escrito na base dez, onde x, y e z são algarismos distintos. Se N_1 e N_2 são os dois maiores números divisíveis por 3 e 25, obtidos a partir de N pela substituição de x, y e z, então $N_1 + N_2$ é igual a:

(a) 1008800
(b) 1108800
(c) 1156650
(d) 1157000
(e) 1209800

R: Um número, para ser divisível por 25, deve terminar em 0 ou 5. Veja que se trata de uma condição necessária, porém, não suficiente (15 finaliza em 5 mas nem por isso é divisível por 5). Porém, o número em questão *não pode finalizar em* 0, pela seguinte razão: o primeiro e o último algarismos são iguais, se o último algarismo for nulo, o primeiro também será, o que é um absurdo. Então, concluímos com isso que $x = 5$.
Veja também que o segundo algarismo é sempre um dos seguintes: $\{0, 2, 5, 7\}$ (até porque um número divisível por 25 sempre finalizar em 00, 25, 50 ou 75). Isso acontece devido ao ciclo do algarismo: $0, 25, 50, 75, 100, 125, \ldots$, onde ele começa a se repetir novamente. Então, certamente $y \in \{0, 2, 5, 7\}$.
Como y tem ordem maior que z, y tem prioridade na escolha, visto que queremos o maior número N possível. Como y está limitado ao conjunto que, há pouco, citei então $y = 7$. Para acharmos z, primeiro, escrevemos a forma de N até agora encontrada: $N = 57zz75$. Visto que esse número é divisível por 3, a soma de seus algarismos também será. Então:

$$5 + 7 + z + z + 7 + 5 = 24 + 2z$$

$$= 2 \cdot (12 + z).$$

Como 2 não é fator de 3, temos que $12 + z$ deve ser divisível por 3. Como 12 já é divisível, z também deverá ser. As possibilidades são: $z \in \{0, 3, 6, 9\}$. Como queremos as duas maiores possibilidades:

$$N_1 = 579975;$$
$$N_2 = 576675.$$

Efetuando a soma: $N_1 + N_2 = 579975 + 576675$

Gabarito: C

(CN-2001) QUESTÃO 2

Se a e b são números naturais e $2a + b$ é divisível por 13, então um número múltiplo de 13 é:

(a) $91a + b$
(b) $92a + b$
(c) $93a + b$
(d) $94a + b$
(e) $95a + b$

R: Visto que $13 \cdot 7a = 91a$ é um múltiplo de 13 e $2a + b$ também, a soma dos dois também será e portanto: $2a + b + 91a = 93a + b$ é múltiplo de 13.

Gabarito: C

(CN-2001) QUESTÃO 3

Se a é um número natural, $a^5 - 5a^3 + 4a$ é sempre divisível por:

(a) 41
(b) 48
(c) 50

(d) 60
(e) 72

R: Estudante, aqui vai um comentário antes de tudo. Em uma questão como essa, que sim eu vou resolver mais abaixo da forma correta, há algo muito simples que você pode fazer para acertar e poder prosseguir para a próxima questão. É o seguinte: se a propriedade é válida para a, que é o caso mais geral, também deverá ser válida para qualquer caso particular. Então, substitua a por *qualquer valor que não o anule* e analise a sua divisibilidade. Por exemplo, faça $a = 3$:
$3^5 - 5 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3 = 243 - 135 + 12 = 120$, divisível por 60; e acabou o exercício. Estudante, isso não é cartear, entenda isso. Eu vou sim, daqui a pouco, provar que isso é válido para qualquer a natural. Mas verificar um caso particular é algo que te dá tempo para fazer as outras questões. Agora, vamos provar que isso é válido sempre.
Coloque a em evidência: $a^5 - 5a^3 + 4a = a \cdot (a^4 - 5a^2 + 4)$. O trinômio biquadrático $a^4 - 5a^2 + 4$ pode ser fatorado. Para facilitar, façamos $b = a^2$. Logo: $a^4 - 5a^2 + 4 = b^2 - 5b + 4$. As raízes desse polinômio são 1 e 4. Logo $b^2 - 5b + 4 = (b-1)(b-4)$. Mas como $b = a^2$, temos $a^4 - 5a^2 + 4 = (a^2-1)(a^2-4)$. Podemos fatorar ainda mais, visto que $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$ e $a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$. Então: $a^4 - 5a^2 + 4 = (a+1)(a-1)(a+2)(a-2)$. Daí, a expressão dada no início se torna:

$$a^5 - 5a^3 + 4a = a(a+1)(a-1)(a+2)(a-2).$$

Podemos reorganizar dessa forma:

$$a^5 - 5a^3 + 4a = (a-2) \cdot (a-1) \cdot a \cdot (a+1) \cdot (a+2).$$

Veja que os fatores se transformaram no produto de 5 números consecutivos. Dentre 5 números consecutivos sempre haverá:

- exatamente um número múltiplo de 5;
- no mínimo 2 números pares, isto é, múltiplos de 2;
- no mínimo um múltiplo de 3.

Como esses fatores são mínimos, isto é, certamente estarão presentes, temos que o produto reunirá, no mínimo esses fatores, isto é: $5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 60$; logo, o produto de cinco números consecutivos sempre será múltiplo de 60.

Gabarito: D

(CN-2003) QUESTÃO 4

Se o número natural expresso por $a^2 - b^2$, $b \neq 0$, é primo, então a é

(a) o antecedente de b.
(b) o conseqüente de b.
(c) múltiplo de b.
(d) divisor de b.
(e) um número par.

R: Veja que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, e esse número é primo. Como é primo, possui apenas dois fatores: 1 e o próprio número. Como esse número é, com certeza, maior que 1, seu maior fator é $a+b$ e o menor $a-b$. Logo $a-b=1$, isto é, $a=b+1$. Isso faz de a o consequente de b.

Gabarito: B

(CN-2004) QUESTÃO 5

Um certo professor comentou com seus alunos que as dízimas periódicas podem ser representadas por frações em que o numerador e o denominador são números inteiros e, neste momento, o professor perguntou aos alunos o motivo pelo qual existe a parte periódica. Um dos alunos respondeu justificando corretamente, que em qualquer divisão de inteiros

(a) o quociente é sempre inteiro.
(b) o resto é sempre inteiro.
(c) o dividendo é o quociente multiplicado pelo divisor, adicionado ao resto.
(d) os possíveis valores para resto têm uma quantidade limitada de valores.
(e) que dá origem a uma dízima, os restos são menores que a metade do divisor.

R: Ao dividir um número D por d, a quantidade de restos possíveis é $\{0, 1, , 2, \ldots, d-1\}$. Isso faz com que, eventualmente, algum dos quocientes obtidos comecem a se repetir. Isso porque, os possíveis valores do resto terem uma quantidade limitada.

Gabarito: D

(CN-2004) QUESTÃO 6

Um número natural N tem 2005 divisores positivos. O número de base distintas da sua decomposição em fatores primos pode ser:

(a) Um.
(b) Cinco
(c) Três.
(d) Quatro.
(e) Seis.

R: Não sabemos que número é esse, vou chamá-lo de N. A quantidade de divisores de um número é dada pelo produto dos sucessores dos expoentes da decomposição prima desse número, como vimos na teoria.
Um número N, em sua decomposição prima, pode ser escrito como abaixo:

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}.$$

Podemos então afirmar que o número de divisores será: $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1)$. Então, visto que $2005 = 5 \cdot 401$ e, também, $2005 = 1 \cdot 2005$, temos duas possibilidades: caso façamos $2005 = 5 \cdot 401$, teremos $\alpha_1 + 1 = 5$ e, portanto, $\alpha_1 = 4$; e $\alpha_2 + 1 = 401$, concluindo que $\alpha_2 = 400$. O número N será, nessa ocasião, escrito como $N = p_1^4 \cdot p_2^{400}$, onde tem duas bases distintas. Não há essa opção, então vamos para o caso seguinte. Caso façamos $2005 = 1 \cdot 2005$, teremos $\alpha_1 + 1 = 1$, isto é, $\alpha_1 = 0$, com $\alpha_2 + 1 = 2005$, ou seja, $\alpha_2 = 2004$. O número N, nessa ocasião, seria escrito como $N = p_3^{2004}$, demonstrando uma base apenas.

Gabarito: A

(CN-2004) QUESTÃO 7

O valor numérico da expressão $120k^4 + 10k^2 + 8$, sendo k pertencente ao conjunto dos números naturais, é o quadrado de um número natural para

(a) somente um único valor de k.
(b) somente dois valores de k.
(c) somente valores de k múltiplos de 13.
(d) somente valores de k múltiplos de 18.
(e) nenhum valor de k.

R: Veja que $120k^4 + 10k^2 + 8 = 10 \cdot (12k^4 + k^2) + 8$. O termo $10 \cdot (12k^4 + k^2)$ é um inteiro terminado em 0, devido à multiplicação por 10. Logo, ao somarmos o 8 ao final, teremos um número terminado em 8. Acontece que quadrados perfeitos sempre terminam em $0, 1, 4, 5, 6$ ou 9, nunca em 8. Logo o número proposto nunca será um quadrado perfeito.

Gabarito: E

(CN-2006) QUESTÃO 8

Quantos são os números primos maiores que 100 e menores que 200, nos quais o algarismo das dezenas é par e maior do que o das unidades?

(a) Um.
(b) Dois.
(c) Três.
(d) Quatro.
(e) Cinco.

R: Comecemos a buscar candidatos. O algarismo das unidades não pode ser $2, 4, 6, 8, 0$ (pois o número será divisível por 2); não pode ser 5 (pois o número será divisível por 5); portanto, só poderá ser: $1, 3, 7, 9$. Como não há algarismo maior que 9, o algarismo das unidades não poderá ser 9 (pois o problema afirma que o algarismo das dezenas deverá ser maior que o das unidades). Então o algarismo das unidades só poder ser $1, 3, 7$. Agora analisemos caso a caso:

- *O algarismo das unidades é 7:* Nesse caso, o número pode ser representado por $1\text{k}7$. O algarismo k deve ser par e maior que 7; então, só pode ser $\text{k} = 8$ e portanto, nesse caso, existe apenas o número 187. Para sabermos se é primo ou não, façamos o teste da raiz quadrada. Veja que $\sqrt{187} \approx 13$. Façamos então todos os testes: é claro que não é divisível por 2, 3 ou 5. Vejamos 7, 11 ou 13:

$$\begin{array}{r|l} 187 & 7 \\ \cline{2-2} 47 & 26 \\ 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 187 & 11 \\ \cline{2-2} 77 & 17 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 187 & 13 \\ \cline{2-2} 57 & 14 \\ 5 & \end{array}$$

  Obtivemos resto 0 na divisão por 11. Logo, 187 não é primo e, portanto, não há primos para esse caso.

- *O algarismo das unidades é 3: Nesse caso, o número será representado por $1\text{k}3$. O algarismo k, então, deverá ser par e maior que 3; as possibilidades são, então: $143, 163$ e 183. De cara, vemos que 143 é divisível por 11 e que 183 é divisível por 3. Vejamos 163. Temos que $\sqrt{163} \approx 12$. Testando todos os primos até 12, vemos que nenhum o divide. Logo 163 é primo e, portanto, para esse caso, há um primo.*

- *O algarismo das unidades é 1: as possibilidades serão: $121, 141, 161$ e 181. O número 121 é divisível por 11, enquanto 141 é divisível por 3. Fazendo as contas, vemos que 161 é divisível por 7 e que 181 é, de fato, primo. Portanto, para esse caso, há apenas um primo também.*

Encontramos então, no total, dois primos: 163 e 181.

Gabarito: B

(CN-2006) QUESTÃO 9

Observe o dispositivo abaixo.

$$\begin{array}{c|c} N & x \\ x & x \\ x & x \\ x & x \\ 1 & \end{array}$$

No dispositivo ao acima, tem-se a decomposição tradicional em fatores primos de um número natural N, em que a letra x está substituindo qualquer número natural diferente de N, zero e um. Sendo y o número total de divisores naturais de N, quantos são os valores possíveis para y?

(a) Três.
(b) Quatro.
(c) Cinco.
(d) Seis.
(e) Sete.

R: Substituamos os valores das decomposições primas por constantes:

$$\begin{array}{c|c} N & m \\ x & n \\ x & p \\ x & q \\ 1 & \end{array}$$

Em termos de igualdades, há cinco possibilidades:

- *São todos diferentes:* nesse caso, $N = m \cdot n \cdot p \cdot q$ que, gera, portanto, $y = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ divisores.
- *Dois deles são iguais e dois deles são diferentes:* nesse caso, $N = m \cdot m \cdot n \cdot p = m^2 \cdot n \cdot p$ que gera, portanto, $y = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ divisores.
- *Dois deles são iguais e os outros dois também:* nesse caso, $N = m \cdot m \cdot n \cdot n = m^2 \cdot n^2$ que gera, portanto, $y = 3 \cdot 3 = 9$ divisores.
- *Três deles são iguais, apenas:* nesse caso, $N = m \cdot m \cdot m \cdot n = m^3 \cdot n$ que gera, portanto, $y = 4 \cdot 2 = 8$ divisores.
- *Quatro deles são iguais:* nesse caso, $N = m \cdot m \cdot m \cdot m = m^4$ que gera, portanto, $y = 5$ divisores.

Há, portanto, cinco possibilidades para y: $16, 12, 9, 8$ e 5.

Gabarito: C

(CN-2007) QUESTÃO 10

Em um número natural N de 9 algarismos, tem-se: os algarismos das unidades simples, unidades de milhar e unidade de milhão iguais a x; os algarismos das dezenas simples, dezenas de milhar e dezenas de milhão iguais a y; e os algarismos das centenas simples, centenas de milhar e centenas de milhão iguais a z. Pode-se afirmar que N sempre será divisível por:

(a) 333664
(b) 333665
(c) 333666
(d) 333667
(e) 333668

R: Montando esse número, obtemos:

$$N = \underbrace{z}_{\substack{\text{centena}\\\text{de milhão}}}\ \underbrace{y}_{\substack{\text{dezena}\\\text{de milhão}}}\ \underbrace{x}_{\substack{\text{unidade}\\\text{de milhão}}}\ \underbrace{z}_{\substack{\text{centena}\\\text{de milhar}}}\ \underbrace{y}_{\substack{\text{dezena}\\\text{de milhar}}}\ \underbrace{x}_{\substack{\text{unidade}\\\text{de milhar}}}\ \underbrace{z}_{\substack{\text{centena}\\\text{simples}}}\ \underbrace{y}_{\substack{\text{dezena}\\\text{simples}}}\ \underbrace{x}_{\substack{\text{unidade}\\\text{simples}}}$$

Veja também que N, sendo escrito como $zyxzyxzyx$, também pode ser escrito como $N = zyx \cdot 10^6 + zyx \cdot 10^3 + zyx = zyx \cdot (10^6 + 10^3 + 1) = zyx \cdot 1001001$. Veja também que $1001001 = 333667 \cdot 3$, e portanto: $N = zyx \cdot 3 \cdot 333667$. Daí, N com certeza é divisível por 333667.

Gabarito: D

(CN-2008) QUESTÃO 11

Analise as afirmativas abaixo.

I. Dois números consecutivos positivos são sempre primos entre si.

II. Se o inteiro x é múltiplo do inteiro y e x é múltiplo do inteiro z, então x é múltiplo do inteiro yz.

III. A igualdade $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{a+b}$, é possível no campo dos reais.

Assinale a opção correta.

(a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

(b) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(c) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(d) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(e) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

R: Comentemos afirmativa por afirmativa:

I. É verdade, dados n e $n+1$ naturais, sempre teremos esses números primos entre si! Caso não fosse verdade, haveria algum número maior que 1 que divide n e $n+1$ simultaneamente. Acontece que se divide n e $n+1$, também dividirá a diferença entre eles, que é $n+1-n=1$. Mas o único divisor de 1 é 1 e portanto têm de ser primos entre si.

II. Falso. Veja que 20 é múltiplo de 5 e também é múltiplo de 10; mas isso não o faz múltiplo de $5\cdot 10=50$.

III. Vamos desenvolver ambos os lados para obtermos uma opinião. Lembrando que para essa expressão ser verdadeira, é necessário que $a\neq 0$ e $b\neq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}&=\frac{2}{a+b}\\ \frac{a+b}{ab}&=\frac{2}{a+b}\\ (a+b)^2&=2ab\\ a^2+2ab+b^2&=2ab\\ a^2+b^2&=0.\end{aligned}$$

Essa última expressão só seria verdadeira caso $a=b=0$, impossível, dadas as nossas condições de domínio iniciais. Logo, não é possível dentro dos reais. Afirmativa falsa.

Assim, apenas a afirmativa I é verdadeira.

Gabarito: A

(CN-2008) QUESTÃO 12

De uma determinada quantidade entre 500 e 1000 DVDs, se foram feitos lotes de 5 DVDs sobram 2; se forem feitos lotes com 12 sobram 9 e se forem feitos lotes com 14 DVDs sobram 11. Qual é a menor quantidade, acima de 5 DVDs por lote, de modo a não haver sobra?

(a) 6
(b) 8
(c) 9
(d) 13
(e) 15

R:

Faça de N a quantidade de DVDs. Veja então que $500 < N < 1000$. Também sabemos que:

$$\begin{array}{l|l} N & 5 \\ \hline 2 & q_1 \end{array}, \text{ e portanto: } N = 5q_1 + 2, \text{ ou } N + 3 = 5(q_1 + 1).$$

$$\begin{array}{l|l} N & 12 \\ \hline 9 & q_2 \end{array}, \text{ e portanto: } N = 12q_2 + 9, \text{ ou } N + 3 = 12(q_2 + 1).$$

$$\begin{array}{l|l} N & 14 \\ \hline 11 & q_3 \end{array}, \text{ e portanto: } N = 14q_3 + 11, \text{ ou } N + 3 = 14(q_3 + 1).$$

Isso nos diz que $N + 3$ é múltiplo comum de $5, 12$ e 14. Calculemos então o MMC.

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 12 & 14 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

O MMC será: $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$. Isso nos diz que $N + 3$ deve ser múltiplo de 420. O único múltiplo de 420 entre 500 e 1000 é 840. Logo $N + 3 = 840$ e, portanto, $N = 837$. Essa é a quantidade de DVDs. Queremos encontrar o menor divisor positivo de 837 acima de 5. Fatoremos então:

$$\begin{array}{r|l} 837 & 3 \\ 279 & 3 \\ 93 & 3 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array}$$

Os divisores de 837 são, então: $\{3, 9, 27, \ldots\}$ e, portanto, a menor quantidade será 9.

Gabarito: C

(CN-2009) QUESTÃO 13

Sabe-se que: o número natural K dividido pelo número natural A dá quociente 56 e resto zero; K dividido pelo número natural B dá quociente 21 e resto zero; e os algarismos de A são os mesmos de B e ambos possuem dois algarismos, porém em ordem inversa. A soma dos algarismos de K é igual a:

(a) 5
(b) 6
(c) 7
(d) 8
(e) 9

R: Comecemos a modelar! Vejamos:

$$\begin{array}{l|l} K & A \\ \hline 0 & 56 \end{array}, \text{ e portanto: } K = 56A.$$

$$\begin{array}{l|l} K & B \\ \hline 0 & 21 \end{array}, \text{ e portanto: } K = 21B.$$

Daí, temos que $56A = 21B$, ou $8A = 3B$. Agora, tratemos dos algarismos. Chamarei esses algarismos mencionados no enunciado de x e y. Então: $A = xy$ e $B = yx$ (e não estou multiplicando os algarismos, trata-se de posição ordinal deles).
Dessa forma: $A = xy = 10x + y$, enquanto $B = yx = 10y + x$. Então:

$$8A = 3B$$
$$8(10x + y) = 3(10y + x)$$
$$80x + 8y = 30y + 3x$$
$$77x = 22y$$

$$7x = 2y.$$

Pelo que encontramos, temos que $7x$ é par, pois é igual a $2y$. Então x é par, pois 7 é ímpar. Veja também que para $x = 4$, temos $7x = 28$ e, portanto, $2y = 28$ com $y = 14$. Isso é impossível, pois y é um algarismo. Logo $x < 4$ e o único número par positivo com essa propriedade é $x = 2$. Logo $x = 2$ e, portanto, $y = 7$. Isso nos diz que $A = 10 \cdot 2 + 7 = 27$ e, finalmente, $K = 56 \cdot 27 = 1512$, cuja soma dos algarismos é $1 + 5 + 1 + 2 = 9$.

Gabarito: E

(CN-2011) QUESTÃO 14

A divisão do inteiro positivo N por 5 tem quociente q_1 e resto 1. A divisão de $4q_1$ por 5 tem quociente q_2 e resto 1. A divisão de $4q_2$ por 5 tem quociente q_3 e resto 1. Finalmente, dividindo $4q_3$ por 5, o quociente é q_4 e o resto é 1. Sabendo que N pertence ao intervalo aberto $(621, 1871)$, a soma dos algarismos de N é

(a) 18
(b) 16
(c) 15
(d) 13
(e) 12

R: Façamos as contas que ele menciona:

$$\begin{array}{l|l} N & 5 \\ \cline{2-2} 1 & q_1 \end{array}, \text{ e portanto: } N = 5q_1 + 1, \text{ ou seja, } N + 4 = 5(q_1 + 1).$$

$$\begin{array}{l|l} 4q_1 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & q_2 \end{array}, \text{ e portanto: } 4q_1 = 5q_2 + 1, \text{ ou seja, } 4q_1 + 4 = 5(q_2 + 1).$$

$$\begin{array}{l|l} 4q_2 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & q_3 \end{array}, \text{ e portanto: } 4q_2 = 5q_3 + 1, \text{ ou seja, } 4q_2 + 4 = 5(q_3 + 1).$$

$$\begin{array}{l|l} 4q_3 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & q_4 \end{array}, \text{ e portanto: } 4q_3 = 5q_4 + 1, \text{ ou seja, } 4q_3 + 4 = 5(q_4 + 1).$$

Colocando 4 em vidência em cada conclusão obtida, chegamos a:

$$\begin{aligned} N+4 &= 5(q_1+1) \\ 4(q_1+1) &= 5(q_2+1) \\ 4(q_2+1) &= 5(q_3+1) \\ 4(q_3+1) &= 5(q_4+1). \end{aligned}$$

Multiplicando todas as equações:

$$(N+4)\cdot 4(q_1+1)\cdot 4(q_2+1)\cdot 4(q_3+1) = 5(q_1+1)\cdot 5(q_2+1)\cdot 5(q_3+1)\cdot 5(q_4+1)$$
$$(N+4)\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5(q_4+1)(N+4)\cdot 4^3 \qquad = 5^4(q_4+1)$$

Como 4^3 e 5^4 são primos entre si, e como q_4+1 é inteiro, podemos afirmar que $N+4$ é múltiplo de 5^4. Então $N+4=5^4k=625k$. Daí, temos que $N=625k-4$. O único valor de k que posiciona N entre 621 e 1871 é $k=2$: $N=625\cdot 2-4=1250-4=1246$, cuja soma dos algarismos é: $1+2+4+6=13$.

Gabarito: D

(CN-2012) QUESTÃO 15

O número $N = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k$ é formado pelo produto dos k primeiros números naturais não-nulos. Qual é o menor valor possível de k para que $\frac{N}{7^{17}}$ seja um número natural, sabendo que k é ímpar e não é múltiplo de 7?

(a) 133
(b) 119
(c) 113
(d) 107
(e) 105

R: Uma curiosidade, antes de resolver a questão. Esse número N, que é o produto de todos os números de 1 até k tem um nome especial: chamamos isso de o *fatorial de* k, e escrevemos $k!$ para essa expressão.

Bom, agora à questão. Queremos que $\frac{N}{7^{17}}$ seja natural. Para que isso aconteça, o número N deve ter no mínimo 17 fatores iguais a 7, para poder cancelar com cada um dos 7 no denominador. Então precisaremos que N tenha no mínimo 17 múltiplos de 7 em seus fatores. Bom, o primeiro múltiplo positivo de 7 é ele mesmo. O segundo, 14. Acontece que tanto 49 quanto 98 tem 7^2 como fatores. Então cada um conta como dois múltiplos a mais. Portanto, não precisaremos de 17 múltiplos, precisaremos apenas de 15 múltiplos e portanto k deveria ser no mínimo $7 \cdot 15 = 105$. Acontece que k não pode ser múltiplo de 7 e nem par; portanto, o menor valor de k é 107.

Gabarito: D

■■■(CN-2012) QUESTÃO 16

Um número N inteiro possui exatamente 70 divisores. Qual é o menor valor possível para $|N + 3172|$?

(a) 2012
(b) 3172
(c) 5184
(d) 22748
(e) 25920

R: Primeiro, coloquemo-nos à frente de uma pequena pegadinha: se são 70 divisores *inteiros*, então, 35 são positivos e 35 são negativos. Essa informação nos é mais útil. Visto que $35 = 5 \cdot 7$, podemos dizer que $N = p_1^4 \cdot p_2^6$ ou que $N = p_1^6 \cdot p_2^4$.
Queremos também que $|N + 3172|$ seja o menor possível; assim, queremos que N seja negativo, para reduzir o valor da expressão. Visto que os menores primos são 2 e 3, existem as seguintes possibilidades:

$$N = -2^4 \cdot 3^6 = -16 \cdot 729 = -11664; \text{ daí } |-11664 + 3172| = 8492;$$
$$N = -2^6 \cdot 3^4 = -64 \cdot 81 = -5184; \text{ daí } |-5184 + 3172| = 2012.$$

Assim, o menor valor possível para N é 2012.

Gabarito: A

(CN-2012) QUESTÃO 17

Qual é o total de números naturais em que o resto é o quadrado do quociente na divisão por 26?

(a) zero.
(b) dois.
(c) seis.
(d) treze.
(e) vinte e cinco.

R: Efetuemos a divisão mencionada:

$$\begin{array}{l|l} N & 26 \\ \cline{2-2} q^2 & q \end{array}$$

Vemos então que $N = 26q + q^2$. Mas também sabemos, pelas restrições da divisão, que o resto deve sempre ser não negativo e menor que o divisor; logo, $q^2 < 26$; a solução natural dessa inequação é $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Esses são, então, os candidatos a quocientes dessa divisão.
Para cada um destes:

$$N = 26 \cdot 0 + 0^2 = 0 + 0 = 0;$$
$$N = 26 \cdot 1 + 1^2 = 26 + 1 = 27;$$
$$N = 26 \cdot 2 + 2^2 = 52 + 4 = 56;$$
$$N = 26 \cdot 3 + 3^2 = 78 + 9 = 87;$$
$$N = 26 \cdot 4 + 4^2 = 104 + 16 = 120;$$
$$N = 26 \cdot 5 + 5^2 = 130 + 25 = 155.$$

Há portanto, seis números com tal propriedade: $\{0, 27, 56, 87, 120, 155\}$.

Gabarito: C

(CN-2012) QUESTÃO 18

Uma divisão de números naturais está representada a seguir.

$$\begin{array}{c|c} D & d \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

$D = 2012$ é o dividendo, d é o divisor, q é o quociente e r é o resto. Sabe-se que $0 \neq d = 21$ ou $q = 21$. Um resultado possível para $r + d$ ou $r + q$ é:

(a) 92
(b) 122
(c) 152
(d) 182
(e) 202

R: A disjunção *ou*, aqui, é aplicada de modo inclusivo, isto é, basta que uma das proposições sejam verdadeiras. Existem, portanto, três casos:

- $d = q = 21$: Nesse caso, precisamos simplesmente efetuar a divisão:

$$\begin{array}{c|c} 2012 & 21 \\ \cline{2-2} r & 21 \end{array}$$

  Nessa situação, teremos $r = 1571$, o que é impossível (o resto deve sempre ser menor que o dividendo). Podemos então excluir essa possibilidade.

- $d = 21$: basta efetuarmos a divisão:

$$\begin{array}{r|l} 2012 & 21 \\ \cline{2-2} 122 & 95 \\ 17 & \end{array}$$

  Vemos que nesse caso, $r = 17$ e $q = 95$. Temos então que $r + d = 17 + 21 = 38$, e $r + q = 17 + 95 = 112$, nenhuma das quais encontra-se entre as opções. Devemos então, analisar a próxima hipótese.

- $q = 21$: Montando a divisão, temos:

$$\begin{array}{c|c} 2012 & d \\ \cline{2-2} r & 21 \end{array}$$

Temos então: $2012 = 21d + r$, com $0 \leq r < d$. Ora, mas $r = 2012 - 21d$. Então:

$$\begin{aligned} r &< d \\ 2012 - 21d &< d \\ -22d &< -2012 \\ 22d &> 2012 \\ d &> \frac{2012}{22} \\ d &> \frac{2012}{22} \approx 91,45 \\ d &\geq 92. \end{aligned}$$

Mas também sabemos que $r \geq 0$. Logo:

$$\begin{aligned} 2012 - 21d &\geq 0 \\ -21d &\geq -2012 \\ 21d &\leq 2012 \\ d &\leq \frac{2012}{21} \approx 95,8 \\ d &\leq 95. \end{aligned}$$

Assim, temos $92 \leq d \leq 95$. Há, portanto, quatro possibilidades para d: $\{92, 93, 94, 95\}$. Visto que $r = 2012 - 21d$:

$$\begin{aligned} d = 92 &\Rightarrow r = 2012 - 21 \cdot 92 = 2012 - 1932 = 80 \Rightarrow r + d = 172 \text{ e } r + q = 101; \\ d = 93 &\Rightarrow r = 2012 - 21 \cdot 93 = 2012 - 1953 = 59 \Rightarrow r + d = 152 \text{ e } r + q = 80; \\ d = 94 &\Rightarrow r = 2012 - 21 \cdot 94 = 2012 - 1974 = 38 \Rightarrow r + d = 132 \text{ e } r + q = 59; \\ d = 95 &\Rightarrow r = 2012 - 21 \cdot 95 = 2012 - 1995 = 17 \Rightarrow r + d = 112 \text{ e } r + q = 38. \end{aligned}$$

Veja então que $d + r = 152$ é a única que podemos verificar nas alternativas dadas.

Gabarito: C

(CN-2013) QUESTÃO 19

Sabendo que $2^x \cdot 3^{4y+x} \cdot 34^y$ é o menor múltiplo de 17 que pode-se obter para x e y inteiros não negativos, determine o número de divisores positivos da soma de todos os algarismos desse número, e assinale a opção correta.

(a) 12
(b) 10
(c) 8
(d) 6
(e) 4

R: Como 17 é primo, o mínimo que devemos ter no número requerido é um fator 17. Veja também que:

$$\begin{aligned} N = 2^x \cdot 3^{4y+x} \cdot 34^y &= 2^x \cdot 3^{4y+x} \cdot (2 \cdot 17)^y \\ &= 2^x \cdot 3^{4y+x} \cdot 2^y \cdot 17^y \\ &= 2^{x+y} \cdot 3^{4y+x} \cdot 17^y. \end{aligned}$$

Vemos que y deve ser no mínimo 1, para garantir a presença do fator 17. Faça então $x = 0$:

$$\begin{aligned} N &= 2^{x+y} \cdot 3^{4y+x} \cdot 17^y \\ N &= 2^{0+1} \cdot 3^{4\cdot 1+0} \cdot 17^1 \\ N &= 2 \cdot 3^4 \cdot 17 \\ N &= 2 \cdot 3^4 \cdot 17 \\ N &= 2754. \end{aligned}$$

A soma dos algarismos de N é $2 + 7 + 5 + 4 = 18$. Veja que $18 = 2 \cdot 3^2$, que tem $2 \cdot 3 = 6$ divisores.

Gabarito: D

(CN-2013) QUESTÃO 20

O maior inteiro n, tal que $\dfrac{n^2+37}{n+5}$ também é inteiro, tem como soma dos seus algarismos um valor igual a:

(a) 6
(b) 8
(c) 10
(d) 12
(e) 14

R: Façamos algumas manipulações:

$$\begin{aligned} N = \frac{n^2+37}{n+5} &= \frac{n^2-25+62}{n+5} \\ &= \frac{n^2-25}{n+5} + \frac{62}{n+5} \\ &= \frac{(n+5)(n-5)}{n+5} + \frac{62}{n+5} \\ &= n-5+\frac{62}{n+5}, n \neq -5. \end{aligned}$$

É claro então que, para que N seja inteiro, temos de ter $\dfrac{62}{n+5}$ inteiro. Portanto, $n+5$ deve ser divisor de 62. O maior divisor de 62 é o próprio 62, daí $n+5=62$ e portanto, $n=57$, cuja soma dos algarismos é $5+7=12$.

Gabarito: D

(CN-2014) QUESTÃO 21

Considere que N seja um número natural formado apenas por 200 algarismos iguais a 2, 200 algarismos iguais a 1 e 2015 algarismos iguais a zero. Sobre N, pode-se afirmar que:

(a) se forem acrescentados mais 135 algarismos iguais a 1, e dependendo das posições dos algarismos, N poderá ser um quadrado perfeito.
(b) independentemente das posições dos algarismos, N não é um quadrado perfeito.

(c) se forem acrescentados mais 240 algarismos iguais a 1, e dependendo das posições dos algarismos, N poderá ser um quadrado perfeito.

(d) se os algarismos da dezena e da unidade não forem iguais a 1, N será um quadrado perfeito.

(e) se forem acrescentados mais 150 algarismos iguais a 1, e dependendo das posições dos algarismos, N poderá ser um quadrado perfeito.

R: Para resolvermos essa questão, basta utilizarmos o critério de divisibilidade por 3 e 9. Veja, inicialmente, que a soma dos algarismos do número N é $200 \cdot 2 + 200 \cdot 1 + 2015 \cdot 0 = 600$. Agora, com isso, comentemos alternativa por alternativa:

(a) Acrescentando mais 135 algarismos iguais a 1, temos a soma dos algarismos agora igual a $135 + 600 = 735$. Perceba que esse número é divisível por 3, porém, não é divisível por 9. O número N, então, possui apenas um fator 3, isto é, uma quantidade ímpar de fatores 3. Então, é impossível de, nessa hipótese, termos N quadrado perfeito.

(b) De fato, 600 é divisível por 3 mas não o é por 9. Pelos mesmos argumentos anteriores, o número em questão não poderá ser quadrado perfeito.

(c) Raciocínio análogo. $600 + 240 = 840$, que não é divisível por 9 mas o é por 3.

(d) A conclusão da alternativa B como certa exclui essa hipótese.

(e) Raciocínio também análogo. $600 + 150 = 750$ não é divisível por 9 mas o é por 3.

Gabarito: B

(CN-2015) QUESTÃO 22

Sejam $A = \{1, 2, 3, \ldots, 4029, 4030\}$ um subconjunto dos números naturais e $B \subset A$, tal que não existem x e y, $x \neq y$, pertencentes a B nos quais x divida y. O número máximo de elementos de B é N. Sendo assim, a soma dos algarismos de N é

(a) 8

(b) 9

(c) 10

(d) 11

(e) 12

R: Para que x divida y, y deve ser múltiplo de x, isto é, y deve ser tal que $y = kx$, para algum k natural maior que 1 (pois $A \subset \mathbb{N}$). O menor valor possível para k é 2, ao mesmo tempo em que o maior valor possível para y é 4030; como $\frac{4030}{2} = 2015$, temos que o conjunto $(2015, 4030]$, aberto em 2015, é o maior conjunto possível em que nenhum elemento divide o outro (ou seja, todos os elementos desse conjunto são primos entre si). A quantidade de elementos nesse conjunto é $4030 - 2015 = 2015$, cuja soma dos algarismos é $2 + 0 + 1 + 5 = 8$.

(CN-2015) QUESTÃO 23

O número de divisores positivos de 10^{2015} que são múltiplos de 10^{2000} é

(a) 152
(b) 196
(c) 216
(d) 256
(e) 276

R: Tente modelar o que está sendo pedido. Primeiro, equacione os múltiplos de 10^{2000}: seriam todos os números na forma $k \cdot 10^{2000}$, com k natural. E daí, para que esses números sejam divisores de 10^{2015}, devemos fazer com que $\frac{10^{2015}}{k \cdot 10^{2000}} = \frac{10^{15}}{k}$ seja inteiro. Para que isso aconteça, k deve ser divisor de 10^{15}. Como $10^{15} = (2 \cdot 5)^{15} = 2^{15} \cdot 5^{15}$, a quantidade de divisores será $(15 + 1)^2 = 16^2 = 256$.

Gabarito: D

(EPCAR-2015) QUESTÃO 24

Juntamente com o Governador de um Estado, foram para uma reunião 4 Prefeitos. Cada Prefeito levou 4 Secretários e cada Secretário levou 4 Vereadores. Sabendo-se que nessa reunião não houve participação de mais nenhuma pessoa, então, o número T, total de participantes, é múltiplo de

(a) 7
(b) 11
(c) 17
(d) 19

R: Se há 4 prefeitos e cada prefeito levou 4 secretários, então compareceram 16 secretários. Ainda, como cada secretário levou 4 vereadores, temos um total de $16 \cdot 4 = 64$ vereadores. Juntando com o governador, temos um total de $64 + 16 + 4 + 1 = 85$, que é divisível por 17.

Gabarito: C

(EPCAR-2011) QUESTÃO 25

Se somarmos sete números inteiros pares positivos e consecutivos, obteremos 770. O número de divisores naturais do maior dos sete números citados é

(a) 6
(b) 8
(c) 10
(d) 12

R: Adicionemos sete naturais consecutivos:

$$
\begin{aligned}
N + (N+2) + (N+4) + (N+6) + (N+8) + (N+10) + (N+12) &= 770 \\
7N + 42 &= 770 \\
N + 6 &= 110 \\
N &= 110 - 6 \\
N &= 104.
\end{aligned}
$$

O maior desses números é $N + 12 = 104 + 12 = 116$. Fatorando esse número:

$$\begin{array}{r|l} 116 & 2 \\ 58 & 2 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array}$$

Então, temos que $116 = 2^2 \cdot 29$. Somando uma aunida a cada expoente e multiplicando-os, temos: $3 \cdot 2 = 6$ divisores totais.

Gabarito: A

(EPCAR-2012) QUESTÃO 26

Considere os algarismos zero e 4 e os números formados apenas com os mesmos. O número x representa o menor múltiplo positivo de 15, dentre os descritos acima. Se $\frac{x}{30}$ possui um número α de divisores positivos, então α é igual a

(a) 4
(b) 6
(c) 8
(d) 10

R: Bom, vamos lá. Se o número é múltiplo de 15, ele é ao mesmo tempo múltiplo de 3 e múltiplo de 5. Se é múltiplo de 5, então termina em 0 ou 5. Como a utilização de algarismos está restrito ao uso de 0 e 4, concluímos que o número em questão deverá finalizar em 0. Para que seja divisível por 3, a soma dos algarismos do número deve ser divisível por 3. Logo, basta adicionarmos três algarismos 4 ao lado do 0 já posicionado. Ficamos com o número 4440 que é, de fato, divisível por 0 e é o menos número que pode ser construído sob esse regulamento. Assim, $x = 4440$. Queremos o número de divisores de $\frac{4440}{30} = 148$. Então, fatoremos esse número:

$$\begin{array}{r|l} 148 & 2 \\ 74 & 2 \\ 37 & 37 \\ 1 & \end{array}$$

Temos então: $148 = 2^2 \cdot 37$ e, portanto, a quantidade de divisores será de $\alpha = 3 \cdot 2 = 6$.

Gabarito: B

(EPCAR-2012) QUESTÃO 27

Sr. Luiz pretende dividir a quantia x reais entre seus netos. Observou que se der 50 reais para cada um lhe faltarão 50 reais e se der 40 reais para cada um, lhe sobrarão 40 reais. Com base nisso, é correto afirmar que

(a) Sr. Luiz possui menos de 500 reais para dividir entre seus netos.
(b) Sr. Luiz tem mais de 10 netos.
(c) se um dos netos do Sr. Luiz não quiser o dinheiro, os demais receberão menos de 45 reais cada um.
(d) é possível que o Sr. Luiz divida a quantia x em partes iguais entre todos os seus netos, de forma que não lhe sobre nenhum centavo.

R: À resolução: chamarei de N a quantidade de netos do sr. Luiz, e de T o total, em reais, que o sr. Luiz tem consigo. Muito bem. Agora é uma questão de modelagem de equações.
Analisemos a primeira parte. Primeiro ele informa que se der 50 reais para cada um, lhe faltarão 50 reais. Bom, se ele quisesse dar 50 reais para cada um, ele precisaria de 50 multiplicado pela quantidade de netos, correto? Ou seja, precisaria de $50 \cdot N$ e o seu total seria esse. Acontece que ele tem 50 reais a menos que isso. Portanto, $T = 50N - 50$.
Analogamente quando ele nos diz que, ao dar 40 reais para cada um, sobrariam 40 reais, queremos dizer que $T = 40N + 40$. Temos então:

$$\begin{aligned} 50N - 50 &= 40N + 40 \\ 50N - 40N &= 50 + 40 \\ 10N &= 90 \\ N &= 9. \end{aligned}$$

E, com isso, o sr. Luiz tem consigo: $T = 50N - 50 = 50 \cdot 9 - 50 = 400$ reais. Agora analisemos alternativa por alternativa:

(a) De cara já temos a alternativa correta. O sr. Luiz tem 400 reais que é, de fato, menor que 500.

(b) Falso, ele tem 9.

(c) Vejamos. Caso um dos netos não aceite, serão 400 reais para serem divididos dentre $9-1=8$ netos. Isso gera $\frac{400}{8}=50$ reais para cada neto, que não é menos de 45 reais, como a alternativa propõe.

(d) Não é possível, pois 400 não é divisível por 9.

Gabarito: A

(EPCAR-2013) QUESTÃO 28

Uma professora de Matemática do 5º ano do Ensino Fundamental, para dar início a um conteúdo novo, levou para a sala de aula p bolinhas em uma única caixa.

Ela chamou os alunos α, β, γ à frente da turma e pediu a cada aluno que, um de cada vez, fizesse retiradas sucessivas de um mesmo número de bolinhas, conforme descrito no quadro abaixo:

ALUNO	QTD. DE RETIRADAS	QTD. DE BOLINHAS RETIRADAS POR VEZ	SOBRA DE BOLINHA NA CAIXA
α	x	2	0
β	y	3	1
γ	z	5	2

Sabe-se que:

I. $40 < p < 80$

II. Cada aluno, logo após a contagem das bolinhas por ele retiradas, devolveu todas as bolinhas para a caixa.

III. Não houve erro na contagem por parte dos alunos.

Com base nessas informações, é FALSO que

(a) $x+y+z>p$

(b) x e y são primos entre si

(c) $y < \frac{1}{3}p$

(d) $x - z$ é um número ímpar.

R: Questão grande e cheia de informações. O que você precisa fazer? Se organizar. Comece, por exemplo, fazendo o seguinte: considere que o número de bolinhas na caixa seja p.

O aluno α retira de duas em duas bolas, e não sobram bolas. Disso, podemos afirmar que:

$$\begin{array}{l|l} p & 2 \\ \cline{2-2} 0 & x \end{array}, \text{ e portanto: } p = 2x.$$

Já o aluno β retiras de três em três bolas, sobrando uma. Então:

$$\begin{array}{l|l} p & 3 \\ \cline{2-2} 1 & y \end{array}, \text{ e portanto: } p = 3y + 1.$$

Finalmente, o aluno γ retira bolas de cinco em cinco. Então:

$$\begin{array}{l|l} p & 5 \\ \cline{2-2} 2 & z \end{array}, \text{ e portanto: } p = 5z + 2.$$

Agora começaremos um processo de eliminação de possibilidades. O problema afirma que p é um número maior que 40 e menor que 80. Mas também sabemos que $p = 2x$, ou seja, p é par. Então, p certamente é um par entre 40 e 80. São eles:

$$\begin{array}{ccccc} 42 & 44 & 46 & 48 & 50 \\ 52 & 54 & 56 & 58 & 60 \\ 62 & 64 & 66 & 68 & 70 \\ 72 & 74 & 76 & 78 & \end{array}$$

Também sabemos que $p = 5z + 2$, ou seja, que $p - 2 = 5z$. Isso significa que $p - 2$ é divisível por 5. Para que um número seja divisível por 5, deve terminar em 0 ou 5. Para que $p - 2$ termine em 5, p deve terminar em 7 (impossível, pois p é par). Então $p - 2$ só pode terminar em 0, o que só acontece quando p termina em 2. Portanto, restam-nos apenas 4 possibilidades:

$$\begin{array}{ccccc} 42 & \cancel{44} & \cancel{46} & \cancel{48} & \cancel{50} \\ 52 & \cancel{54} & \cancel{56} & \cancel{58} & \cancel{60} \\ 62 & \cancel{64} & \cancel{66} & \cancel{68} & \cancel{70} \\ 72 & \cancel{74} & \cancel{76} & \cancel{78} & \end{array}$$

Teremos de usar agora o fato de que $p = 3y + 1$, ou seja, de que $p - 1 = 3z$. Isso nos diz que $p - 1$ é múltiplo de 3. Há apenas quatro possibilidades para p: $42, 52, 62, 72$. Portanto, há apenas quatro possibilidades para $p - 1$: $41, 51, 61, 71$. O único divisível por 3 é 51. Logo $p - 1 = 51$ e, portanto, $p = 52$, excluindo todos os casos

$$\begin{array}{ccccc} \cancel{42} & \cancel{44} & \cancel{46} & \cancel{48} & \cancel{50} \\ 52 & \cancel{54} & \cancel{56} & \cancel{58} & \cancel{60} \\ \cancel{62} & \cancel{64} & \cancel{66} & \cancel{68} & \cancel{70} \\ \cancel{72} & \cancel{74} & \cancel{76} & \cancel{78} & \end{array}$$

Agora vamos para o cálculo das quantidades de retiradas. Para o cálculo de x, basta usarmos que $p = 2x$:

$$\begin{aligned} p &= 2x \\ 52 &= 2x \\ x &= \frac{52}{2} \\ x &= 26. \end{aligned}$$

Para o cálculo de y:

$$\begin{aligned} 3y + 1 &= 52 \\ 3y &= 52 - 1 \\ 3y &= 51 \\ y &= \frac{51}{3} \\ y &= 17. \end{aligned}$$

Finalmente, para o cálculo de z:

$$\begin{aligned} 5z + 2 &= 52 \\ 5z &= 52 - 2 \\ 5z &= 50 \\ z &= \frac{50}{5} \\ z &= 10. \end{aligned}$$

Agora, verifiquemos alternativa por alternativa (lembrando que o desejo aqui é verificar aquilo que é falso):

(a) $26 + 17 + 10 = 53$ que é, de fato, maior que $p = 52$.

(b) 26 e 17 são, de fato, primos entre si (o MDC entre ambos é 1).
(c) Façamos o cálculo: $\frac{1}{3}p = \frac{1}{3} \cdot 52 = \frac{52}{3}$. Como $y = 17 = \frac{51}{3}$, é verdadeiro que $\frac{51}{3} < \frac{52}{3}$.
(d) $x - z = 26 - 10 = 16$, não é ímpar. Essa é a alternativa falsa.

Gabarito: D

(EPCAR-2017) QUESTÃO 29

Uma agência de turismo fez um levantamento para apurar a faixa etária de um grupo de N pessoas que se interessaram por determinada viagem.

No registro das idades dessas pessoas, em anos, foram utilizados exatamente N números inteiros positivos e entre esses números foi observado que:

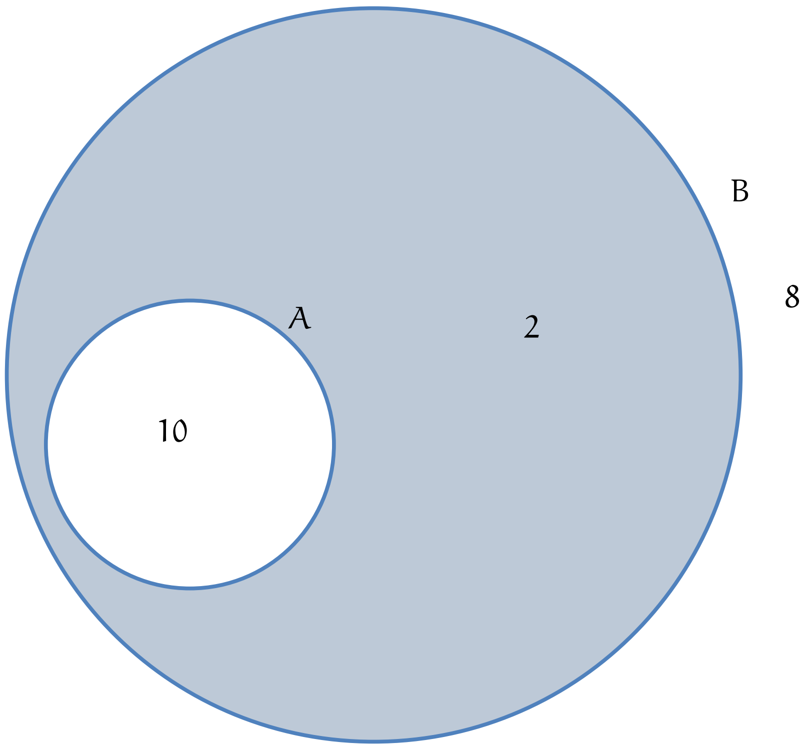
- 10 eram múltiplos de 8,
- 12 eram múltiplos de 4 e
- 8 eram números primos.

É correto afirmar que número de divisores positivos de N é igual a

(a) 7
(b) 6
(c) 5
(d) 4

R:

Essa é uma questão que envolve um pouco da teoria de conjuntos. Vamos dar uma olhada. Fiz dois conjuntos para você o conjunto B, dos números múltiplos de 4 e o conjunto A dos números múltiplos de 8. Veja que, se um número é múltiplo de 8 então necessariamente será múltiplo de 4. Logo $A \subset B$ (A está contido em B). Veja:



Aquele 2 ali não está equivocado não. O que acontece é que o conjunto B tem de ter 12 elementos, mas 10 já estão em A. Então os outros 2 estão no interior de B porém fora de A (isto é, no conjunto $B - A$). E como 8 são primos, coloquei-os do lado de fora, por não serem múltiplos de 4. Havia, então, $N = 10 + 2 + 8 = 20$ inteiros positivos dessa idades recolhidas.

Para sabermos a quantidade de divisores de 20, basta fatorá-lo (apesar de que 20 é razoavelmente simples de esgotar: $1, 2, 4, 5, 10, 20$, total de 6 divisores):

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Logo $20 = 2^2 \cdot 5$. Então a quantidade de divisores será: $3 \cdot 2 = 6$.

QUESTÃO 30

Considere (em ordem crescente) três números naturais sucessivos, cuja soma seja igual a 30. O produto desses números vale:

(a) 90
(b) 99
(c) 110
(d) 990
(e) 1330

R: Como os números naturais são sucessivos, têm de ter a seguinte forma: n, $n+1$ e $n+2$. A soma é 30, logo:

$$\begin{aligned} n+n+1+n+2 &= 30 \\ 3n+3 &= 30 \\ 3n &= 27 \\ n &= 9. \end{aligned}$$

Logo os números são 9, 10 e 11 e, assim, o produto dos mesmos é $9 \cdot 10 \cdot 11 = 990$.

Gabarito: D

QUESTÃO 31

Considere (em ordem crescente) três números pares consecutivos, cuja soma seja igual a 30. O produto desses números vale:

(a) 80
(b) 96
(c) 120
(d) 960
(e) 1440

R: Como os números pares são consecutivos, têm de ter a seguinte forma: n, $n+2$ e $n+4$. A soma é 30, logo:

$$\begin{aligned} n+n+2+n+4 &= 30 \\ 3n+6 &= 30 \\ 3n &= 24 \\ n &= 8. \end{aligned}$$

Logo os números são 8, 10 e 12 e, assim, o produto dos mesmos é $8 \cdot 10 \cdot 12 = 960$.

Gabarito: D

(FUZILEIRO NAVAL-2005) QUESTÃO 32

Se $N = 2 \cdot 7$ e $M = 2^2 \cdot 7$, então a alternativa correta é:

(a) N é primo.
(b) M é divisor de N.
(c) M é múltiplo de 5.
(d) N é múltiplo de 4.
(e) O produto de M por N é múltiplo de 49.

R: É claro que você pode simplesmente fazer as contas e pronto. Mas por quês de conteúdo, criticarei cada alternativa usando apenas os fatores primos que ele nos apresentou. Veja:

(a) N *é primo:* Não, visto que há mais de um fator primo (2 e 7).
(b) M *é divisor de* N*:* Não; veja que M tem um fator primo a mais que N, o 2.
(c) M *é múltiplo de* 5*:* Não, porque não há nenhum fator 5 em sua decomposição.
(d) N *é múltiplo de* 4*:* Não pode ser, visto que há apenas um fator 2 em sua decomposição.
(e) *O produto de* M *por* N *é múltiplo de* 49*:* De fato; tanto M quanto N tem um fator 7 que, multiplicados, geram 49.

Gabarito: E

(FUZILEIRO NAVAL-2006) QUESTÃO 33

Que fatores aparecem na decomposição em fatores primos, do denominador de uma fração decimal?

(a) 1 e 2
(b) 2 e 5
(c) 3 e 5
(d) 5 e 10
(e) 5 e 100

R: Uma fração é dita decimal quando o seu denominador vale 10. Decompondo o 10:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 10 tem dois fatores primos: 2 e 5

Gabarito: B

(FUZILEIRO NAVAL-2008) QUESTÃO 34

Fatorando-se o número 23760, obtém-se

(a) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$
(b) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 11$
(c) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$
(d) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11$
(e) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11$

R: Vamos então à fatoração:

$$\begin{array}{r|l} 23760 & 2 \\ 11880 & 2 \\ 5940 & 2 \\ 2970 & 2 \\ 1485 & 3 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Então: $23760 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$.

Gabarito: A

(FUZILEIRO NAVAL-2008) QUESTÃO 35

Ao decompor o número natural 495 em fatores primos, você obtém $3^m \cdot 5^n \cdot 11^p$. Qual é o valor de $m + n + p$?

(a) 2
(b) 4
(c) 6
(d) 8
(e) 10

R: Façamos a fatoração:

$$\begin{array}{r|l} 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Temos então: $495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Daí: $m = 2$, $n = 1$ e $p = 1$ (veja que estamos comparando os expoentes), e portanto: $m + n + p = 2 + 1 + 1 = 4$.

Gabarito: B

(FUZILEIRO NAVAL-2011) QUESTÃO 36

Qual das respostas abaixo representa um produto de fatores primos?

(a) $2 \cdot 5 \cdot 10$
(b) $2 \cdot 3 \cdot 7$
(c) $3 \cdot 7 \cdot 15$
(d) $4 \cdot 3 \cdot 5$
(e) $4 \cdot 10 \cdot 15$

R: A única opção que apresenta apenas fatores primos é a opção B, como pode se verificar.

Gabarito: B

(FUZILEIRO NAVAL-2013) QUESTÃO 37

Determine o menor algarismo que deve ser colocado no lugar do x para que o número $23435x$ seja divisível por 6.

(a) 0
(b) 2
(c) 4
(d) 6
(e) 8

R: Para que um número seja divisível por 6, ele deve ser divisível por 2 e 3, simultaneamente. Logo, x deve ser um algarismo par: $0, 2, 4, 6$ ou 8, e também deve ser um algarismo tal que, somado com os anteriores do número, seja divisível por 3. Veja que $2+3+4+3+5=17$. Logo, o menor algarismo par que somamos a 17 para tornar a soma divisível por 3 é 4, visto que $17+4=21$, que é divisível por 3, de fato.

Gabarito: C

(EEAR-2001) QUESTÃO 38

Considere as afirmativas:

I. Numa divisão, cujo resto r não é nulo, o menor número que se deve adicionar ao dividendo para que ela se torne exata é $d - r$, sendo d o divisor.

II. A soma de três números naturais consecutivos é sempre divisível por 3.

III. O produto de dois números ímpares consecutivos, aumentado de uma unidade é sempre um quadrado perfeito.

São verdadeiras as afirmativas:

(a) I e II.
(b) I e III.
(c) II e III.
(d) I, II e III.

R: Comentemos opção por opção:

I. Façamos essa divisão com algo que conheçamos. Por exemplo, faça 7 dividido por 3:

$$\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array}$$

Então, ao ser dividido por 3, o resto deixado por 7 é 1. Como eu faria para conseguir mais um grupo de 3, para que a divisão seja exata? Ora, se sobrou 1, basta somar 2 que eu consigo mais um grupo de 3, correto? Se quiséssemos, por exemplo, dividir 7 balas dentre três crianças, sobraria uma bala. Se adquiríssemos mais duas balas, porém, formaríamos um outro trio, e nada sobraria. É uma boa intuição então para percebermos que o menor número a ser somado sempre será o valor do divisor subtraído do resto. Veja:

Façamos a divisão não-exata de D por d:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} R & q \end{array}$$

Então, $D = d \cdot q + R$. Somando $d - R$ em ambos os membros:

$$
\begin{aligned}
D &= d \cdot q + R \\
D + (d - R) &= d \cdot q + R + (d - R) \\
D + (d - R) &= d \cdot q + \cancel{R} + (d \cancel{-R}) \\
D + (d - R) &= d \cdot q + d \\
D + (d - R) &= d \cdot (q + 1)
\end{aligned}
$$

Veja então que o membro esquerdo acabou se tornando divisível pelo direito e, de fato, é o menos número possível a ser somado.

II. Três números naturais consecutivos podem ser expressos por: n, $n+1$ e $n+2$, $n \in \mathbb{N}$. Somando esses três números:

$$
\begin{aligned}
n + n + 1 + n + 2 &= 3n + 3 \\
&= 3 \cdot (n + 1)
\end{aligned}
$$

Portanto, de fato, sempre teremos uma soma divisível por 3.

III. Um número ímpar sempre pode ser expresso por $2n+1$, sendo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, dois ímpares consecutivos seriam $2n+1$ e $2n+3$, já que ímpares pulam de dois em dois. Multiplicando esses números:

$$
\begin{aligned}
(2n+1)(2n+3) &= 4n^2 + 6n + 2n + 3 \\
&= 4n^2 + 8n + 3.
\end{aligned}
$$

Somando 1 ao encontrado, obtemos:

$$
\begin{aligned}
4n^2 + 8n + 3 + 1 &= 4n^2 + 8n + 4 \\
&= 4 \cdot (n^2 + 2n + 1) \text{ (colocando em evidência)} \\
&= 4 \cdot (n+1)^2 \text{ (Fatorando o quadrado perfeito)} \\
&= 2^2 \cdot (n+1)^2
\end{aligned}
$$

$$= [2(n+1)]^2.$$

Então, de fato, sempre teremos um quadrado perfeito.

Gabarito: D

(EEAR-2002) QUESTÃO 39

Se x, y, e z são números naturais diferentes entre si, e $x = y \cdot z$, então é falsa a afirmativa:

(a) x é múltiplo de z.
(b) y é divisor de x.
(c) y é divisível por z.
(d) x é divisível por y.

R: Faça um exemplo mais numérico. Vejamos, $10 = 2 \cdot 5$. O que podemos dizer sobre esses números? Bom, podemos dizer que 10 é múltiplo de 2 e de 5, podemos dizer que 2 é divisor de 10 assim como 5 também sê-lo-á. Podemos também dizer que 10 é divisível por 2 e 5, porém não podemos fazer qualquer tipo de afirmação entre 2 e 5, sozinhos.
Análogo ao que foi pedido, sabendo que $x = y \cdot z$, nada podemos afirmar quanto a y e z.

Gabarito: C

(EEAR-2002) QUESTÃO 40

Se K é um número inteiro, $K^2 + K$ é necessariamente um

(a) múltiplo de 2.
(b) múltiplo de 3.
(c) produto de dois números ímpares.
(d) produto de dois números primos.

R: Veja que $K^2 + K = K(K+1)$ que é o produto de dois números consecutivos. Se são dois números consecutivos um dos dois será inevitavelmente par. Se um dos dois é par, então esse número será com certeza múltiplo de 2.

Gabarito: A

(EEAR-2003) QUESTÃO 41

Leia as sentenças abaixo.

I. Todo número natural que termina em 3 é divisível por 3.

II. Todo número natural divisível por 2 é também divisível por 4.

III. Existem números naturais terminados em 2 que são divisíveis por 4.

IV. Todo número natural divisível por 10 é também divisível por 2 e 5.

V. Existem números naturais terminados em 4 que são divisíveis por 3.

VI. Existem números naturais divisíveis por 6 que não são divisíveis por 2.

Está correto o que se afirma em

(a) I e II apenas.
(b) I, II e III apenas.
(c) III, IV e V apenas.
(d) I, II, III, IV, V e VI.

R: Analisemos sentença por sentença

I. *Todo número natural que termina em 3 é divisível por 3:* Não é verdade. O número 13 termina em 3 e não é divisível por 3 (é primo, inclusive).

II. *Todo número natural divisível por 2 é também divisível por 4:* Não necessariamente. O próprio 2 é divisível por si mesmo mas não o é por 4.

III. *Existem números naturais terminados em 2 que são divisíveis por 4:* Sim, existem! O 12, por exemplo, o 32, etc.

IV. *Todo número natural divisível por 10 é também divisível por 2 e 5:* Verdade! Se o número é divisível por 10 então deverá conter, em sua decomposição prima, todos os fatores primos do 10. Os fatores primos do 10 são 2 e 5, portanto, o número em si terá de ser, de fato, divisível por 2 e 5.

V. *Existem números naturais terminados em 4 que são divisíveis por 3:* Sim, verdade! O 24, por exemplo, o 54, etc.

VI. *Existem números naturais divisíveis por 6 que não são divisíveis por 2:* Impossível. Se é divisível por 6 o número deve ser necessariamente par e portanto deverá ser divisível por 2.

Gabarito: C

(EEAR-2004) QUESTÃO 42

Decompondo-se o número natural 3500 em fatores primos a, b e c, obtém-se o produto $a^m \cdot b^n \cdot c^p$. Se $a < b < c$, então é falso afirmar que

(a) $m + p = n$.
(b) $mn = m + n + p$.
(c) $n - m = p$.
(d) $n : m = p$.

R: Façamos a decomposição:

$$\begin{array}{r|l} 3500 & 2 \\ 1750 & 2 \\ 875 & 5 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Temos então que: $3500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^1$ e, portanto, $m = 2$, $n = 3$ e $p = 1$. Veja então que $n : m = 3 : 2 \neq p$ e portanto a alternativa D é falsa. Aconselho que você, estudante, verifique que as outras são verdadeiras!

Gabarito: D

(ESSA-2007) QUESTÃO 43

Se decompusermos em fatores primos o produto dos números naturais de 1 a 200 e escrevermos os fatores comuns em uma única base, o expoente do fator 5 será:

(a) 46
(b) 49
(c) 48
(d) 45
(e) 47

R: Encontremos quantos múltiplos de 5 há entre 1 e 200: o primeiro é 5 e o último é 200. Logo há um número n de múltiplos de 5 tal que:

$$
\begin{aligned}
200 &= 5 + (n-1)\cdot 5 \\
(n-1)\cdot 5 &= 200 - 5 \\
n - 1 &= 40 - 1 \\
n &= 40.
\end{aligned}
$$

Dentre esses 40 múltiplos, existem potências de 5 com expoente máximo 3 (pois $5^4 = 625 > 200$). Com expoente 3 temos apenas o 125. Então temos 1 múltiplo de 5 com fator 5^3 e 39 deles sem esse fator (ou seja, com o fator 5^1 ou 5^2). Com expoente 2 temos todos os múltiplos de 25 com exceção do 125: o primeiro é o próprio 25 e o último é o 200. Logo há um total p tal que

$$
\begin{aligned}
200 &= 25 + (p-1)\cdot 25 \\
(p-1)\cdot 25 &= 200 - 25 \\
p - 1 &= 8 - 1 \\
p &= 8.
\end{aligned}
$$

Há, então, uma quantidade de 8 múltiplos com fator 5^2; como não conta o 125, há apenas 7. Temos então a seguinte contagem final: 1 número com fator 5^3, 7 números com fator 5^2 e o resto

$40 - 1 - 7 = 32$ números com fator 5^1. Quando esses fatores se multiplicarem o expoente final será: $5^{1\cdot3+7\cdot2+32\cdot1} = 5^{3+14+32} = 5^{49}$.

Gabarito: B

(ESSA-2013) QUESTÃO 44

Os números naturais eram inicialmente utilizados para facilitar a contagem. Identifique a alternativa que apresenta um número natural.

(a) -4
(b) 8
(c) $\sqrt{-7}$
(d) $-\frac{8}{3}$
(e) $\sqrt{5}$

R: Essa daí veio de brinde! É claro que dentre as alternativas, a única que apresenta um número natural é aquela com o número 8. Nenhum dos outros é natural (inclusive, $\sqrt{-7}$ nem real é).

Gabarito: B

2.0– MDC E MMC

Esse será um capítulo pequeno, apesar de se tratar de um assunto extremamente vasto e de aplicações inúmeras. Mas vamos lá falar sobre essas clássicas siglas que tanto ouvimos em nosso ensino primário. Vamos lá!

2.1– MDC

Considere os números a seguir: 24 e 36. Quais são os divisores de 24? Fazendo a nossa técnica de fatoração, encontraremos para o 24: $\mathrm{D}(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. Já para o 36, teremos: $\mathrm{D}(36) = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$. Agora a pergunta: existem fatores em comum entre o 24 e o 36? Isto é, existem elementos em $\mathrm{D}(24) \cap \mathrm{D}(36)$? Existem, correto? São os elementos: $\mathrm{D}(24) \cap \mathrm{D}(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Esses são todos os divisores comuns aos dois conjuntos. Agora, pergunta: qual foi o maior deles? Ora, é claro: foi o 12, correto? Ele foi o máximo divisor comum entre os dois números dados. Então dizemos que 12 é o MDC entre 24 e 36. Escrevemos: mdc$(24, 36) = 12$.

Aprendamos, entretanto, a calcular o MDC de uma forma um pouco diferente e mais prática. É exatamente como a fatoração, só que ao invés de fatorarmos um número, fatoramos dois ou mais. Vejamos então o cálculo do MDC entre 24 e 36.

Começamos armando a fatoração, porém, colocando os dois números ao invés de um só:

$$\begin{array}{rr|} 24 & 36 \end{array}$$

Agora, achamos o primeiro primo que divida *os dois números ao mesmo tempo*. Caso não exista um primo que divida os dois números ao mesmo tempo, dá-se como encerrado o processo de fatoração. Vejamos:

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 36 & 2 \\ 12 & 18 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & \end{array}$$

Veja que não existe nenhum primo que divida 2 e 3 ao mesmo tempo. Por isso, o MDC será: $2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$. Ok? De boas?

A grande utilidade do MDC é encontrar um valor maior que divida ao mesmo tempo duas grandezas. Suponha por exemplo que queiramos formar grupos de alunos em duas escolas, de modo que cada grupo *tenha o mesmo número de estudantes*. Uma das escolas (digamos a escola A) tem 24 alunos e a outra (escola B) tem 36 alunos. Qual a quantidade máxima de alunos em cada grupo?

Eu poderia, por exemplo, formar duplas de alunos. Concorda? Ficariam 12 duplas na escola A e 18 duplas na escola B. Nesse caso, cada grupo teria dois alunos. Mas esse é o máximo de estudantes? Claro que não, eu poderia formar trios, por exemplo. Poderia formar quartetos também. É claro também que eu não poderia formar grupos de 8 alunos, porque apesar de 24 ser divisível por 8, o 36 não o é. Então, afinal, qual é o máximo de alunos que eu poderia ter em cada grupo? Ora, deverá ser o maior número que divida ambas as quantidades de alunos em ambas as escolas. Então deverá ser o MDC entre 24 e 36, que é 12. Sei que já fizemos a fatoração dele aqui, mas quero fazer de novo para apontar algo importante. Veja:

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 36 & 2 \\ 12 & 18 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & \end{array}$$

Percebe os dois números que sobraram ao final das duas colunas? No final da coluna do 24, sobrou o número 2. Já no final da coluna do número 36, sobrou o número 3. Esses números constituem o total de grupos em cada escola! Incrível, não é? Haverá 2 grupos de 12 alunos na escola A, e 3 grupos de 12 alunos na escola B.

Números primos entre si

Uma definição rápida: dois números serão ditos *primos relativos* ou *primos entre si* quando o MDC entre esses números for igual a 1. Isso significa que haverá apenas um divisor em comum entre esses dois números: o 1.

Veja por exemplo, 4 e 9. Perceba que eles não são primos. Mas o MDC entre eles é 1. Então podemos dizer que 4 e 9 são números primos entre si.

Método das divisões sucessivas de Euclides

Trata-se de um algoritmo para o cálculo do MDC. Sua prova cobra esse método, então, vamos entendê-lo.

Suponha que queiramos calcular o MDC entre 144 e 196. O que fazemos para resolver esse problema? Bom, podemos resolvê-lo fazendo a fatoração, normalmente; mas também podemos resolvê-lo utilizando o método que descrevo a seguir. Inicialmente, criamos uma espécie de jogo da velha, como o abaixo. Na linha do meio, escrevemos os dois números, colocando o maior à esuqerda e o menor à direita:

196	144				

Agora, efetue a divisão entre os dois números:

$$\begin{array}{r|l} 196 & 144 \\ \hline 52 & 1 \end{array}$$

Escreva o quociente acima do menor número (divisor) e o resto abaixo do maior (dividendo):

	1				
196	144				
52					

Agora, um passo importante: reescreva o resto encontrado ao lado do último divisor (no caso, o 144):

	1				
196	144	52			
52					

Isso, coruja! Agora, continuaremos fazendo o mesmo: dividiremos o maior pelo menor que acabamos de encontrar (no nosso atual caso, dividiremos o 144 pelo 52), escreveremos o quociente acima, o resto abaixo, e daí reescrevemos o resto ao lado do último divisor. E assim prosseguimos até que a nossa divisão dê resto nulo. O último divisor será o nosso famigerado MDC! Vamos então continuar o processo.

	1	2	1	3	3
196	144	52	40	12	4
52	40	12	4	0	

Assim, o MDC entre 196 e 144 é 4, o último divisor da nossa sucessão de divisões.

2.2– MMC

Vamos novamente começar a entender o que vem a ser um MMC por um exemplo. Considere os números 4 e 7. Quais são os múltiplos de 4? Ora, basta irmos somando de quatro em quatro, certo? Então, são: $4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, \ldots$; e quais são os múltiplos de 7? Ora, são: $7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, \ldots$; agora, à pergunta: houve algum múltiplo comum aos dois? Houve, correto? Houve o $28, 56, \ldots$. E qual foi o menor desses múltiplos comuns? Observando vemos que foi o 28. O 28 é, portanto, o mínimo múltiplo comum entre 4 e 7, ou seja, o MMC entre 4 e 7. Escreve-se: $\text{mmc}(4, 7) = 28$.

Como calculamos o MMC? Praticamente da mesma forma que o MDC, mas com uma diferença: dessa vez ao fatorar, tanto faz se o fator primo divide ou não todos ao mesmo tempo; contanto que divida um, já está de bom tamanho. Então, vejamos como funciona. Calculemos, por exemplo, o MMC entre 18 e 20. Iniciamos a fatoração:

$$\begin{array}{rr|l}
18 & 20 & 2 \\
9 & 10 & 2 \\
9 & 5 & 3 \\
3 & 5 & 3 \\
1 & 5 & 5 \\
1 & 1 &
\end{array}$$

Vê que fomos utilizando os fatores primos sem a necessidade de ter de dividir ambos os números. Essa é a diferença entre o cálculo do MDC e o cálculo do MMC.

Relação entre o MMC e o MDC

Aqui, novamente sem me preocupar com a demonstração, enuncio um importante teorema sobre o MDC e o MMC. Se você calcular o MDC entre 24 e 36, encontrará 12. Se você calcular o MMC entre 24 e 36 encontrará 72. Agora, multiplique 12 por 72. Encontrará 864. E se você multiplicar 24 por 36 também encontrará 864. Então:

$$\text{mdc}(a, b) \cdot \text{mmc}(a, b) = a \cdot b$$

Vejamos então questões sobre esses assuntos. Vamos lá.

QUESTÕES COMENTADAS

(CN-1999) QUESTÃO 45

Para registrar o resultado da operação $2^{101} \cdot 5^{97}$, o número de dígitos necessários é:

(a) 96
(b) 97
(c) 98
(d) 99
(e) 100

R: Veja que $2^{101} = 2^{97} \cdot 2^4$. Então:

$$\begin{aligned} 2^{101} \cdot 5^{97} &= 2^4 \cdot 2^{97} \cdot 5^{97} \\ &= 2^4 \cdot (2 \cdot 5)^{97} \\ &= 16 \cdot (10)^{97}. \end{aligned}$$

Trata-se do número 16 seguido de 97 algarismos zero. Temos então $97 + 2 = 99$ algarismos.

Gabarito: D

(CN-2000) QUESTÃO 46

Dois sinais luminosos fecham juntos num determinado instante. Um deles permanece 10 segundos fechado e 50 segundos aberto, enquanto o outro permanece 10 segundos fechado e 40 segundos aberto. O número mínimo de segundos necessários, a partir daquele instante, para que os dois sinais voltem a fechar juntos outra vez é de:

(a) 110
(b) 120
(c) 150
(d) 200
(e) 300

R: Um dos sinais, por permanecer 10 segundos fechado e 50 segundos aberto, levará 60 segundos para fechar novamente, após ter fechado uma vez. O outro, pelo mesmo raciocínio, levará 50 segundos. Fazendo o MMC entre os dois:

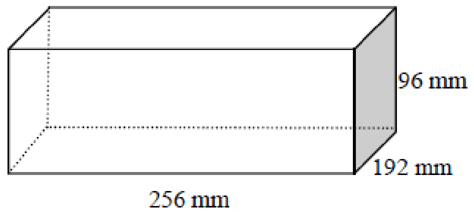
$$\begin{array}{cc|c} 50 & 60 & 2 \\ 25 & 30 & 2 \\ 25 & 15 & 3 \\ 25 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

O MMC é: $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 4 \cdot 3 \cdot 25 = 300$ segundos.

Gabarito: E

(CN-2001) QUESTÃO 47

Um pedaço de doce de leite tem a forma de um paralelepípedo, com suas faces retangulares, como indica a figura abaixo.



O doce deve ser dividido totalmente em cubos iguais, cada um com x mm de aresta. O maior valor inteiro de x é:

(a) 16
(b) 18

(c) 24
(d) 30
(e) 32

R: Para que possamos dividir essas dimensões devemos achar o maior número que divide os três ao mesmo tempo. Então, calculemos o MDC entre 256, 192 e 96:

$$\begin{array}{rrr|l} 256 & 192 & 96 & 2 \\ 128 & 96 & 48 & 2 \\ 64 & 48 & 24 & 2 \\ 32 & 24 & 12 & 2 \\ 16 & 12 & 6 & 2 \\ 8 & 6 & 3 & \end{array}$$

O MDC é $2^5 = 32\,\text{mm}$.

Gabarito: E

(CN-2001) QUESTÃO 48

O mínimo múltiplo comum entre dois números naturais a e b é 360 e $ab = 3600$. Qual o menor valor que $a + b$ pode assumir?

(a) 120
(b) 130
(c) 150
(d) 200
(e) 370

R: Sabemos que $\text{mdc}(a, b) \cdot \text{mmc}(a, b) = a \cdot b$. Então:

$$\text{mdc}(a, b) \cdot 360 = 3600$$
$$\text{mdc}(a, b) = 10.$$

Isso significa que ambos a e b são divisíveis por 10. Como o produto entre a e b, que é 3600, termina em dois zeros, temos que cada um dels, a e b finaliza com um zero único. As possibilidades são: 10 e 360, 20 e 180, 30 e 120, 40 e 90, 60 e 60.
A menor soma é de $40 + 90 = 130$.

Gabarito: B

(CN-2002) QUESTÃO 49

Se a, b e c são algarismos distintos, no sistema de numeração decimal existe um único número de dois algarismos (ab) tal que $(ab)^2 - (ba)^2 = (cc)^2$. O valor de $(a+b+c)$ é igual a:

(a) 11
(b) 12
(c) 13
(d) 14
(e) 15

R: Veja que $(ab) = 10a + b$, $(ba) = 10b + a$, $(cc) = 10c + c = 11c$. Então:

$$\begin{aligned}
(ab)^2 - (ba)^2 &= (cc)^2 \\
(10a+b)^2 - (10b+a)^2 &= (11c)^2 \\
100a^2 + 20ab + b^2 - (100b^2 + 20ab + a^2) &= 11^2 \cdot c^2 \\
100a^2 + 20ab + b^2 - 100b^2 - 20ab - a^2 &= 11^2 \cdot c^2 \\
99a^2 - 99b^2 &= 11^2 \cdot c^2 \\
99(a^2 - b^2) &= 11^2 \cdot c^2 \\
9 \cdot 11 \cdot (a^2 - b^2) &= 11^2 \cdot c^2 \\
9 \cdot (a^2 - b^2) &= 11 \cdot c^2 \\
9 \cdot (a+b) \cdot (a-b) &= 11 \cdot c^2.
\end{aligned}$$

Assim, por exclusão e comparação: $c^2 = 9$ e daí, $c = 3$. Também: $(a+b)(a-b) = 11$. Como 11 é primo, temos:

$$\begin{cases} a + b = 11 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

Somando as duas equações: $2a = 12$ e daí, $a = 6$. Claro então que $b = 5$. Concluímos que $a + b + c = 6 + 5 + 3 = 14$.

Gabarito: D

(CN-2003) QUESTÃO 50

Se $\text{mmc}(x, y) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ e $\text{mdc}(x, y) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, x e y números naturais, quantos são os valores possíveis para x?

(a) 16
(b) 8
(c) 6
(d) 4
(e) 2

R: Dado o informado, podemos assumir que x deve ser da forma $2^3 \cdot 3^m \cdot 5^n \cdot 7^p$. Veja que existem dois valores possíveis para m (2 e 3), há dois valores possíveis para n (1 e 2) e dois valores possíveis para p (0 e 1). Logo há um total de $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibilidades para x.

Gabarito: B

(CN-2005) QUESTÃO 51

	1	1	2
A	B	C	40
D	E	0	

O algoritmo acima foi utilizado para o cálculo do máximo divisor comum entre os números A e B. Logo $A + B + C$ vale

(a) 400
(b) 300
(c) 200
(d) 180
(e) 160

R: Temos aqui o método das divisões sucessivas de Euclides. De acordo com o exposto, primeiramente temos que A dividido por B dá quociente 1 e resto D, de forma que $A = B \cdot 1 + D$. Como o resto deve se repetir ao lado do último divisor, temos que $C = D$. Daí, B dividido por C gera quociente 1 e resto E, permitindo-nos escrever: $B = C \cdot 1 + E$. Seguindo, temos que $E = 40$ e, finalmente, C dividido por 40 gera quociente 2 e resto nulo, permitindo-nos escrever $C = 40 \cdot 2 + 0 = 80$.

Obtivemos então as seguintes equações:

$$\begin{cases} A = B + D \\ C = D \\ B = C + E \\ E = 40 \\ C = 80 \end{cases}$$

Temos então que $B = C + E = 80 + 40 = 120$. Então, $D = C = 80$ e, portanto, $A = B + D = 120 + 80 = 200$. Assim, temos $A + B + C = 200 + 120 + 80 = 400$.

Gabarito: A

(CN-2005) QUESTÃO 52

$$\begin{array}{ccc|c} a & b & c & 2 \\ a & x & x & 2 \\ a & x & x & 2 \\ a & x & x & 3 \\ x & x & x & 3 \\ x & x & x & 3 \\ x & x & x & 5 \\ x & x & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

No algoritmo acima, tem-se a decomposição simultânea em fatores primos dos números a, b e c, onde x está substituindo todos os números que são diferentes de a, b, c e 1. Analise as afirmativas abaixo.

I. a certamente é múltiplo de 36.

II. b certamente é múltiplo de 30.

III. c certamente é múltiplo de 35.

Assinale a opção correta.

(a) Apenas a afirmativa I é falsa.
(b) Apenas a afirmativa II é falsa.
(c) Apenas a afirmativa III é falsa.
(d) Apenas as afirmativas II e III são falsas.
(e) As afirmativas I., II e III são falsas.

R: Inicialmente, vamos dar nome às linhas, para que o estudante acompanhe com mais facilidade:

$$\begin{array}{ccc|cl} a & b & c & 2 & \leftarrow \text{1ª linha} \\ a & x & x & 2 & \leftarrow \text{2ª linha} \\ a & x & x & 2 & \leftarrow \text{3ª linha} \\ a & x & x & 3 & \leftarrow \text{4ª linha} \\ x & x & x & 3 & \leftarrow \text{5ª linha} \\ x & x & x & 3 & \leftarrow \text{6ª linha} \\ x & x & x & 5 & \leftarrow \text{7ª linha} \\ x & x & 1 & 7 & \leftarrow \text{8ª linha} \\ 1 & 1 & 1 & & \leftarrow \text{9ª linha} \end{array}$$

Vamos então às possíveis conclusões a partir do MMC exposto:

- Da 1ª para a 2ª linha, podemos concluir que b e c são divisíveis por 2;
- Da 4ª linha para a 5ª linha, podemos concluir que a é divisível por 3;
- Da 7ª para a 8ª, podemos concluir que c é divisível por 5;
- Da 8ª para a 9ª linha podemos concluir que a e b são divisíveis por 7.

Então temos que a é divisível por 3 e 7 (portanto, divisível por 21); b é divisível por 2 e 7 (portanto divisível por 14); c é divisível por 2 e 5 (portanto divisível por 10). Disso, percebemos que todas as três afirmativas são falsas.

Gabarito: E

(EPCAR-2010) QUESTÃO 53

Um número x de três algarismos, tal que $\sqrt{x} < 14$, tem o produto de seus algarismos igual a 24; se permutarmos os dois últimos algarismos de x, o número y assim obtido excede x de 18 unidades.

Com base nos dados acima, é correto afirmar que

(a) o máximo divisor comum de y e x NÃO é um número primo.
(b) a razão $r = \frac{x}{y}$ é tal que $r > \frac{37}{41}$.
(c) y tem 2 divisores a mais que x.
(d) a soma dos algarismos de x com os algarismos de y é menor que 20.

R: Vamos por partes. Primeiro, quais são os algarismos que podemos utilizar? Ora, todos os algarismos em $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Bom, tudo começa usando o fato de que $\sqrt{x} < 14$. Eleve ao quadrado em ambos os membros: obteremos $x < 14^2 = 196$. Logo $x < 196$. Então x é um número de três digitos menor que esse valor. Descobrimos então o dígito das centenas de x: 1, certo? Então nos resta descobrir a dezena e a unidade. Sabemos que o produto dos seus algarismos é 24. Algarismos que se multipliquem em 24 são apenas quatro pares: 3 e 8; 4 e 6; 6 e 4; 8 e 3. Então há quatro candidatos para x

$$138;$$
$$146;$$
$$164;$$
$$183.$$

E como fazemos para escolher y? Bom, ele nos informa primeiro que y é "fabricado" a partir de x, trocando os seus dois últimos algarismos. Então, criemos todos os candidatos a y:

x	y
138	183
146	164
164	146
183	138

Mas também sabemos que y deve exceder x de 18 unidades. Apenas um desses casos cumpre essa necessidade: $x = 146$ e $y = 164$ (veja que, de fato, $164 - 146 = 18$). Agora, comentemos alternativa por alternativa:

(a) Calculemos o MDC entre 146 e 164

$$\begin{array}{cc|c} 146 & 164 & 2 \\ 73 & 82 & \end{array}$$

Veja que 2 é o MDC, e também é primo. Logo a alternativa é falsa.

(b) Vejamos se isso é verdade. Calculemos $\frac{x}{y}$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{146}{164} \\ &= \frac{73}{82} \end{aligned}$$

Veja também que $\frac{37}{41} = \frac{74}{82}$. Portanto, $\frac{x}{y} < \frac{74}{82} = \frac{37}{41}$, o contrário do que a alternativa nos informa. Alternativa falsa.

(c) Teremos de fatorar ambos os números:

$$\begin{array}{r|l} 146 & 2 \\ 73 & 73 \\ 1 & \end{array}$$

E portanto $146 = 2 \cdot 73$. Somando 1 a cada expoente e multiplicando-os: $2 \cdot 2 = 4$ divisores. Para o outro:

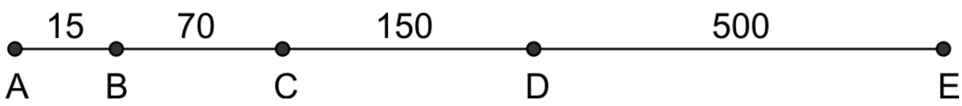
$$\begin{array}{r|l} 164 & 2 \\ 82 & 2 \\ 41 & 41 \\ 1 & \end{array}$$

Temos então que $164 = 2^2 \cdot 41$. Logo a quantidade de divisores será: $3 \cdot 2 = 6$. De fato, 164 tem dois divisores a mais que 146. Alternativa correta.

(d) Basta somar: $1 + 4 + 6 + 1 + 6 + 4 = 22$, que não é menor que 20.

Gabarito: C

(EPCAR-2011) QUESTÃO 54



Um agricultor fará uma plantação de feijão em canteiro retilíneo. Para isso, começou a marcar os locais onde plantaria as sementes. A figura abaixo indica os pontos já marcados pelo agricultor e as distâncias, em cm, entre eles.

Esse agricultor, depois, marcou outros pontos entre os já existentes, de modo que a distância d entre todos eles fosse a mesma e a maior possível.

Se x representa o número de vezes que a distância d foi obtida pelo agricultor, então x é um número divisível por

(a) 4
(b) 5
(c) 6
(d) 7

R: A quantidade de divisões será o MDC entre as extensões, visto que queremos que os tamanhos das mesmas sejam o máximo possível. Façamos então:

$$\begin{array}{rrrr|l} 15 & 70 & 150 & 500 & 5 \\ 3 & 14 & 30 & 100 & \end{array}$$

Então, cada pedaço medirá $5\,\text{cm}$, e, no total, haverá: $x = 3 + 14 + 30 + 100 = 147$, que é um número divisível por 7.

Gabarito: D

(EPCAR-2011) QUESTÃO 55

Sabe-se que x, y e z são números naturais distintos e $x > y$. Considere $A = x \cdot y$ e $B = (x \cdot y \cdot z)^2$ e que o $\text{mdc}(A, B)$ e o $\text{mmc}(A, B)$ são, respectivamente, 21 e 1764. Se $W = x^2 + y^2 + z^2$, então o conjunto formado pelos divisores naturais de W possui

(a) 4 elementos.
(b) 6 elementos.
(c) 9 elementos.

(d) 12 elementos.

R: Aprendemos que mdc $A, B \cdot$ mmc $A, B = A \cdot B$. Ainda, observemos a forma fatorada de 1764:

$$\begin{array}{r|l} 1764 & 2 \\ 882 & 2 \\ 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Então $1764 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$. Já mostrarei o porquê dessa fatoração ser essencial para essa resolução. Temos então:

$$\begin{aligned} \text{mdc}\, A, B \cdot \text{mmc}\, A, B &= A \cdot B \\ 21 \cdot 1764 &= x \cdot y \cdot (x \cdot y \cdot z)^2 \\ (3 \cdot 7) \cdot (2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2) &= x \cdot y \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \\ 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^3 &= x^3 \cdot y^3 \cdot z^2. \end{aligned}$$

Veja então que à esquerda e à direita da igualdade temos termos de mesmos expoentes se multiplicando. Podemos concluir, portanto, que $z = 2$. Quanto a x e y, parece que há duas possibilidades para ambos: 3 e 7. Porém, o problema nos afirma que $x > y$. Logo, $x = 7$ e $y = 3$. Calculando $W = 2^2 + 3^2 + 7^2 = 4 + 9 + 49 = 62$. Os divisores naturais de 62 são: $D(62) = \{1, 2, 31, 62\}$ sendo um conjunto de, portanto, 4 elementos.

Gabarito: A

(EPCAR-2012) QUESTÃO 56

Em um prédio de 90 andares, numerados de 1 a 90, sem contar o térreo, existem 4 elevadores que são programados para atender apenas determinados andares. Assim, o elevador

O para nos andares múltiplos de 11

S para nos andares múltiplos de 7

C para nos andares múltiplos de 5

T para em todos os andares.

Todos estes elevadores partem do andar térreo e funcionam perfeitamente de acordo com sua programação. Analise as afirmativas abaixo, classificando cada uma em V (verdadeira) ou F (falsa).

( ) No último andar para apenas 1 elevador.

( ) Não há neste prédio um andar em que parem todos os elevadores, com exceção do próprio térreo.

( ) Existem, neste prédio, 4 andares em que param 3 elevadores com exceção do próprio térreo.

Tem-se a sequência correta em

(a) F - V - V
(b) F - V - F
(c) V - F - V
(d) F - F - V

R: Analisemos afirmativa por afirmativa:

(F) Para que um elevador para em algum andar, o número associado a esse elevador deve dividir aquele andar. Então, por exemplo, é claro que o elevador O para nos andares 11, 22 e 33, pois são todos múltiplos de 11. Mas perceba que apesar de nem 7 e nem 11 dividirem 90, $5 divide$! Logo, haverá dois elevadores parando em 90: o C e o T.

(V) Para que esse prédio possua um andar aonde param todos os elevadores, algum dos andares deverá ser o MMC entre as restrições dadas pelos elevadores. Calcular o MMC entre números primos entre si é mole: é só multiplicar todos: $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$. Então, de 385 em 385 andares, haverá um andar em que param os três elevadores. Como o prédio tem apenas 90 andares, de fato, não há nesse prédio andar algum em que todos os elevadores parem (além do térreo).

(V) O elevador T já para em todos os andares. Então, estamos interessados em saber se outros dois também param. As combinações possíveis de elevadores são O, S; O, C e S, C. Analisemos cada uma delas.

O, S : Esses dois elevadores pararão nos andares que são múltiplos comuns de 11 e 7. O MMC entre esses dois números é $7 \cdot 11 = 77$. Logo, há apenas um andar aonde param os elevadores O, S e T: o andar 77.

O, C : Esses dois elevadores pararão nos andares que são múltiplos comuns de 11 e 5. O MMC entre esses dois números é $5 \cdot 11 = 55$. Logo, há apenas um andar aonde param os elevadores O, C e T: o andar 55.

S, C : Esses dois elevadores pararão nos andares que são múltiplos comuns de 5 e 7. O MMC entre esses dois números é $5 \cdot 7 = 35$. Aqui, porém, haverá dois andares para que parem os elevadores S, C e T: o andar 35, que é o próprio MMC, e o andar 70, porque é *múltiplo do MMC*!

Há portanto, quatro andares possíveis em que parem três elevadores: $35, 55, 70$ e 77.

Gabarito: A

(EPCAR-2009) QUESTÃO 57

Uma mulher tinha entre 20 e 55 ações de uma empresa para dividir igualmente entre todos os seus filhos. No ano de 2003, quando tinha 3 filhos, se fossem divididas as ações, sobrariam duas. Em 2005, nasceu mais um filho e, se dividisse igualmente entre os quatro filhos a mesma quantidade de ações, sobrariam três ações. No ano de 2007 essa mulher teve, para sua surpresa, dois filhos gêmeos e dividiu igualmente as ações entre os seus seis filhos, observando que sobraram cinco ações. Sabendo-se que a mulher não teve mais filhos e que o número total de ações foi mantido nesse período de 2003 a 2007, é INCORRETO afirmar que

(a) nas três situações citadas, a quantidade máxima comum de ações que a mulher poderia ter é um número tal que a soma de seus algarismos é ímpar.

(b) quando a mulher tinha apenas 3 filhos, cada um receberia no máximo 15 ações.

(c) em todas as situações citadas, existem três possibilidades comuns do número total de ações x, y e z, $(x < y < z)$, tal que y é a média aritmética de x e z

(d) se na partilha das ações entre seus seis filhos, cada filho recebeu o maior número possível x de ações, então x divide exatamente 48

R: Comecemos falando que N é o número de ações dessa mulher. Em 2003, caso dividisse essa quantidade pelo número de filhos (que na época eram três), sobrariam duas. Podemos então escrever:

$$\begin{array}{l|l} N & 3 \\ \hline 2 & q_1 \end{array}, \text{ e portanto: } N = 3q_1 + 2, \text{ ou } N + 1 = 3(q_1 + 1).$$

Em seguida, o número de filhos aumenta; em 2005 são $4.$ A nova divisão, segundo o problema, deixa resto $3.$ Logo:

$$\begin{array}{l|l} N & 4 \\ \hline 3 & q_2 \end{array}, \text{ e portanto: } N = 4q_2 + 3, \text{ ou } N + 1 = 4(q_2 + 1).$$

Em 2007 o número de filhos aumenta para $6.$ A nova divisão das ações deixa resto $5.$ Logo:

$$\begin{array}{l|l} N & 6 \\ \hline 5 & q_3 \end{array}, \text{ e portanto: } N = 6q_3 + 5, \text{ ou } N + 1 = 6(q_3 + 1).$$

Veja então que $N + 1$ é múltiplo de 3, 4 e 6. Logo, $N + 1$ deve ser múltiplo do MMC entre 3, 4 e 6, que é:

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

O MMC é, então, de $2^2 \cdot 3 = 12$. Como ela tem entre 20 e 55 ações, devemos achar os múltiplos de 12 que estejam nesse intervalo. Podemos simplesmente escrever os números: $24, 36, 48$.
Lembre-se, porém, que esses números encontrados são os valores de $N + 1$. Os valores de N serão, então, os antecessores imediatos de cada um desses valores: $23, 35, 47$. Essas são as possibilidades para a quantidade de ações dessa mulher.
Agora, comentemos alternativa por alternativa, lembrando-nos de que ele deseja a INCORRETA:

(a) A quantidade máxima se ações é 47. A soma dos algarismos é $4 + 7 = 11$, um número ímpar, de fato.

(b) O número máximo de ações é 47. Dividindo para três filhos:

$$\begin{array}{r|l} 47 & 3 \\ \cline{2-2} 17 & 15 \\ 2 & \end{array}$$

Veja que, de fato, cada filho receberia no máximo 15 ações.

(c) Na ordem que ele menciona: $x = 23$, $y = 35$ e $z = 47$. Veja que a média aritmética de x e z é $\dfrac{x+z}{2} = \dfrac{23+47}{2} = \dfrac{70}{2} = 35 = y$. Então é verdade o que é falado.

(d) Para que cada filho receba o maios número de ações, devemos ter a maior quantidade possível de ações totais. Portanto, nessa hipótese, $N = 47$. Dividindo para os seis filhos:

$$\begin{array}{r|l} 47 & 6 \\ \cline{2-2} 5 & 7 \end{array}$$

São 7 ações para cada filho, número que NÃO divide 48. Essa é, portanto, a alternativa incorreta.

Gabarito: D

(FUZILEIRO NAVAL-2003) QUESTÃO 58

Um colecionador possui entre 150 e 200 moedas antigas. Agrupando-as de 6 em 6 sobram 5 moedas, agrupando-as de 12 em 12 ou de 15 em 15 também sobram 5 moedas. Quantas moedas têm esse colecionador?

(a) 155 moedas.
(b) 165 moedas.
(c) 175 moedas.
(d) 185 moedas.

R: Vamos chamar de N o número de moedas desse colecionador. Agrupar essas moedas de 6 em 6 e sobrarem 5 moedas é o mesmo que dizer que a divisão de N por 6 deixa resto 5, isto é:

$$\begin{array}{r|l} N & 6 \\ \cline{2-2} 5 & q_1 \end{array}, \text{ onde } q_1 \text{ é um número inteiro qualquer.}$$

Escrever isso, pelo algoritmo de Euclides, é o mesmo que escrever $N = 6q_1 + 5$, isto é, $N - 5 = 6q_1$. Isso nos faz entender que $N - 5$ é múltiplo de 6.
Podemos fazer um raciocínio inteiramente análogo para com as organizações desse colecionador de 12 em 12 ou de 15 em 15, isto é:

$$\begin{array}{r|l} N & 12 \\ \cline{2-2} 5 & q_2 \end{array}, \text{ onde } q_2 \text{ é um número inteiro qualquer.}$$

$$\begin{array}{r|l} N & 15 \\ \cline{2-2} 5 & q_3 \end{array}, \text{ onde } q_3 \text{ é um número inteiro qualquer.}$$

Daí retiramos que $N = 12q_2 + 5 \Rightarrow N - 5 = 12q_2$ e $N = 15q_3 + 5 \Rightarrow N - 5 = 15q_3$; isto nos diz que $N - 5$ além de ser múltiplo de 6, também é múltiplo de 12 e de 15. Então $N - 5$ deverá ser, no mínimo, o MMC entre $6, 12$ e 15. Calculemos esse MMC:

$$\begin{array}{ccc|c} 6 & 12 & 15 & 2 \\ 3 & 6 & 15 & 2 \\ 3 & 3 & 15 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

O MMC é, então: $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Assim, $N - 5$ é certamente múltiplo de 60, são eles: $0, 60, 120, 180, 240, \ldots$. Mas lembre-se que o colecionador possui entre 150 e 200 moedas. Então, N deve estar entre 150 e 200. A única opção, portanto é que $N - 5 = 180$ e, portanto, $N = 185$.

Gabarito: D

(FUZILEIRO NAVAL-2006) QUESTÃO 59

Na entrada de um porto, há um farol e duas bóias luminosas, para assinalar os pontos mais perigosos para a navegação. O farol pisca a cada 15 segundos, uma das bóias pisca a cada 30 segundos e a outra bóia, a cada 40 segundos. Num dado instante, o farol e as duas bóias piscam ao mesmo tempo. Quantas vezes, em uma hora, ocorrerá essa situação?

(a) 30
(b) 60
(c) 80
(d) 100
(e) 120

R: O farol que pisca a cada 15 segundos piscará em todos os instantes múltiplos de 15, concorda? E os outros? Bom, o que pisca de 30 em 30 piscará em todos os múltiplos de 30 e o que pisca de 40 em 40 piscará em todo instante múltiplo 40. Assim, temos que esses faróis piscarão juntos em todo instante que seja múltiplo dos três ao mesmo tempo. O menor instante será o MMC desses números:

$$\begin{array}{ccc|c} 15 & 30 & 40 & 2 \\ 15 & 15 & 20 & 2 \\ 15 & 15 & 10 & 2 \\ 15 & 15 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Assim, o MMC entre esses três números será: $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$. Como em uma hora há 3600 segundos, os faróis piscarão simultaneamente $\frac{3600}{120} = 30$ vezes

.

Gabarito: A

(FUZILEIRO NAVAL-2008) QUESTÃO 60

Sendo $x =$ MDC dos números 300 e 400, e $y =$ MMC entre os números 24 e 60, marque a opção correta.

(a) $x = y$
(b) $x < y$
(c) $x > y$
(d) x é divisor exato de y
(e) y é divisor exato de x

R: Façamos o cálculo do MDC primeiro:

$$\begin{array}{cc|c} 300 & 400 & 2 \\ 150 & 200 & 2 \\ 75 & 100 & 5 \\ 15 & 20 & 5 \\ 3 & 4 & \end{array}$$

Logo $x = 2^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 25 = 100$. Agora, ao MMC:

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 60 & 2 \\ 12 & 30 & 2 \\ 6 & 15 & 2 \\ 3 & 15 & 3 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

Assim, $y = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 15 = 120$.

Logo, $x < y$, visto que $100 < 120$.

Gabarito: B

(FUZILEIRO NAVAL-2008) QUESTÃO 61

Os números 14 e 15 são primos entre si porque

(a) o mdc entre eles é 1.
(b) são divisíveis por zero.
(c) um é par e o outro é ímpar.
(d) não possuem nenhum divisor.
(e) nenhum dos dois números é primo.

R: Comentarei alternativa por alternativa:

(a) *o mdc entre eles é 1:* trata-se justamente da definição de números primos entre si. Opção correta.

(b) *são divisíveis por zero:* Nenhum número é divisível por zero (divisores têm de ser não-nulos).

(c) *um é par e o outro é ímpar:* 24 é par e 15 é ímpar, mas mesmo assim não são primos entre si (o MDC entre os dois é 3, não 1).

(d) *não possuem nenhum divisor:* Claro que possuem divisores. Os divisores de 14 são: $1, 2, 7$ e 14; os divisores de 15 são $1, 3, 5$ e 15.

(e) *nenhum dos dois números é primo:* Isso é verdade, mas não explica o porquê dos números serem primos entre si. Veja que 7 e 14 são números tais que um deles é primo mas não são, por isso, primos entre si.

Gabarito: A

(FUZILEIRO NAVAL-2011) QUESTÃO 62

O pelotão A, a cada 15 dias realiza adestramento de tiro em sua base; o pelotão B realiza o mesmo adestramento no mesmo local a cada 18 dias. Se hoje, ambos os pelotões realizaram esse adestramento, após quantos dias coincidirá o adestramento novamente (sem contar o dia de hoje)?

(a) 58
(b) 60
(c) 80
(d) 85
(e) 90

R: Novamente uma questão aonde desejamos fazer acontecimentos coincidirem. Basta calcularmos o MMC entre 15 e 18:

$$\begin{array}{rr|l} 15 & 18 & 2 \\ 15 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

O MMC é $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2 \cdot 9 \cdot 5 = 90$.

Gabarito: E

(FUZILEIRO NAVAL-2011) QUESTÃO 63

O m.d.c. dos números 36, 40 e 56 é

(a) 4
(b) 6
(c) 8

(d) 9
(e) 10

R: Façamos a fatoração:

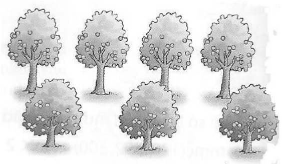
$$\begin{array}{ccc|c} 36 & 40 & 56 & 2 \\ 18 & 20 & 28 & 2 \\ 9 & 10 & 14 & \end{array}$$

O MDC é $2^2 = 4$.

Gabarito: A

(FUZILEIRO NAVAL-2016) QUESTÃO 64

Num sítio temos uma rua de laranjeiras e, ao seu lado, uma rua de limoeiros. Os pés de laranja são plantados a cada 4 metros e os de limão, a cada 6 metros. No começo das ruas, foi plantado um pé de laranja na frente de um pé de limão. De quantos em quantos metros isso acontece?



(a) 12
(b) 10
(c) 8
(d) 7
(e) 5

R: Haverá pés de laranja a cada 4 metros, e haverá pés de limão a cada 6 metros. Logo, haverá pés de ambas as frutas em um múltiplo comum, em metros, de 4 e 6. Façamos então o MMC:

$$\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

Logo o MMC será de: $2^2 \cdot 3 = 12$.

Gabarito: A

■■■(FUZILEIRO NAVAL-2017) QUESTÃO 65

Determine o Máximo Divisor Comum (M.D.C) dos números $(12; 15; 18)$, e marque a resposta correta.

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 5

R: Façamos os cálculos:

$$\begin{array}{ccc|c} 12 & 15 & 18 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & \end{array}$$

Vemos então que o MDC é 3.

Gabarito: C

■■■(FUZILEIRO NAVAL-2018) QUESTÃO 66

Determine o MDC(máximo divisor comum) dos números $(24; 32; 40)$, e marque a resposta correta.

(a) 6
(b) 7
(c) 8
(d) 9
(e) 10

R:

$$\begin{array}{ccc|c} 24 & 32 & 40 & 2 \\ 12 & 16 & 20 & 2 \\ 6 & 8 & 10 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & \end{array}$$

O MDC será então: $2^3 = 8$.

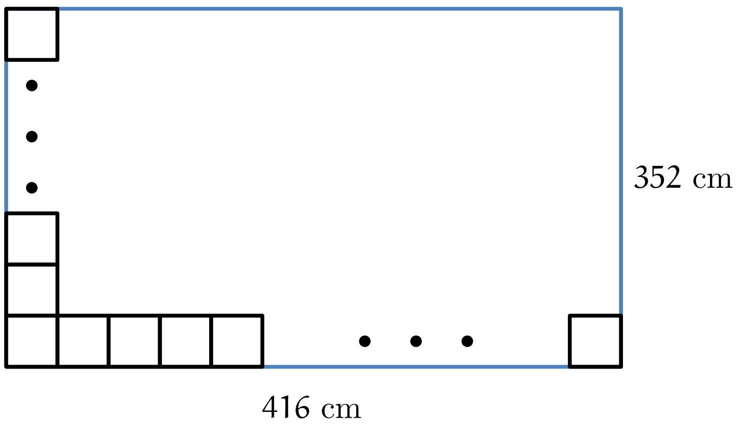
Gabarito: C

(FUZILEIRO NAVAL-2019) QUESTÃO 67

Uma sala retangular, medindo $3,52$ m de largura e $4,16$ m de comprimento, terá seu piso totalmente revestido com ladrilhos inteiros, quadrados e de mesma dimensão, sem que haja espaço entre os ladrilhos vizinhos. Os ladrilhos serão escolhidos de modo que possuam o maior tamanho possível. Nessas condições, qual o tamanho máximo do lado do ladrilho?

(a) Maior de 10 cm e menor de 15 cm
(b) Maior de 15 cm e menor de 20 cm
(c) Maior de 20 cm e menor de 25 cm
(d) Maior de 25 cm e menor de 30 cm
(e) Maior de 30 cm e menor de 35 cm

R: Observe a tentativa de preenchimento abaixo:



Perceba que, como os ladrilhos são quadrados, precisaremos dividir 416 e 352 em comprimentos iguais (perceba a transformação que fiz de metros para centímetros, multiplicando por 100). Para descobrirmos o maior número que possa dividir ambos, basta calcularmos o MDC de 416 e 352:

$$\begin{array}{rr|l} 416 & 352 & 2 \\ 208 & 176 & 2 \\ 104 & 88 & 2 \\ 52 & 44 & 2 \\ 26 & 22 & 2 \\ 13 & 11 & \end{array}$$

O MDC então será de $2^5 = 32$. Logo, cada quadrado poderá ter no máximo 32 cm de lado, que está entre 30 e 35.

Gabarito: E

(EEAR-2002) QUESTÃO 68

Assinale a alternativa falsa.

(a) Se dois números são primos distintos, então eles são primos entre si.
(b) Dois números primos entre si podem ser primos.
(c) Um número par e outro ímpar podem ser primos entre si.
(d) Se dois números são primos entre si, então eles são necessariamente primos.

R: Comentemos alternativa por alternativa:

(a) *Se dois números são primos distintos, então eles são primos entre si:* de fato, isso é verdade. Se p e q são primos distintos, p só tem dois divisores (1 e p) assim como q (divisores são 1 e q). Logo, o único divisor comum dois dois é 1, definição de números primos entre si.

(b) *Dois números primos entre si podem ser primos:* Sim, podem! Quaisquer dois ou mais primos serão primos entre si. A exemplo, veja o 2 e o 3; são primos e também são primos entre si.

(c) *Um número par e outro ímpar podem ser primos entre si:* Podem, de fato! Acabamos de ver um exemplo desses acontecendo: 2 e 3.

(d) *Se dois números são primos entre si, então eles são necessariamente primos:* Falso. Os números 9 e 10 não são primos, mas são primos entre si.

Gabarito: E

(EEAR-2002) QUESTÃO 69

Vítor tem mais de 80 discos. Quando ele forma pilhas com 2 discos, sobra 1 disco; quando ele forma pilhas com 3 ou 4 discos, também sobra 1 disco; quando ele forma pilhas com 7 discos, não sobram discos.

O menor número de discos que ele poderá ter é um número

(a) divisível por 5
(b) múltiplo de 6
(c) maior que 130
(d) menor que 120

R: Comecemos falando que N é o número de discos de Vítor. Formar pilhas de 2 e sobrar 1 é o mesmo que escrever:

$$\begin{array}{l|l} N & 2 \\ \cline{2-2} 1 & q_1 \end{array}, \text{ e portanto: } N = 2q_1 + 1, \text{ ou } N - 1 = 2q_1.$$

Analogamente, com as outras divisões:

$$\begin{array}{l|l} N & 3 \\ \cline{2-2} 1 & q_2 \end{array}, \text{ e portanto: } N = 3q_2 + 1, \text{ ou } N - 1 = 3q_2.$$

$$\begin{array}{l|l} N & 4 \\ \cline{2-2} 1 & q_3 \end{array}, \text{ e portanto: } N = 4q_3 + 1, \text{ ou } N - 1 = 4q_3.$$

$$\begin{array}{l|l} N & 7 \\ \cline{2-2} 0 & q_4 \end{array}, \text{ e portanto: } N = 7q_4 + 0, \text{ ou } N = 7q_4.$$

Veja então que $N - 1$ é múltiplo de 2, 3 e 4. Logo, $N - 1$ deve ser múltiplo do MMC entre 2, 3 e 4, que é:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

O MMC é, então, de $2^2 \cdot 3 = 12$. Como ele tem mais de 80 discos, devemos achar o menor múltiplo de 12 que seja maior que 80. Podemos simplesmente escrever os números até lá:
$12, 24, 36, 48, 60, 72, 84$. Porém, aqui vai uma técnica para fazer isso sem precisar escrever os números exaustivamente.
Divida o número 80 por 12, diminua o resto de 80 e some 12. Sabe o porquê disso funcionar? É porque quando diminuímos o resto de 80, encontraremos um número divisível por 12 MENOR que 80. Somando 12, portanto, encontraremos justamente o próximo, que além de ser divisível por 12 será maior que 80. Vejamos:

$$\begin{array}{l|l} 80 & 12 \\ \cline{2-2} 8 & 6 \end{array}$$

Faça $80 - 8 = 72$ e, finalmente, some 12: $72 + 12 = 84$. Esse é o menor valor candidato a $N - 1$. Agora devemos utilizar o fato de que N é múltiplo de 7. Daí, façamos o seguinte. Começaremos a listar os múltiplos de 12 a partir de 84, resolveremos para $N - 1$ e verificaremos se o N encontrado é, de fato, múltiplo de 7. Vejamos:

$N - 1$	N	**É divisível por 7?**
84	85	NÃO
96	97	NÃO
108	109	NÃO
120	121	NÃO
132	133	SIM

Veja então que tudo se encaixa: 132 é múltiplo de 12 e 133 é múltiplo de 7. Logo, $N = 133$.

Gabarito: C

(EEAR-2003) QUESTÃO 70

Dois números primos entre si têm por produto 5184. Se o menor deles é a maior potência inteira de 2, menor que 100, então o maior deles é

(a) uma potência de 5.
(b) uma potência de 3.
(c) múltiplo de 11.
(d) múltiplo de 7.

R: As potências inteiras de 2 são: $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 == 8$,$2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$ que, pode-se ver, ultrapassa 100. Logo a menor potência inteira de 2 menor que 100 é 64. O problema afirma que 64 é um dos fatores de 5184. Basta portanto dividir 5184 por 64:

$$\begin{array}{r|l} 5184 & 64 \\ \cline{2-2} 64 & 81 \\ 0 & \end{array}$$

Assim, temos $5184 = 64 \cdot 81$. O maior desses fatores é, então, 81 que é uma potência de 3.

Gabarito: B

(ESSA-2006) QUESTÃO 71

O maior número pelo qual se deve dividir 243 e 391 para obter respectivamente os restos 3 e 7 é x. Pode-se afirmar que o algarismo das dezenas de x é igual a:

(a) 9
(b) 8
(c) 2
(d) 6
(e) 4

R: Se o resto da divisão de 243 por x é 3, então 240 é divisível por x. Se o resto da divisão de 391 por x é 7, então 384 é divisível por x. Devemos encontrar então o mdc entre 240 e 384:

$$\begin{array}{rr|l} 240 & 384 & 2 \\ 120 & 192 & 2 \\ 60 & 96 & 2 \\ 30 & 48 & 2 \\ 15 & 24 & 3 \\ 5 & 8 & \end{array}$$

Então o mdc entre 240 e 384 é $x = 2^4 \cdot 3 = 16 \cdot 3 = 48$, cujo algarismo das dezenas é 4, como requisitado.

Gabarito: E

(ESSA-2007) QUESTÃO 72

Em uma unidade do Exército, a soma do efetivo formado por soldados e cabos é 65. Em um determinado dia, 15 soldados não compareceram ao expediente. Em consequência dessas faltas, o efetivo de cabos ficou igual ao efelívo de soldados presentes naquele dia. Qual é o mínimo múltiplo comum entre o número total de soldados e cabos desta unidade militar?

(a) 280
(b) 260
(c) 200
(d) 240
(e) 220

(ESSA-2010) QUESTÃO 73

Se $p = \dfrac{q}{\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{2}}$ sendo p e q números inteiros positivos primos entre si, calcule p^q.

(a) 4^{15}
(b) 15^4
(c) 15^8
(d) 8^{15}
(e) 16^{15}

R: Façamos primeiro a conta no denominador da fração. Vejamos:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{2} &= \frac{\frac{5+3}{5\cdot 3}}{2} \\ &= \frac{\frac{8}{5\cdot 3}}{2} \\ &= \frac{8}{5\cdot 3\cdot 2} \\ &= \frac{\cancelto{4}{8}}{5\cdot 3\cdot \cancelto{1}{2}} \\ &= \frac{4}{15}.\end{aligned}$$

Daí temos:

$$p = \frac{q}{\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{2}} = \frac{q}{\frac{4}{15}} = \frac{15q}{4}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{15}{4}$$

Como p e q são primos entre si e $\frac{15}{4}$ já está em sua forma irredutível, temos $p = 15$ e $q = 4$. Logo, $p^q = 15^4$.

Gabarito: B

2.2– Índice Remissivo

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.