Aula 00

TCDF (Auditor de Controle Externo - Área Auditoria) Matemática Financeira

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

25 de Janeiro de 2024

Índice

AVISO IMPORTANTE!

Olá, Alunos (as)!

Passando para informá-los a respeito da **disposição das questões** dentro do nosso material didático. Informamos que a escolha das bancas, dentro dos nossos Livros Digitais, é feita de maneira estratégica e pedagógica pelos nossos professores a fim de proporcionar a melhor didática e o melhor direcionamento daquilo que mais se aproxima do formato de cobrança da banca do seu concurso.

Assim, o formato de questões divididas por tópico facilitará o seu processo de estudo, deixando mais alinhado às disposições constantes no edital.

No mais, continuaremos à disposição de todos no Fórum de dúvidas!

Atenciosamente,

Equipe Exatas

Estratégia Concursos

APRESENTAÇÃO DO CURSO

Olá, pessoal! Tudo bem?

É com grande satisfação damos início ao nosso curso!

Os professores **Eduardo Mocellin, Francisco Rebouças, Luana Brandão, Djefferson Maranhão** e **Vinicius Veleda** ficarão responsáveis pelo **Livro Digital**.

Antes de continuarmos, vamos apresentar os professores do material escrito:

> **Eduardo Mocellin**: Fala, pessoal! Meu nome é Eduardo Mocellin, sou professor de Matemática e de Raciocínio Lógico do Estratégia Concursos e engenheiro Mecânico-Aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Sinto-me feliz em poder contribuir com a sua aprovação! Não deixe de me seguir no Instagram: **@edu.mocellin**
>
> **Francisco Rebouças**: Fala, alunos! Aqui é o Francisco Rebouças, professor de Matemática do Estratégia Concursos. Sou Engenheiro Aeroespacial formado pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Saiba que será uma honra fazer parte da sua jornada rumo à aprovação e que estaremos sempre aqui para auxiliá-los com o que precisarem. Um grande abraço e nos vemos nas aulas!
>
> **Luana Brandão:** Oi, pessoal! O meu nome é Luana Brandão e sou professora de Estatística do Estratégia Concursos. Sou Graduada, Mestre e Doutora em Engenharia de Produção, pela Universidade Federal Fluminense. Passei nos concursos de Auditor Fiscal (2009/2010) e Analista Tributário (2009) da Receita Federal e de Auditor Fiscal do Estado do Rio de Janeiro (2010). Sou Auditora Fiscal do Estado do RJ desde 2010. Vamos juntos nesse caminho até a aprovação? **@professoraluanabrandao**
>
> **Djefferson Maranhão**: Olá, amigos do Estratégia Concursos, tudo bem? Meu nome é Djefferson Maranhão, professor de Estatística do Estratégia Concursos. Sou Graduado em Ciência da Computação pela Universidade Federal do Maranhão (UFMA). Desde 2015, sou Auditor da Controladoria Geral do Estado do Maranhão (2015 - 5º lugar). Antes, porém, exerci os cargos de Analista de Sistemas na UFMA (2010 - 1º lugar) e no TJ-MA (2011 - 1º lugar). Já estive na posição de vocês e sei o quanto a vida de um concurseiro é um tanto atribulada! São vários assuntos para se dominar em um curto espaço de tempo. Por isso, contem comigo para auxiliá-los nessa jornada rumo à aprovação. Um grande abraço.
>
> **Vinicius Veleda:** Olá, caros alunos! Sou Auditor Fiscal do Estado do Rio Grande do Sul. Professor de Matemática e Matemática Financeira do Estratégia Concursos. Aprovado nos Concursos de Auditor Fiscal da Secretaria da Fazenda dos Estados do Rio Grande do Sul (SEFAZ RS - 2019), Santa Catarina (SEFAZ SC - 2018) e Goiás (SEFAZ GO - 2018). Formado em Engenharia de Petróleo pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) com graduação sanduíche em Engenharia Geológica pela Universidade Politécnica de Madrid (UPM). Pela UFRJ, fui campeão sulamericano do Petrobowl (Buenos Aires) e, posteriormente, Campeão Mundial (Dubai). Cursei meu ensino médio na Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx). Contem comigo nessa trajetória! **@viniciusveleda**

O material escrito em **PDF** está sendo construído para ser sua fonte **autossuficiente** de estudos. Isso significa que o livro digital será **completo** e **voltado para o seu edital**, justamente para que você não perca o seu precioso tempo "caçando por aí" o conteúdo que será cobrado na sua prova. Ademais, sempre que necessário, você poderá fazer perguntas sobre as aulas no **fórum de dúvidas**. **Bons estudos!**

FRAÇÕES

Frações

Revisão sobre Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Múltiplos de um número

Um número inteiro **A é múltiplo de um número inteiro B** quando **A pode ser descrito por B** × **k**, sendo **k** um número inteiro.

Exemplo: os números da forma **A** = **7**×**k** são múltiplos **de 7** (sendo **k** inteiro).

Números primos

Números primos são números naturais maiores do que 1 que possuem **somente dois divisores** naturais: o número 1 e o próprio número primo.

• Os 15 primeiros números primos são: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.**

Decomposição em fatores primos

Para decompor um número em fatores primos, devemos dividir o número em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que o número obtido não for divisível pelo primo selecionado.

Existe uma **forma não metodológica** de se obter a decomposição em fatores primos. Essa forma **costuma ser mais rápida** especialmente para números mais simples

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Para obter o **MMC** entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo:

• Decompor todos os números em fatores primos;

• Selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

Existe um método prático para determinar o MMC entre **N** números. Trata-se do **método da decomposição simultânea em fatores primos**.

Para realizar a decomposição simultânea de **N** números em fatores primos, devemos dividir simultaneamente os números em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que **todos** os números obtidos não forem divisíveis pelo primo selecionado.

• Quando temos que realizar um **MMC** de **N** números e no meio desses números temos que a **é múltiplo** de b, podemos eliminar b do cálculo do MMC.

• Se tivermos **N** números e um deles é **múltiplo de todos os outros**, esse número é o **MMC**.

Introdução às frações

a ⟶ Numerador
b ⟶ Denominador

Considere uma fração com um numerador inteiro $\boldsymbol{a}$ e com um denominador inteiro $\boldsymbol{b}$, representada por $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$. Dizemos que a fração é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **não apresentam fatores primos em comum**. Em outras palavras, uma fração $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **são primos entre si**.

Para **somar e subtrair** frações, devemos transformar todas as frações em **frações equivalentes com o mesmo denominador**.

Para realizar a **multiplicação de frações**, realiza-se a multiplicação dos numeradores e a multiplicação dos denominadores.

Para realizar a **divisão** de uma fração pela outra, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação.

Para **comparar frações**, devemos encontrar frações equivalentes que apresentem o mesmo denominador.

Problemas envolvendo frações

A palavra "**de**" costuma significar uma **multiplicação**.
Uma forma prática de se **obter o todo a partir da parte** do problema é utilizar o recurso "**inverte e multiplica**".
Dada uma fração $\boldsymbol{a/b}$, a **fração complementar** corresponde a $\mathbf{1} - \boldsymbol{a/b}$.

Quando nos deparamos com problemas envolvendo frações, um recurso importante para resolvê-los consiste em **modelar o problema atribuindo uma incógnita a determinado valor que se desconhece**.

Dízima periódica

O **período** é a porção que se repete em uma dízima periódica.

- Um número da forma $\mathbf{0,AAA\ldots = 0,\overline{A}}$ corresponde a $\frac{\mathrm{A}}{9}$;
- Um número da forma $\mathbf{0,ABABAB\ldots = 0,\overline{AB}}$ corresponde a $\frac{\mathrm{AB}}{99}$;
- Um número da forma $\mathbf{0,ABCABCABC\ldots = 0,\overline{ABC}}$ corresponde a $\frac{\mathrm{ABC}}{999}$;
- E assim sucessivamente.

Para dízimas periódicas que fogem desse padrão, devemos modificá-las de modo a deixá-las no formato que conhecemos.

Revisão sobre Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Pessoal, antes de iniciarmos o conteúdo de frações propriamente dito, vamos fazer uma breve **revisão sobre múltiplos**, **números primos**, **decomposição em fatores primos** e **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**). É muito importante que você tenha conhecimento sobre esses assuntos, pois eles serão necessários para que façamos operações com frações.

Caso você já saiba calcular o MMC entre quaisquer números, **fique à vontade para pular esse tópico**.

Múltiplos de um número

Considere o número 7. Os **múltiplos do número 7** são:

$$7 \times 0 = \mathbf{0}$$
$$7 \times 1 = \mathbf{7}$$
$$7 \times 2 = \mathbf{14}$$
$$7 \times 3 = \mathbf{21}$$
$$\ldots$$

Perceba que um número qualquer apresenta infinitos múltiplos. O número 462, por exemplo, é múltiplo de 7, pois:

$$7 \ \times 66 = 462$$

Note que todos os números da forma **A** = **7** × **k** são múltiplos **de 7** (sendo **k** um número inteiro).

Um número inteiro **A é múltiplo de um número inteiro B** quando **A pode ser descrito pelo produto B** × **k**, sendo **k** um número inteiro.

Tudo certo quanto ao conceito de múltiplos? Ok, agora vamos falar de números primos.

Números primos

Os números primos são números **naturais** maiores do que 1 que possuem **somente dois divisores** naturais:

- O número 1; e
- O próprio número primo.

Isso significa que, se um número natural X é primo, apenas o número 1 e o próprio número X podem dividir X deixando resto zero.

Existem infinitos números primos. É importante que você **DECORE** os 15 primeiros.

Os 15 primeiros números primos são:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

Decomposição em fatores primos

Decompor um número qualquer em fatores primos significa **escrevê-lo como um produto de números primos**. Por exemplo, a decomposição em fatores primos do número 60 é:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Para decompor um número em fatores primos, devemos dividir o número em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que o número obtido não for divisível pelo primo selecionado.

Vejamos alguns exemplos:

Decomponha o número 500 em fatores primos

- Ao dividir 500 por 2, obtemos 250.

- Ao dividir 250 por 2, obtemos 125.

- Note que 125 não é mais divisível por 2 (não é par). **Passemos ao 3**.

- Note que 125 não é divisível por 3 (1+2+5 não é divisível por 3). **Passemos ao 5**.

- Ao dividir 125 por 5, obtemos 25.

- Ao dividir 25 por 5, obtemos 5.

- Ao dividir 5 por 5, **obtemos 1**. **Nesse momento, devemos parar as divisões sucessivas.**

$$\begin{array}{r|l} 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 500 em fatores primos é:

$$500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$500 = 2^2 \times 5^3$$

Decomponha o número 282 em fatores primos

$$\begin{array}{r|l} 282 & 2 \\ 141 & 3 \\ 47 & 47 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 282 em fatores primos é:

$$282 = 2 \times 3 \times 47$$

Decomponha o número 3960 em fatores primos

$$\begin{array}{r|l} 3960 & 2 \\ 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 3960 em fatores primos é:

$$3960 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$$

$$3960 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

Existe uma **forma não metodológica** de se obter a decomposição em fatores primos. Essa forma **costuma ser mais rápida** especialmente para números mais simples. Por exemplo, vamos decompor o número 500. Acompanhe o raciocínio:

$$500 = 5 \times 100$$

$$= 5 \times 10 \times 10$$

$$= 5 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$$

$$= 2^2 \times 5^3$$

Note que usamos o fato de 500 ser facilmente descrito por 5×100 para decompormos o número de uma forma não metodológica.

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

O **Mínimo** **Múltiplo** **Comum** (**MMC**) entre **N** números é o **menor** dos **múltiplos** que é comum a todos os números.

Representaremos o **MMC** entre os números $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ por MMC (a; b; c).

Para obter o **MMC** entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo:

- Decompor todos os números em fatores primos; e
- Selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

Vamos a alguns exemplos:

Calcule o MMC entre 5, 10, 15, 20 e 50.

Primeiramente, devemos decompor todos os números em fatores primos.

$$5 = 5^1$$

$$10 = 2^1 \times 5^1$$

$$15 = 3^1 \times 5^1$$

$$20 = 2 \times 10$$
$$= 2^2 \times 5^1$$

$$50 = 5 \times 10$$
$$= 2^1 \times 5^2$$

Devemos selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$5 = \quad\quad\quad\quad 5^1$

$10 = 2^1 \times \quad 5^1$

$15 = \quad\quad 3^1 \times 5^1$

$20 = 2^2 \quad\quad \times 5^1$

$50 = 2^1 \quad\quad \times 5^2$

Logo, $\text{MMC}\ (5; 10; 15; 20; 50) = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300.$

Calcule o MMC entre 21, 45 e 50

Vamos decompor os 3 números em fatores primos, selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$21 = \quad 3 \quad\quad \times 7$

$45 = \quad 3^2 \times 5$

$50 = 2 \quad\quad \times 5^2$

Logo, $\text{MMC}\ (21; 45; 50) = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 3150.$

Existe um método prático para determinar o MMC entre **N** números. Trata-se do **método da decomposição simultânea em fatores primos**.

Para realizar a decomposição simultânea de **N** números em fatores primos, devemos dividir simultaneamente os números em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que **todos** os números obtidos não forem divisíveis pelo primo selecionado.

Calcule o MMC entre 5, 10, 15, 20 e 50 pelo método da decomposição simultânea em fatores primos

- Ao dividir os números **5**, **10**, **15**, **20** e **50** **por 2**, obtemos **5**, **5**, **15**, **10** e **25**.
- Ao dividir os números **5**, **5**, **15**, **10** e **25** **por 2**, obtemos **5**, **5**, **15**, **5** e **25**.
- Note que nenhum dos números dentre **5**, **5**, **15**, **5** e **25** é divisível por 2. **Passemos ao 3**.
- Ao dividir os números **5**, **5**, **15**, **5** e **25** **por 3**, obtemos **5**, **5**, **5**, **5** e **25**.
- Note que nenhum dos números dentre **5**, **5**, **5**, **5** e **25** é divisível por 3. **Passemos ao 5**.
- Ao dividir os números **5**, **5**, **5**, **5** e **25** **por 5**, obtemos **1**, **1**, **1**, **1** e **5**.
- Ao dividir os números **1**, **1**, **1**, **1** e **5** **por 5**, obtemos **1**, **1**, **1**, **1** e **1**. **Nesse momento, devemos parar a divisão simultânea.**

Temos a seguinte representação da decomposição simultânea:

$$\begin{array}{ccccc|c} 5, & 10, & 15, & 20, & 50 & 2 \\ 5, & 5, & 15, & 10, & 25 & 2 \\ 5, & 5, & 15, & 5, & 25 & 3 \\ 5, & 5, & 5, & 5, & 25 & 5 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 5 & 5 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

O **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) é o seguinte produto:

$$\text{MMC}\ (5; 10; 15; 20; 50) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$$

$$= 2^2 \times 3 \times 5^2$$

$$= 300$$

Calcule o MMC entre 21, 45 e 50 pelo método da decomposição simultânea em fatores primos

Temos a seguinte representação da decomposição simultânea:

$$\begin{array}{ccc|c} 21, & 45, & 50 & 2 \\ 21, & 45, & 25 & 3 \\ 7, & 15, & 25 & 3 \\ 7, & 5, & 25 & 5 \\ 7, & 1, & 5 & 5 \\ 7, & 1, & 1 & 7 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

O **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) é o seguinte produto:

$$\text{MMC}\ (21; 45; 50) = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$$

$$= 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$

$$= 3150$$

Uma dica importante que pode economizar um certo tempo em prova é a seguinte: quando temos que realizar um **MMC** de **N** números e no meio desses números temos que $\boldsymbol{a}$ **é múltiplo** de $\boldsymbol{b}$**,** podemos eliminar $\boldsymbol{b}$ do cálculo do MMC.

Vejamos dois exemplos:

Calcule o MMC de 40, 30 e 15

Ao calcular o $\text{MMC}(40; 30; 15)$, perceba que **30** é **múltiplo de 15.** Logo:

$$\text{MMC}(40; \mathbf{30}; \mathbf{15}) = \text{MMC}\ (40; \mathbf{30})$$

Calcular o MMC de 40 e 30 é mais rápido, não é mesmo?

Calcule o MMC de 390, 130 e 75

Ao calcular o $\text{MMC}(390; 130; 75)$, perceba que **390** é **múltiplo de 130**. Logo:

$$\text{MMC}(\mathbf{390}; \mathbf{130}; 75) = \text{MMC}\ (\mathbf{390}; 75)$$

Calcular o MMC de 390 e 75 é mais rápido, não é mesmo?

Perceba que se tivermos **N** números e **um deles é múltiplo de todos os outros**, **esse número é o MMC**.

Calcule o MMC de 3, 6 e 12

Note que 12 é múltiplo de 3 e de 6. Logo:

$$\text{MMC}\ (3; 6; 12) = 12$$

Calcule o MMC de 120, 60 e 15

Note que 120 é múltiplo de 60 e de 15. Logo:

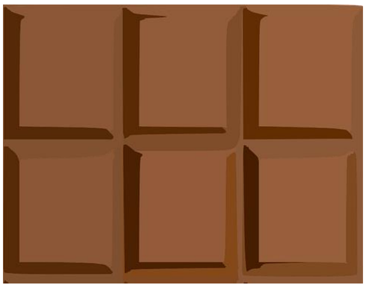
$$\text{MMC}\ (120; 60; 15) = 120$$

Feito! Agora que sabemos calcular o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) entre quaisquer números, vamos ao conteúdo sobre frações.

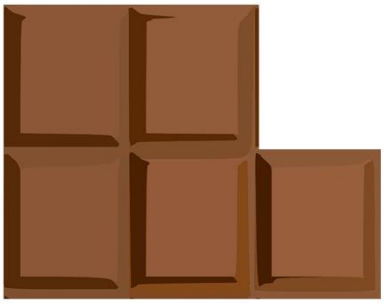
Introdução às frações

Conceitos preliminares

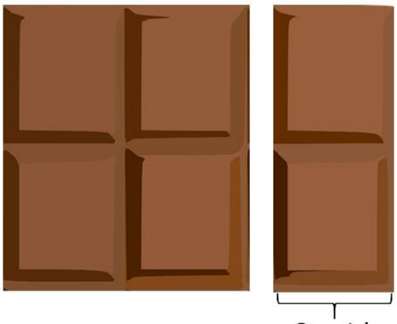
A assimilação plena do conceito de frações é fundamental para se entender diversos outros assuntos de matemática. Para ilustrar a ideia, considere a barra de chocolate a seguir com 6 pedaços.



Comer 5/6 (cinco sextos) da barra de chocolate significa comer 5 dos 6 pedaços. Para o caso em questão, 5/6 representa a seguinte parte que foi comida:

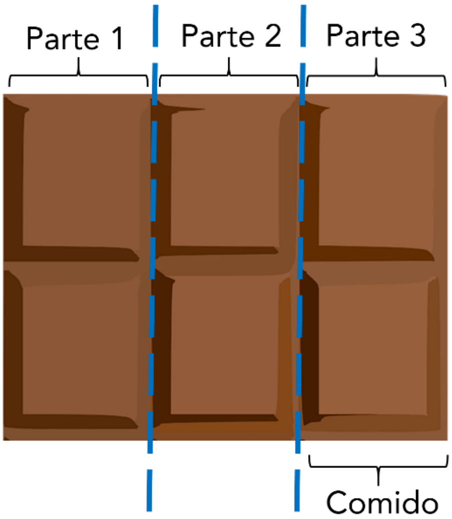


Comer 2/6 (dois sextos) da barra de chocolate significa comer 2 dos 6 pedaços:



E se disséssemos que comemos 1/3 (um terço) da barra de 6 pedaços, o que isso significa? Significa que, a cada três pedaços existentes na barra, comemos um pedaço. Como a nossa barra tem 6 pedaços, 1/3 da nossa barra corresponde a 2 pedaços.

Uma outra forma de se pensar que foi comido 1/3 da barra é dividir a barra em três e comer um desses três pedaços.



Note, portanto, que dizer que se comeu 2/6 da barra é a mesma coisa do que dizer que se comeu 1/3 da barra. Isso porque **as duas frações são equivalentes**:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Composição básica de uma fração

Uma fração é um número racional que representa uma divisão composta por dois termos:

- O numerador, que representa o dividendo; e
- O denominador, que representa o divisor.

$$\frac{a}{b}\quad\begin{array}{l}\longrightarrow \text{Numerador}\\[6pt] \longrightarrow \text{Denominador}\end{array}$$

Frações equivalentes e frações irredutíveis

Considere uma fração com um numerador inteiro $\boldsymbol{a}$ e com um denominador inteiro $\boldsymbol{b}$, representada por $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$.

Dizemos que a fração é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **não apresentam fatores primos em comum**.

Em outras palavras, uma fração $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ é **irredutível** quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **são primos entre si**.

ACORDE!

> Uma fração $\frac{a}{b}$ é **irredutível** quando a e b **são primos entre si**.
>
> Dois números são **primos entre si** quando **não apresentam fatores primos em comum**.

Exemplos:

- $\frac{14}{15}$ é uma fração **irredutível**, pois $\mathbf{14}$ e $\mathbf{15}$ **não apresentam fatores primos em comum** ($\mathbf{14}$ e $\mathbf{15}$ **são primos entre si**). Veja que:
  - $\mathbf{14}$ pode ser decomposto como 2×7;
  - $\mathbf{15}$ pode ser decomposto como 3×5;
  - $\mathbf{14}$ e $\mathbf{15}$ **não apresentam fatores primos em comum**, pois $\mathbf{14}$ apresenta os fatores primos 2 e 7, já $\mathbf{15}$ apresenta os fatores primos 3 e 5.

- $\frac{14}{84}$ **não é** uma fração **irredutível**, pois $\mathbf{14}$ e $\mathbf{84}$ apresentam fatores primos em comum ($\mathbf{14}$ e $\mathbf{84}$ não são primos entre si). Veja que:
  - $\mathbf{14}$ pode ser decomposto como $\mathbf{2} \times \mathbf{7}$;
  - $\mathbf{84}$ pode ser decomposto como $\mathbf{2}^2 \times 3 \times \mathbf{7}$;
  - $\mathbf{14}$ e $\mathbf{84}$ apresentam fatores primos em comum: $\mathbf{2}$ e $\mathbf{7}$.

- $\frac{2}{7}$ é uma fração **irredutível**, pois $\mathbf{2}$ e $\mathbf{7}$ **não apresentam fatores primos em comum** ($\mathbf{2}$ e $\mathbf{7}$ **são primos entre si**). Veja que:
  - $\mathbf{2}$ já é um número primo, e sua decomposição é o próprio número 2;
  - $\mathbf{7}$ já é um número primo, e sua decomposição é o próprio número 7;
  - $\mathbf{2}$ e $\mathbf{7}$ **não apresentam fatores primos em comum**.

- $\frac{3}{6}$ **não é** uma fração **irredutível**, pois $\mathbf{3}$ e $\mathbf{6}$ apresentam fatores primos em comum. ($\mathbf{3}$ e $\mathbf{6}$ não são primos entre si). Veja que:
  - $\mathbf{3}$ já é um número primo, e sua decomposição é o próprio número $\mathbf{3}$;
  - $\mathbf{6}$ pode ser decomposto como $2 \times \mathbf{3}$;
  - $\mathbf{3}$ e $\mathbf{6}$ apresentam um fator primo em comum: $\mathbf{3}$.

Creio que, com esses exemplos, você já entendeu o que é uma fração irredutível e o que são números primos entre si.

Para simplificar uma fração e torná-la irredutível, podemos dividir o numerador e o denominador por um mesmo número inteiro sucessivas vezes até que a divisão não seja mais possível. Exemplo:

$$\frac{84}{120}\begin{matrix}\scriptstyle\div 2\\ \scriptstyle\div 2\end{matrix} = \frac{42}{60}\begin{matrix}\scriptstyle\div 2\\ \scriptstyle\div 2\end{matrix} = \frac{21}{30}\begin{matrix}\scriptstyle\div 3\\ \scriptstyle\div 3\end{matrix} = \frac{7}{10}$$

Veja que, ao obter a fração $\frac{7}{10}$, **não é mais possível dividir o numerador e o denominador por um mesmo número inteiro**. Isso ocorre porque $\mathbf{7}$ e $\mathbf{10}$ **não apresentam fatores primos em comum**. Em outras palavras, $\mathbf{7}$ e $\mathbf{10}$ **são primos entre si**.

Uma outra forma de tornar uma fração irredutível é decompor o numerador e o denominador em fatores primos e "simplificar" os fatores comuns. Exemplo:

$$\frac{84}{120} = \frac{\cancel{2}^2.\cancel{3}.7}{\cancel{2}^3.\cancel{3}.5} = \frac{7}{2.5} = \frac{7}{10}$$

2^1

Veja que não necessariamente precisamos decompor em fatores primos para simplificar a fração. Podemos também transformar o numerador em produtos "convenientes" para assim realizar a simplificação.

$$\frac{84}{120} = \frac{\cancel{12}.7}{\cancel{12}.10} = \frac{7}{10}$$

Duas **frações são ditas equivalentes quando representam o mesmo número**, ou seja, quando são iguais. No exemplo anterior, $\frac{84}{120}$, $\frac{42}{60}$, $\frac{21}{30}$ e $\frac{7}{10}$ são equivalentes, pois:

$$\frac{84}{120} = \frac{42}{60} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

(Pref. Sto. Augusto/2020) Ao simplificar a fração $\frac{12}{36}$ obtém-se:

a) 1/6

b) 1/3

c) 1/2

d) 1/4

e) 1/5

Comentários:

Podemos representar o denominador da fração como 3×12

$$\frac{12}{36} = \frac{\mathbf{12}}{3 \times \mathbf{12}}$$

Simplificando o número **12**, obtém-se:

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Gabarito: Letra B.

Soma e subtração de frações

Para somar e subtrair frações, devemos transformar todas as frações em **frações equivalentes** de modo que todas elas apresentem **o mesmo denominador**.

Para que todas as frações tenham o mesmo denominador, devemos obter o **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) **de todos os denominadores**. Exemplo:

$$\mathbf{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{7}{10}}$$

O Mínimo Múltiplo Comum dos denominadores é $\text{MMC}\ (3;\ 5; 10)\ =\ 30$. Logo, os denominadores das três frações devem ser 30. Para acharmos os numeradores, devemos determinar as frações equivalentes cujo denominador é 30.

$$\mathbf{\frac{2}{3}} = \frac{(30 \div 3) \times 2}{30} = \frac{10 \times 2}{30} = \mathbf{\frac{20}{30}}$$

$$\mathbf{\frac{1}{5}} = \frac{(30 \div 5) \times 1}{30} = \frac{6 \times 1}{30} = \mathbf{\frac{6}{30}}$$

$$\mathbf{\frac{7}{10}} = \frac{(30 \div 10) \times 7}{30} = \frac{3 \times 7}{30} = \mathbf{\frac{21}{30}}$$

ESCLARECENDO!

Uma forma prática de obter essas frações equivalentes de denominador 30 é realizar o seguinte procedimento:

$$\frac{2}{3} = \frac{?}{30} \qquad 30 \div 3 = 10 \qquad 10 \times 2 = 20 \qquad = 20$$

$$\frac{1}{5} = \frac{?}{30} \qquad 30 \div 5 = 6 \qquad 6 \times 1 = 6 \qquad = 6$$

$$\frac{7}{10} = \frac{?}{30} \qquad 30 \div 10 = 3 \qquad 3 \times 7 = 21 \qquad = 21$$

Voltando ao problema, temos:

$$\mathbf{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{7}{10}}$$

$$= \mathbf{\frac{20}{30}} + \mathbf{\frac{6}{30}} + \mathbf{\frac{21}{30}}$$

$$= \frac{20 + 6 + 21}{30}$$

$$= \frac{47}{30}$$

Para realizar uma subtração de frações, devemos realizar o mesmo procedimento. Suponha que devemos realizar a seguinte subtração:

$$\mathbf{\frac{44}{60} - \frac{20}{30}}$$

O Mínimo Múltiplo Comum dos denominadores é $\text{MMC}\ (30;\ 60) = \ 60$. Ficamos com as seguintes frações equivalentes com denominador 60:

$$\mathbf{\frac{44}{60} - \frac{40}{60}}$$

$$= \frac{44 - 40}{60}$$

$$= \frac{4}{60}$$

No caso em questão, **podemos tornar a fração 4/60 irredutível**. Se dividirmos o numerador e o denominador por 4 (ou seja, se dividirmos duas vezes por 2), obtemos:

$$\frac{1}{15}$$

(PC RJ/2022) Considere a soma

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{10} = \frac{a}{b}$$

sendo os números naturais a e b primos entre si.

O valor da soma $a + b$ é:

a) 35;

b) 47;

c) 181;

d) 227;

e) 269.

Comentários:

Primeiramente, vamos realizar a soma das frações do lado esquerdo da equação.

Para realizar a soma, devemos representar as frações por meio de **frações equivalentes** com um **mesmo denominador**. O **menor denominador comum possível** para realizar a soma é o **MMC entre 6**, **8** e **10**. Decompondo esses números em fatores primos, temos:

$$6 = 2 \times 3$$
$$8 = 2^3$$
$$10 = 2 \times 5$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$6 = 2 \times 3$

$8 = 2^3$

$10 = 2 \quad \times 5$

Logo, $\text{MMC}(6; 8; 10) = 2^3 \times 3 \times 5 = \mathbf{120}$.

Portanto:

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{10}$$
$$= \frac{(120 \div 6) \times 1}{\mathbf{120}} + \frac{(120 \div 8) \times 3}{\mathbf{120}} + \frac{(120 \div 10) \times 7}{\mathbf{120}}$$
$$= \frac{20}{\mathbf{120}} + \frac{45}{\mathbf{120}} + \frac{84}{\mathbf{120}}$$
$$= \frac{20 + 45 + 84}{\mathbf{120}}$$
$$= \frac{\mathbf{149}}{\mathbf{120}}$$

Segundo o enunciado, temos que a soma das frações, dada por $\frac{\mathbf{149}}{\mathbf{120}}$, **é igual a** $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$, sendo $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ **números naturais primos entre si**. Consequentemente:

- $\frac{a}{b}$ é uma **fração equivalente** a $\frac{149}{120}$, pois $\frac{149}{120} = \frac{a}{b}$.
- $\frac{a}{b}$ é uma **fração irredutível**, pois a e b são números naturais primos entre si.

Devemos, portanto, obter a fração irredutível equivalente a $\frac{\mathbf{149}}{\mathbf{120}}$.

Veja que:

$$120 = 10 \times 12$$
$$= (2 \times 5) \times (3 \times 4)$$
$$= (2 \times 5) \times (3 \times 2^2)$$
$$= 2^3 \times 3 \times 5$$

Logo, **o número $\mathbf{120}$ apresenta os fatores primos $\mathbf{2, 3}$ e $\mathbf{5}$**.

Ao tentar dividir 149 por 2, 3 e 5, percebe-se que sempre temos um resto. Isso significa que $\mathbf{120}$ e $\mathbf{149}$ **não apresentam fatores primos em comum**.

Assim, $\mathbf{120}$ e $\mathbf{149}$ **são primos entre si**.

Consequentemente, a fração irredutível $\frac{a}{b}$ é a própria fração $\frac{149}{120}$. Logo:

$$a = 149$$

$$b = 120$$

Portanto:

$$a + b = 149 + 120$$

$$= 269$$

Gabarito: Letra E.

(MANAUSPREV/2015) Considere as expressões numéricas, abaixo.

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$$

O valor, aproximado, da soma entre A e B é

a) 2.

b) 3.

c) 1.

d) 2,5.

e) 1,5.

Comentários:

Primeiramente, vamos realizar a soma para A.

Note que os denominadores 2, 4, 8, 16 e 32 são potências de 2. Como **32 é múltiplo de todos os outros números**, o **MMC entre os números é 32**.

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

$$= \frac{16}{\mathbf{32}} + \frac{8}{\mathbf{32}} + \frac{4}{\mathbf{32}} + \frac{2}{\mathbf{32}} + \frac{1}{\mathbf{32}}$$

$$= \frac{16 + 8 + 4 + 2 + 1}{\mathbf{32}}$$

$$= \frac{31}{32}$$

Vamos agora realizar a soma para B.

Perceba que os denominadores 3, 9, 27, 81 e 243 são potências de 3. Como **243 é múltiplo de todos os outros números**, o **MMC entre os números é 243**.

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$$

$$= \frac{81}{\mathbf{243}} + \frac{27}{\mathbf{243}} + \frac{9}{\mathbf{243}} + \frac{3}{\mathbf{243}} + \frac{1}{\mathbf{243}}$$

$$= \frac{81 + 27 + 9 + 3 + 1}{\mathbf{243}}$$

$$= \frac{121}{243}$$

A soma entre A e B é:

$$A + B = \frac{31}{32} + \frac{121}{243}$$

Note que $\frac{31}{32}$ é aproximadamente $\frac{32}{32}$. Logo:

$$\frac{31}{32} \approx \frac{32}{32} = 1$$

Além disso, $\frac{121}{243}$ é aproximadamente $\frac{121}{242}$. Logo:

$$\frac{121}{243} \approx \frac{121}{242} = 0{,}5$$

Portanto, a soma de A e B é, aproximadamente:

$$A + B \approx 1 + 0{,}5$$

$$= 1{,}5$$

Gabarito: Letra E.

Multiplicação e divisão de frações

Para realizar a **multiplicação de frações**, realiza-se a multiplicação dos numeradores e a multiplicação dos denominadores, obtendo-se a fração resultante:

$$\frac{3}{4} \times \frac{20}{9} = \frac{3 \times 20}{4 \times 9} = \frac{60}{36}$$

Veja que, no exemplo em questão, a fração obtida não é irredutível. Uma forma mais rápida de se obter a fração irredutível é simplificar a expressão antes mesmo de realizar a multiplicação.

No exemplo a seguir:

- Os números **20** e **4** são simplificados pelo número 4, obtendo-se, respectivamente, **5** e **1**;
- Os números **3** e **9** são simplificados pelo número 3, obtendo-se, respectivamente, **1** e **3**.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times \frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{5}{3}$$

Para realizar a **divisão** de uma fração pela outra, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação:

$$\frac{3}{4} \div \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{20}} = \frac{3}{4} \times \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{9}}$$

$$= \frac{1}{1} \times \frac{5}{3}$$

$$= \frac{5}{3}$$

Veja este outro exemplo:

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{20}}} = \frac{3}{2} \times \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{9}}$$

Simplificando 3 e 9 por 3, temos:

$$\frac{1}{2} \times \frac{20}{3}$$

Simplificando 2 e 20 por 2, temos:

$$\frac{1}{1} \times \frac{10}{3}$$

$$= \frac{10}{3}$$

(TRF 4/2014) O número que corresponde ao resultado da expressão numérica

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{4}$$

é igual a

a) 5/9.

b) 13/36.

c) 3.

d) 1.

e)7/18.

Comentários:

Temos a seguinte expressão numérica:

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{5}{6}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{9}\times\frac{9}{4}$$

Veja que:

- No primeiro produto, $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}$, podemos simplificar 2 e 4 pelo número 2, obtendo-se $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$;
- No segundo produto, $\frac{5}{6}\times\frac{7}{10}$, podemos simplificar 5 e 10 pelo número 5, obtendo-se $\frac{1}{6}\times\frac{7}{2}$; e
- No terceiro produto, $\frac{1}{9}\times\frac{9}{4}$, podemos simplificar 9 e 9 pelo número 9, obtendo-se $\frac{1}{1}\times\frac{1}{4}$.

Ficamos com:

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{7}{2}+\frac{1}{1}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{7}{12}+\frac{1}{4}$$

O **MMC** entre os denominadores **4**, **6** e **12** é **12**. Logo:

$$\frac{2}{\mathbf{12}}+\frac{7}{\mathbf{12}}+\frac{3}{\mathbf{12}}$$

$$=\frac{2+7+3}{\mathbf{12}}$$

$$=\frac{12}{12}$$

$$=1$$

Gabarito: Letra D.

A questão a seguir é relativamente complicada. Logo, não se assuste caso não consiga resolver. Inseri essa questão aqui para, aos poucos, perdermos o medo de frações.

(ALERN/2013) Sendo x e y números racionais positivos, definiremos a operação denotada por □ da seguinte forma:

$$x\square y=\frac{x}{x+\frac{x}{y}}$$

Por exemplo, fazendo os cálculos verifica-se que 5□1/2, em fração irredutível, é igual a 1/3. De acordo com essa operação que acaba de ser definida, para qualquer número racional positivo representado por x temos que $x\,\square 1/3$ será igual a a)2/3.

b)1/2.

c)1/5.

d)1/4.

e)2/5.

Comentários:

ESTA É DIFÍCIL!

Segundo o enunciado, a operação $x\square y$ é dada por:

$$x\square y = \frac{x}{\boldsymbol{x + \frac{x}{y}}}$$

O denominador $\boldsymbol{x + \frac{x}{y}}$ pode ser entendido como $\boldsymbol{\frac{x}{1} + \frac{x}{y}}$.

Realizando o **MMC** entre $\mathbf{1}$ e $\boldsymbol{y}$, obtém-se y. Ao realizar a soma das frações, ficamos com $\boldsymbol{\frac{x.y+x}{y}}$. Logo:

$$x\square y = \frac{x}{\boldsymbol{\frac{x.y + x}{y}}}$$

Veja que $x\square y$ é uma fração cujo numerador é x e o denominador é uma outra fração, dada por $\boldsymbol{\frac{x.y+x}{y}}$. Temos, portanto, a divisão de x por $\boldsymbol{\frac{x.y+x}{y}}$. Para realizar a divisão, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação:

$$x\square y = x \times \boldsymbol{\frac{y}{x.y + x}}$$

Note que, em $\boldsymbol{x.y + x}$, podemos colocar o x em evidência. Ficamos com $\boldsymbol{x \times (y + 1)}$. Logo:

$$x\square y = x \times \boldsymbol{\frac{y}{x \times (y + 1)}}$$

A partir do resultado obtido, podemos simplificar x. Ficamos com:

$$x\square y = \frac{y}{y + 1}$$

Logo, a operação $x\square y$ independe de x e equivale a $\frac{y}{y+1}$.

Para o caso em questão, $x\,\square 1/3$ é dado por:

$$x\,\square 1/3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}$$

$$x\,\square 1/3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1+3}{3}}$$

$$x\,\square 1/3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}$$

Para realizar a **divisão** de uma fração pela outra, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação:

$$x\,\square 1/3 = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$$

$$x\,\square 1/3 = \frac{1}{4}$$

Gabarito: Letra D.

Comparação de frações

Para compararmos frações, ou seja, para descobrir se uma fração é maior ou menor do que outra, devemos escrevê-las sob um mesmo denominador. Isso significa que, para todas as frações que serão objeto de comparação, devemos encontrar **frações equivalentes** **que apresentem o mesmo denominador**.

Outra forma válida de comparar frações é realizar a divisão do numerador pelo denominador, comparando-se os números decimais encontrados. Veja o exemplo a seguir:

(Pref. Salvador/2017) Considere as frações: $a = \frac{2}{5}, b = \frac{3}{10}, c = \frac{7}{20}$.

A ordem crescente dessas frações é

a) a, b, c.

b) b, a, c.

c) c, a, b.

d) b, c, a.

e) c, b, a.

Comentários:

O **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) entre os denominadores das frações $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, e $\boldsymbol{c}$ é **20**. Isso porque os denominadores 5 e 10 são múltiplos do denominador 20.

As frações equivalentes com denominador 20 são:

$$a = \frac{2}{5} = \frac{8}{\mathbf{20}} \qquad b = \frac{3}{10} = \frac{6}{\mathbf{20}} \qquad c = \frac{7}{\mathbf{20}}$$

Temos, portanto, que a ordem crescente das frações é $\frac{6}{\mathbf{20}}, \frac{7}{\mathbf{20}}, \frac{8}{\mathbf{20}}$. Logo, a ordem crescente das frações do enunciado é $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$. O **gabarito**, portanto, é **letra D**.

Outra forma de se comparar as frações é realizar a divisão do numerador pelo denominador:

$$a = \frac{2}{5} = 0{,}4 \qquad b = \frac{3}{10} = 0{,}3 \qquad c = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

Novamente, encontramos que a ordem crescente das frações do enunciado é $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$.

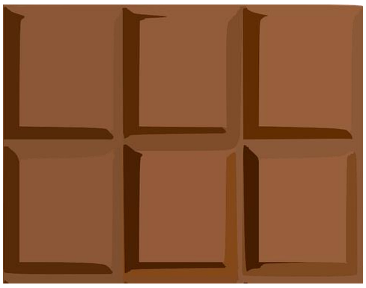
Gabarito: Letra D.

Problemas envolvendo frações

O uso da palavra “de”

Uma palavra muito importante que deve ser observada quando se resolve problemas envolvendo frações é a palavra "**de**". Isso porque essa palavra nos indica uma **multiplicação**.

Considere novamente uma barra de chocolate de 6 pedaços:



Para essa barra de chocolate, 1/3 **de** 6 pedaços corresponde a:

$$\frac{1}{3} \textbf{ de } 6 \text{ pedaços}$$

$$= \frac{1}{3} \times 6 \text{ pedaços}$$

$$= \frac{6}{3} \text{ pedaços}$$

$$= 2 \text{ pedaços}$$

Agora, vamos supor que João tem direito a 1/3 dessa barra **de** 6 pedaços e que, **da** parte de João, Maria comeu a metade (1/2). Quantos pedaços Maria comeu? Maria comeu 1/2 **de** 1/3 **de** 6 pedaços:

$$\frac{1}{2} \textbf{ de } \frac{1}{3} \textbf{ de } 6 \text{ pedaços}$$

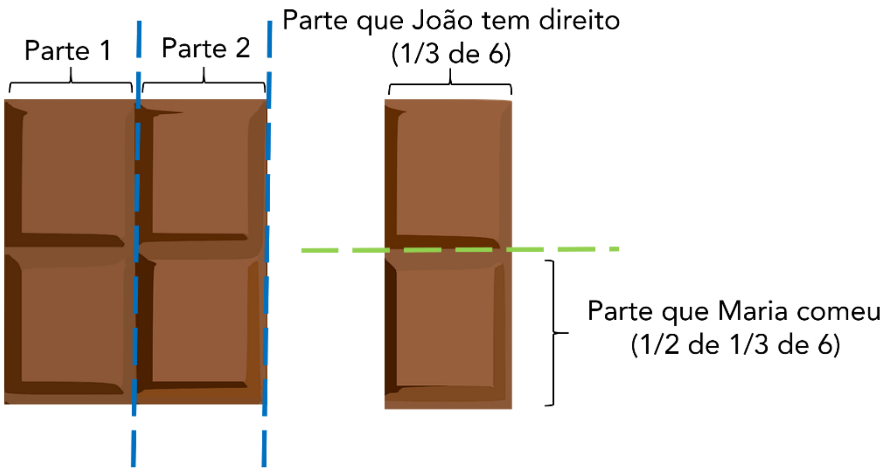
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 6 \text{ pedaços}$$

$$= \frac{1 \times 1 \times 6}{2 \times 3}$$

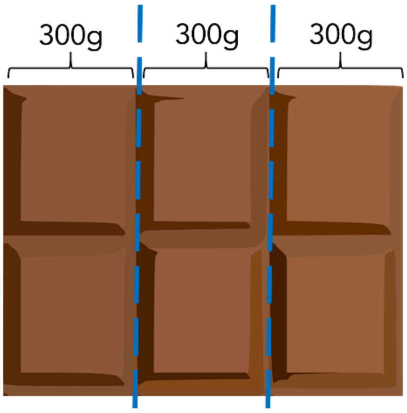
$$= \frac{6}{6}$$

$$= 1 \text{ pedaço}$$

Observe a figura abaixo, que representa a parte que Maria comeu:



E se disséssemos que essa barra de chocolate tem 900 gramas, quantos gramas temos em 1/3 dessa barra? Para resolver o problema, basta observar que, ao dividirmos a barra em 3 partes de 300 gramas, temos que a barra toda tem justamente 3 × 300g = 900g. Logo, 1/3 da barra apresenta 300 gramas.



Uma outra forma de se obter o resultado é trocar o "**de**" pela **multiplicação**:

$$\frac{1}{3}\ \textbf{de}\ 900\text{g}$$

$$= \frac{1}{3} \times 900\text{g}$$

$$= \frac{900\text{g}}{3}$$

$$= 300\text{g}$$

(AVAREPREV/2020) Uma empresa tem 120 funcionários, entre homens e mulheres. Se 2/5 desses funcionários são mulheres, é correto afirmar que o número de mulheres é igual a

a) 36.

b) 48.

c) 60.

d) 72.

Comentários:

São mulheres 2/5 **de** 120 funcionários.

$$\frac{2}{5}\ \textbf{de}\ 120$$

$$= \frac{2}{5} \times 120$$

$$= 2 \times \frac{120}{5}$$

$$= 2 \times 24$$

$$= 48$$

Gabarito: Letra B.

(Pref. Angra/2019) A família de Flávio pediu uma pizza, que veio dividida em 8 fatias iguais. Flávio comeu uma fatia inteira e dividiu uma outra fatia igualmente com sua irmã.

Da pizza inteira Flávio comeu

a) 1/4.

b) 1/3.

c) 3/8.

d) 1/6.

e) 3/16.

Comentários:

Uma fatia da pizza corresponde a $\frac{1}{8}$ da pizza. Flávio comeu uma fatia mais a metade de outra fatia. Ao comer metade da outra fatia, Flávio comeu $\frac{1}{2}$ **de** $\frac{1}{8}$ da pizza.

Isso significa que Flávio comeu ao todo:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ \textbf{de}\ \frac{1}{8} \text{ da pizza}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{8} \text{ da pizza}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{16} \text{ da pizza}$$

$$=\frac{2}{16}+\frac{1}{16} \text{ da pizza}$$

$$=\frac{2+1}{16} \text{ da pizza}$$

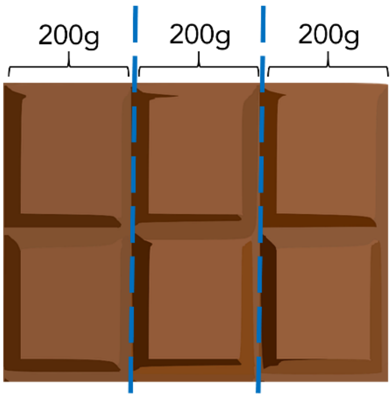
$$=\frac{3}{16} \text{ da pizza}$$

Gabarito: Letra E.

Obtenção do todo a partir da parte

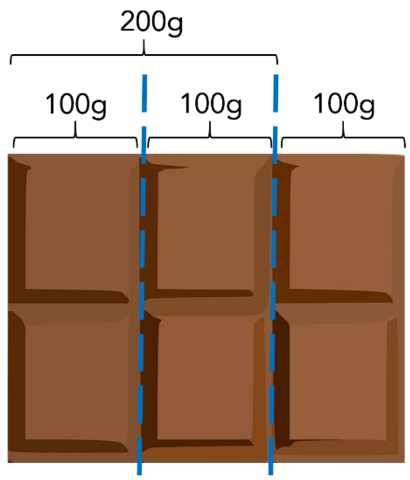
Se disséssemos que 1/3 de uma barra de chocolate tem 200g, quantos gramas tem a barra de chocolate inteira? Para se responder essa pergunta, basta observar que, se uma parte de 3 tem 200g, as três partes que compõem o todo da barra têm:

$$3\times 200\text{g} = 600\text{g}$$



E se disséssemos que 2/3 da barra tem 200g, quantos gramas tem a barra de chocolate inteira? **Ora, se 2 partes de 3 tem 200g, 1 parte de 3 tem 100g**. **Logo, as três partes** que compõem o todo devem ter:

$$3\ \times 100\text{g} = \mathbf{300g}$$



Uma **forma prática de se obter o todo a partir da parte** do problema é **utilizar o recurso** "**inverte e multiplica**".

Veja que, se 2/3 corresponde a 200g, podemos obter o todo invertendo a fração e multiplicando pelo valor que representa a parte (200g):

$$\frac{3}{2} \times 200\text{g}$$

$$= 3 \times \frac{\mathbf{200g}}{\mathbf{2}}$$

$$\mathbf{= 3 \times 100g}$$

$$= 300\text{g}$$

Por que esse recurso funciona? Perceba que, ao "inverter e multiplicar" a fração 2/3 que corresponde à parte, na verdade **estamos dividindo o valor de 200g por 2, obtendo o valor de uma parte de 3 (100g),** para em seguida **multiplicar essa terça parte por 3, obtendo assim o valor do todo (300g).**

(MPE BA/2017) Em certo reservatório, $\frac{2}{3}$ do volume de água correspondem a 120 litros.

Portanto, $\frac{3}{2}$ do volume de água desse mesmo reservatório correspondem a:

a) 270 litros;

b) 240 litros;

c) 210 litros;

d) 180 litros;

e) 150 litros.

Comentários:

Uma **forma prática de se obter o todo a partir da parte** do problema é **utilizar o recurso** "**inverte e multiplica**".

Se 2/3 correspondem a 120 litros, a **capacidade total** do reservatório é:

$$\frac{3}{2} \times 120$$

$$= 3 \times \frac{120}{2}$$

$$= 3 \times 60$$

$$= 180 \text{ litros}$$

Note que a questão **não nos pede a capacidade total** do reservatório, mas sim **3/2 da capacidade**.

$$\frac{3}{2} \textbf{ de } 180 \text{ litros}$$

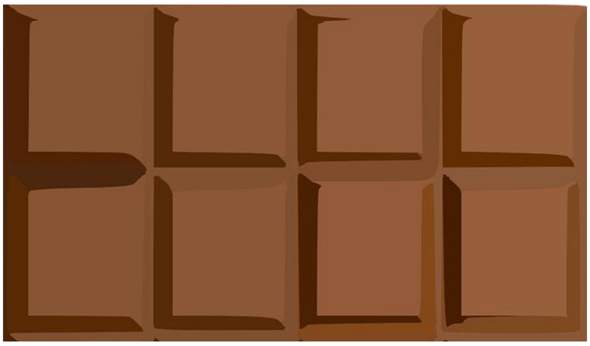
$$= \frac{3}{2} \times 180$$

$$= 270 \text{ litros}$$

Gabarito: Letra A.

Obtenção da fração complementar

Observe a seguinte barra com 8 pedaços de chocolate.



Se comermos 5/8 da barra, **qual fração da barra original ainda resta**?

Note que a parte que **não foi comida** é dada pela **subtração de 5/8 da barra inteira**. A barra inteira pode ser representada por 8/8 (8 pedaços de um total de 8 pedaços) ou então pelo número inteiro 1. Logo, a parte que não foi comida é:

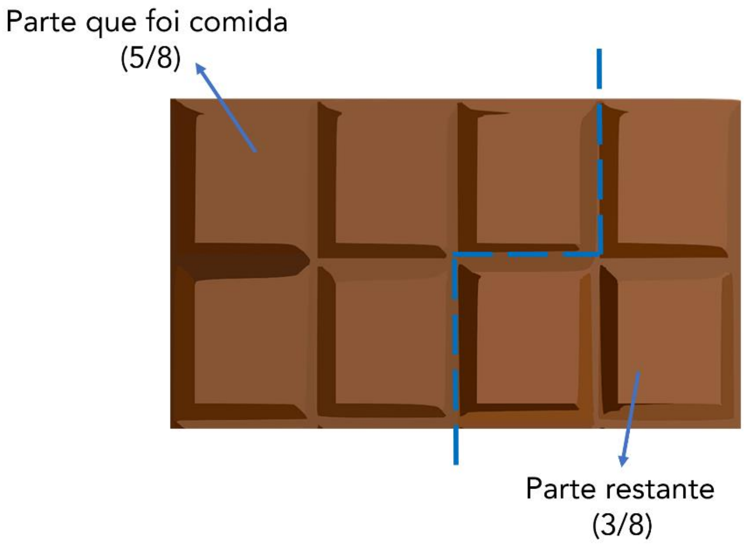
$$1 - \frac{5}{8}$$

$$= \frac{8}{8} - \frac{5}{8}$$

$$= \frac{8-5}{8}$$

$$= \frac{3}{8}$$

Note que, para a barra em questão, o que restou após se comer 5/8 é justamente 3 pedaços de 8 (3/8):



Podemos dizer, então, que dada uma fração $\frac{a}{b}$, a **fração complementar** corresponde a:

$$1 - \frac{a}{b} =$$

$$\frac{b}{b} - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$$

(IBGE/2019) Marlene comeu, inicialmente, um quarto da barra de chocolate que comprou. Depois, comeu um terço do que tinha sobrado.

A fração da barra de chocolate que Marlene ainda tem para comer é:

a) 1/2;

b) 1/3;

c) 1/4;

d) 3/4;

e) 1/12.

Comentários:

Inicialmente, Marlene **comeu $\frac{1}{4}$ da barra de chocolate**.

O total da barra que restou corresponde à fração complementar a $\frac{1}{4}$:

$$1 - \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{3}{4}\ da\ barra}$$

Depois, ao comer $\frac{1}{3}$ **do que tinha sobrado**, Marlene comeu:

$$\frac{1}{3}\ \mathbf{de}\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\ \mathbf{da\ barra}$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\ \mathbf{da\ barra}$$

$$=\frac{1}{4}\ \text{da barra}$$

O total da barra de chocolate que Marlene comeu nas duas vezes foi:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{2}{4}$$

$$=\frac{1}{2}$$

Como ela comeu no total $\frac{1}{2}$ da barra, a quantidade que restou corresponde à fração complementar a $\frac{1}{2}$:

$$1-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\ \text{da barra}$$

Gabarito: Letra A.

(Pref. Cananéia/2020) Mauro comprou um carro. Deu $\frac{1}{3}$ do valor total como entrada e financiou $\frac{3}{4}$ do valor restante. A quantia que falta para completar o valor total será paga em uma única parcela, após o término do financiamento. O valor dessa parcela final corresponde, do valor total do carro, a

a)1/8

b)1/6

c)1/5

d)1/4

e)1/3

Comentários:

Como Mauro deu $\frac{1}{3}$ do valor total como entrada, o **valor restante após a entrada** é a fração complementar a $\frac{1}{3}$:

$$1-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{3}{3}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{3-1}{3}$$

$$=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

Como Mauro **financiou $\frac{3}{4}$** **do valor restante após a entrada**, **ele financiou $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$**.

Isso significa que ele **não financiou $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$**, pois a fração complementar de $\frac{3}{4}$ é:

$$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

Logo, a quantia **não financiada** do valor restante após a entrada, que corresponde à parcela final, corresponde a:

$$\frac{1}{4}\ \mathbf{de}\ \frac{2}{3}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$$

Simplificando 2 e 4 por 2, temos:

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{6}$$

Gabarito: Letra B.

Vamos agora resolver algumas questões a mais sobre problemas envolvendo frações.

(Pref. B dos Coqueiros/2020) No início de determinado mês, uma escola tinha um estoque de 720 kg de alimentos. Nas três primeiras semanas desse mês, foram consumidos, respectivamente, 1/6, 5/24 e 1/5 desse estoque de alimentos.

Considerando essa situação hipotética, assinale a opção que apresenta a quantidade de alimentos restante nesse estoque logo após essas três semanas.

a) 144 kg

b) 180 kg

c) 210 kg

d) 306 kg

e) 414 kg

Comentários:

A fração que corresponde ao total de alimentos consumidos é:

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{24} + \frac{1}{5}$$
$$= \frac{20}{120} + \frac{25}{120} + \frac{24}{120}$$
$$= \frac{69}{120}$$

A fração que corresponde ao total de alimentos **não consumidos** é dada pela **fração complementar** a $\frac{69}{120}$:

$$1 - \frac{69}{120}$$
$$= \frac{120 - 69}{120}$$
$$= \frac{51}{120}$$

O total de alimentos não consumidos é dado por:

$$\frac{51}{120}\ \textbf{de}\ 720\ \text{kg}$$
$$= \frac{51}{120} \times 720$$
$$= 51 \times \frac{720}{120}$$
$$= 51 \times 6$$
$$= 306\ \text{kg}$$

Gabarito: Letra D.

(TRF 4/2019) Um ciclista pedalou durante três horas. Na primeira hora percorreu $\frac{5}{18}$ do trajeto, na segunda hora percorreu $\frac{7}{25}$ do trajeto e na terceira hora percorreu $\frac{11}{45}$ do trajeto. A fração do trajeto que falta percorrer é

a) $\frac{361}{460}$

b) $\frac{351}{460}$

c) $\frac{89}{450}$

d) $\frac{99}{450}$

e) $\frac{250}{460}$

Comentários:

O total do trajeto percorrido pelo ciclista é dado pela seguinte soma:

$$\frac{5}{18}+\frac{7}{25}+\frac{11}{45}$$

Para realizar a soma, devemos representar as frações por meio de **frações equivalentes** com um **mesmo denominador**. O **menor denominador comum possível** para realizar a soma é o **MMC entre 18**, **25** e **45**. Decompondo esses números em fatores primos, temos:

$$18 = 2 \times 9$$
$$= 2 \times 3^2$$

$$25 = 5 \times 5$$
$$= 5^2$$

$$45 = 9 \times 5$$
$$= 3^2 \times 5$$

Devemos selecionar <u>todos</u> os fatores primos obtidos com os <u>maiores expoentes</u> e realizar o produto.

$18 = 2 \times 3^2$

$25 = \quad 5^2$

$45 = \quad 3^2 \times 5$

Logo, $\text{MMC}\ (18{,}25{,}45) = 2 \times 3^2 \times 5^2 = \mathbf{450}$

Portanto, a soma que corresponde à fração do **trajeto percorrido** é:

$$\frac{5}{18}+\frac{7}{25}+\frac{11}{45}$$

$$= \frac{125}{\mathbf{450}} + \frac{126}{\mathbf{450}} + \frac{110}{\mathbf{450}}$$

$$= \frac{125 + 126 + 110}{\mathbf{450}}$$

$$= \frac{361}{450}$$

O trajeto **não percorrido** pedido pela questão é dado pela **fração complementar** a $\frac{361}{450}$:

$$1 - \frac{361}{450}$$

$$= \frac{450}{450} - \frac{361}{450}$$

$$= \frac{450 - 361}{450}$$

$$= \frac{89}{450}$$

Gabarito: Letra C.

Quando nos deparamos com problemas envolvendo frações, um recurso importante para resolvê-los consiste em **modelar o problema atribuindo uma incógnita a determinado valor que se desconhece**. Esse recurso será utilizado com frequência na resolução dos exercícios. Vejamos:

(PC AM/2022) Geraldo resolveu se desfazer de sua coleção de miniaturas. Assim, ele deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson; das que sobraram, ele deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson e as 48 restantes ele deu para sua irmã Glória.

O número de miniaturas que Gilson recebeu foi

a) 12.

b) 16.

c) 18.

d) 24.

e) 48.

Comentários:

Considere que o total de miniaturas de Geraldo seja M.

"...ele (Geraldo) deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson..."

Note que o total de miniaturas que ficou com Gerson é:

$$(\text{Miniaturas Gerson}) = \frac{2}{5} \text{ de } M$$

$$= \frac{2}{5} \times M$$

$$= \frac{2}{5} M$$

"...das que sobraram, ele (Geraldo) deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson..."

Após a distribuição para Gerson, o total de miniaturas que sobraram foi:

$$(\text{Total}) - (\text{Miniaturas Gerson})$$

$$= M - \frac{2}{5} M$$

$$= \frac{5M - 2M}{5}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{5} M}$$

<u>**Desse total que restou**</u>, $\frac{1}{3}$ ficou com o Gilson. Logo, o número de miniaturas que ficaram com Gilson foi:

$$(\text{Miniaturas Gilson}) = \frac{1}{3} \text{de} \boldsymbol{\frac{3}{5} M}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} M$$

$$= \frac{1}{5} M$$

"...e as 48 restantes ele (Geraldo) deu para sua irmã Glória..."

O número de miniaturas que restou para Glória foi:

$$(\text{Total}) - (\text{Miniaturas Gerson}) - (\text{Miniaturas Gilson})$$

$$M - \frac{2}{5} M - \frac{1}{5} M$$

$$= \frac{5M - 2M - 1M}{5}$$

$$= \frac{2}{5} M$$

Esse número de miniaturas corresponde a 48. Logo:

$$\frac{2}{5}M = 48$$

$$M = \frac{48 \times 5}{2}$$

$$M = 120$$

Portanto, **o total de miniaturas é 120**. Queremos obter o número de miniaturas que ficaram com Gilson:

$$(\text{Miniaturas Gilson}) = \frac{1}{5}M$$

$$= \frac{1}{5} \times 120$$

$$\mathbf{= 24}$$

Gabarito: Letra D.

(SSP AM/2022) Os alunos de uma turma estavam se preparando para um concurso. Constatou-se que: a terça parte do total de alunos torce pelo Manaus FC, a quarta parte do total de alunos torce pelo Nacional-AM, e os 35 alunos restantes torcem por outros clubes ou não são ligados em futebol.

O número de alunos dessa turma que torcem pelo Manaus FC é

a) 21.

b) 25.

c) 26.

d) 28.

e) 35.

Comentários:

Considere que o total de alunos da turma seja A.

"...a terça parte do total de alunos torce pelo Manaus FC..."

Logo, o total de alunos que torce pelo Manaus FC é:

$$(\text{Manaus FC}) = \frac{1}{3}\,\mathbf{de}\ \text{A}$$

$$= \frac{1}{3} \times \text{A}$$

$$= \frac{1}{3}\text{A}$$

"...a quarta parte do total de alunos torce pelo Nacional-AM..."

Logo, o total de alunos que torce pelo Nacional-AM é:

$$(\text{Nacional-AM}) = \frac{1}{4}\,\textbf{de}\ \text{A}$$

$$= \frac{1}{4} \times \text{A}$$

$$= \frac{1}{4}\text{A}$$

"...e os 35 alunos restantes torcem por outros clubes ou não são ligados em futebol."

O número de alunos restantes é:

$$(\text{Total de alunos}) - (\text{Manaus FC}) - (\text{Nacional-AM})$$

$$A - \frac{1}{3}A - \frac{1}{4}A$$

$$= \frac{12A - 4A - 3A}{12}$$

$$= \frac{5A}{12}$$

Esse número de alunos corresponde a 35. Logo:

$$\frac{5A}{12} = 35$$

$$A = 35 \times \frac{12}{5}$$

$$A = 84$$

Portanto, **o total de alunos é 84**. Queremos obter o número de alunos que torcem pelo Manaus FC:

$$(\text{Manaus FC}) = \frac{1}{3}A$$

$$= \frac{1}{3} \times 84$$

$$= 28$$

Gabarito: Letra D.

Dízima periódica

Definição e representação

Uma dízima periódica ocorre quando, ao realizar uma divisão, obtém-se um número com casas decimais que se repetem indefinidamente.

Exemplo: Ao realizar a divisão de 23 por 99, obtém-se o número "0,23232323...". Note que que a porção "23" se repete indefinidamente. Nesse caso, dizemos que 23 é o período da dízima periódica "0,23232323...". Isso significa que **o período é a porção que se repete na dízima periódica**.

Podemos **representar uma dízima periódica com um traço sobre o período**. Isto é:

$$0{,}23232323\ldots = 0{,}\overline{23}$$

A dízima periódica "5,77898989..." apresenta o período "89", pois esta é a porção que se repete indefinidamente. Podemos representar essa dízima periódica da seguinte forma:

$$5{,}77898989\ldots = 5{,}77\overline{89}$$

Transformação da dízima periódica em fração

Os principais problemas relacionados às dizimas periódicas consistem em transformar o número em uma fração. Para realizar essa transformação, a única coisa que você precisa se lembrar é que:

- Um número na forma $\mathbf{0,AAA}\ldots = \mathbf{0,\overline{A}}$ corresponde a $\frac{\mathrm{A}}{9}$;
- Um número na forma $\mathbf{0,ABABAB}\ldots = \mathbf{0,\overline{AB}}$ corresponde a $\frac{AB}{99}$;
- Um número na forma $\mathbf{0,ABCABCABC}\ldots = \mathbf{0,\overline{ABC}}$ corresponde a $\frac{ABC}{999}$;
- E assim sucessivamente.

$\mathbf{0,\overline{ABC}}$ corresponde a $\frac{ABC}{999}$

Vamos a alguns exemplos.

Transforme 0,3333.... em uma fração

$$0{,}3333\ldots = 0,\overline{3} = \frac{3}{9}$$

Transforme 0,45454545... em uma fração

$$0{,}4545\ldots = 0,\overline{45} = \frac{45}{99}$$

Transforme 0,672346723467234... em uma fração

$$0{,}672346723467234\ldots = 0,\overline{67234} = \frac{67234}{99999}$$

Para dízimas periódicas que fogem desse padrão, devemos modificá-las de modo a deixá-las no formato que conhecemos. Vejamos:

Transforme 0,553333... em uma fração

Veja que o período da dízima periódica é 3. Vamos separar 0,55 do restante do número:

$$0{,}55\overline{3} = 0{,}55 + \mathbf{0,00\overline{3}}$$

Note que ainda não podemos transformar a parte que apresenta o período em uma fração. Devemos escrevê-la de uma outra forma:

$$= 0{,}55 + \mathbf{\frac{1}{100}} \times \mathbf{0,\overline{3}}$$

Agora sim temos $0,\overline{3}$. Esse número corresponde a 3/9.

$$= 0{,}55 + \frac{1}{100} \times \frac{3}{9}$$

$$= \frac{55}{100} + \frac{3}{900}$$

$$= \frac{9 \times 55 + 3}{900}$$

$$= \frac{498}{900}$$

Transforme 6,453121212... em uma fração

Devemos realizar o mesmo procedimento, separando a parte que não se repete do período da dízima periódica.

$$6{,}453\overline{12}\ldots = 6{,}453 + 0{,}000\overline{12}$$

$$= 6{,}453 + \frac{1}{1000} \times 0,\overline{12}$$

$$= 6{,}453 + \frac{1}{1000} \times \frac{12}{99}$$
$$= \frac{6453}{1000} + \frac{12}{99000}$$
$$= \frac{99 \times 6453 + 12}{99000}$$
$$= \frac{638859}{99000}$$

INDO MAIS FUNDO!

Uma decorrência interessante sobre a dízima periódica é que 0,999... é igual a 1. Não se trata de uma aproximação. Os números são exatamente iguais.

$$0{,}999\ldots = 0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$$

Vamos resolver algumas questões.

(DPE RS /2017) Sabendo que o número decimal F é $0{,}8666\ldots$, que o número decimal G é $0{,}7111\ldots$ e que o número decimal H é $0{,}4222\ldots$, então, o triplo da soma desses três números decimais, F, G e H, é igual a

a) 6,111 . . .

b) 5,888 . . .

c) 6

d) 3

e) 5,98

Comentários:

A soma de F, G e H é dada por:

$$0{,}8\overline{6} + 0{,}7\overline{1} + 0{,}4\overline{2}$$

Separando as partes que não se repetem dos períodos, temos:

$$= \mathbf{(0,8 + 0,7 + 0,4)} + 0{,}0\overline{6} + 0{,}0\overline{1} + 0{,}0\overline{2}$$
$$= \mathbf{1,9} + \frac{1}{10}0,\overline{6} + \frac{1}{10}0,\overline{1} + \frac{1}{10}0,\overline{2}$$
$$= 1{,}9 + \frac{1}{10} \times (0,\overline{6} + 0,\overline{1} + 0,\overline{2})$$
$$= 1{,}9 + \frac{1}{10} \times \left(\frac{6}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9}\right)$$
$$= 1{,}9 + \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{9}\right)$$

$$= 1{,}9 + 0{,}1$$

$$= 2$$

A questão pede o triplo da soma de F, G e H, que é dado por $3 \times 2 = 6$.

Gabarito: Letra C.

(MIN/2013) Julgue o seguinte item, relativo a sistemas numéricos e sistema legal de medidas.

Se A = 1,232323... e B = 0,434343..., então A + B = 165/99.

Comentários:

Observe que A apresenta o período 23.

$$A = 1,\overline{23}$$

$$= 1 + \frac{23}{99}$$

$$= \frac{99 + 23}{99} = \frac{122}{99}$$

B apresenta o período 43.

$$B = 0,\overline{43}$$

$$= \frac{43}{99}$$

Ao somar A e B, temos:

$$A + B = \frac{122}{99} + \frac{43}{99}$$

$$= \frac{165}{99}$$

Gabarito: CERTO.

RAZÃO E PROPORÇÃO

Razão e proporção

Razão

A **razão** entre os números A e B é a divisão de A por B.

- Razão entre A e B;
- Razão de A para B;
- A está para B;
- A:B;
- A/B;
- $\frac{A}{B}$.

Proporção

Proporção é a igualdade entre duas **ou mais razões**.

Sejam as **razões A/B e C/D**. A **proporção** é dada pela igualdade: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

- A e D são os **extremos**; e
- B e C são os **meios**

Em uma proporção, o **produto dos meios** é igual ao **produto dos extremos**.

Em outras palavras, dada a proporção $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, temos que $C \times B = A \times D$.

Outra forma de entender a **"multiplicação cruzada"** é perceber que **podemos rearranjar os meios e os extremos**.

Não confundir a razão entre duas entidades com a razão entre uma entidade e a totalidade de casos do problema.

Propriedade fundamental da soma

Considerando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$,então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$

Não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção:

Considerando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c}{b+d}$

Propriedade fundamental da subtração

Considerando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

Uso conjunto das propriedade da soma e da subtração

Podemos somar e subtrair os numeradores e os denominadores seguindo a mesma lógica:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{-a+c+e+g}{-b+d+f+h}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{-a+c-e+g}{-b+d-f+h}$$

São diversas as possibilidades. **Não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção.**

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{-c+e-g}{-d+f-h}$$

Escala

A **escala** é um **tipo específico de razão**. Trata-se da razão entre uma medida representada em um desenho e a medida real do objeto que se representa.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

Velocidade Média e Vazão

Velocidade Média

A **velocidade média** corresponde à razão entre uma distância percorrida e o tempo em que se percorreu essa distância:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

Para **converter km/h para m/s, devemos dividir o valor por 3,6**
Para **converter m/s para km/h, devemos multiplicar o valor por 3,6**

Vazão

A **vazão** corresponde à razão entre um volume e um tempo.

$$\text{Vazão} = \frac{\text{Volume}}{\text{Tempo}}$$

Em problemas envolvendo vazão, geralmente devemos utilizar o fato de que **a soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta**.

Dois conceitos importantes derivados das frações são a **razão** e a **proporção**. Vamos compreendê-los.

Razão

Sejam dois números **A** e **B**, com **B** diferente de zero. A **razão entre os números A e B é a divisão de A por B**, podendo ser expressa por:

- Razão entre **A** e **B**;
- Razão de **A** para **B**;
- **A** está para **B;**
- **A:B**;
- **A/B**;
- $\boldsymbol{\frac{A}{B}}$.

O conceito de razão nos permite fazer a comparação entre dois números. Se, por exemplo, tivermos em uma sala 10 adultos e 5 crianças, a razão entre o **número de adultos** e o **número de crianças** é:

$$\frac{\text{Número de adultos}}{\text{Número de crianças}} = \frac{10}{5} = 2$$

Note, portanto, que a razão entre o número de adultos e o número de crianças <u>representa quantas vezes o número de adultos é maior do que o número de crianças</u>. Para o exemplo em questão, representa quantas vezes o número 10 é maior do que o 5: duas vezes.

Se quisermos a razão entre o **número de crianças** e o **número de adultos**, temos:

$$\frac{\text{Número de crianças}}{\text{Número de adultos}} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Vamos exercitar esse conceito.

(SEFAZ-BA/2019) Durante a campanha para eleições presidenciais em determinado país foram compartilhadas 30 milhões de vezes fakenews a favor do candidato A. Já fakenews a favor do candidato B foram compartilhadas 6 milhões de vezes. De acordo com esses dados, pode-se estimar que a razão entre a diferença entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B em relação ao número de compartilhamentos de fakenews pró-B é igual a

a) 4.

b) 3.

c) 2.

d) 5.

e) 6.

Comentários:

O número de compartilhamentos de fakenews pró-A é $N_A = 30\ milhões$.

O número de compartilhamentos de fakenews pró-B é $N_B = 6\ milhões$.

A diferença **D** entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B é dada por:

$$D = N_a - N_b = 24\ milhões$$

A questão pede **razão entre** a diferença entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B **em relação ao** número de compartilhamentos de fakenews pró-B.

Trata-se da **razão entre $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{N_b}$:**

$$\frac{D}{N_b} = \frac{24\ milhões}{6\ milhões} = \frac{24}{6} = 4$$

Gabarito: Letra A.

(CREF 12/2013) Se a razão A/B vale 3, sendo B diferente de 0, então a razão de (2A—B)/2A vale:

a) 1

b) 1/2

c) 4/5

d) 3/5

e) 5/6

Comentários:

Podemos escrever A em função de B.

$$\frac{A}{B} = 3$$

$$A = 3B$$

Substituindo **A = 3B** na razão **(2A—B)/2A**, temos:

$$\frac{2A - B}{2A}$$

$$= \frac{2 \times 3B - B}{2\ \times 3B}$$

$$\frac{6B - B}{6B}$$

$$\frac{5B}{6B} = \frac{5}{6}$$

O **gabarito**, portanto, é **Letra E**.

Outra forma de se resolver a questão é "fazer aparecer" a razão **A/B** na razão **(2A—B)/2A**.

$$\frac{2\mathrm{A} - \mathrm{B}}{2\mathrm{A}}$$

$$= \frac{2A}{2A} - \frac{B}{2A}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{B}{A}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{A}{B}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$= 1 - \frac{1}{6}$$

$$\frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

Gabarito: Letra E.

Assim como ocorre em problemas envolvendo frações, um recurso importante para resolver exercícios envolvendo o conceito de razão consiste em **modelar o problema atribuindo uma incógnita a determinado valor que se desconhece**. Vejamos:

(CBM AM/2022) Em um grupo de pessoas, o número de homens é igual ao número de mulheres. Selecionam-se então $\frac{2}{5}$ dos homens $\frac{3}{4}$ das mulheres e forma-se um novo grupo.

Nesse novo grupo, em relação ao total de pessoas, as mulheres representam

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{9}$

c) $\frac{7}{20}$

d) $\frac{15}{23}$

e) $\frac{17}{25}$

Comentários:

Considere que originalmente o número de **homens** e o número de **mulheres** seja **igual a X**, **totalizando $2X$ pessoas**.

No novo grupo, temos $\frac{2}{5}$ dos homens. O total de homens nesse novo grupo é:

$$\text{Homens}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}} = \frac{2}{5}\ \textbf{de}\ X = \frac{2}{5} \times X = \frac{2}{5}X$$

Ainda no novo grupo, temos $\frac{3}{4}$ das mulheres. O total de mulheres nesse novo grupo é:

$$\text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\\text{grupo}}} = \frac{3}{4}\ \textbf{de}\ X = \frac{3}{4} \times X = \frac{3}{4}X$$

Nesse novo grupo, **a razão entre o número de mulheres e o total de pessoas é**:

$$\frac{\text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\ \text{grupo}}}}{\text{Homens}_{\substack{\text{novo}\\ \text{grupo}}} + \text{Mulheres}_{\substack{\text{novo}\\ \text{grupo}}}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{2}{5}X + \frac{3}{4}X}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{8X + 15X}{20}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{23}{20}X}$$

Simplificando X, temos:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{23}{20}}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{20}{23}$$

$$= \mathbf{\frac{15}{23}}$$

Gabarito: Letra D.

Proporção

Conceito de proporção

Proporção é a igualdade entre duas **ou mais razões**.

Sejam as razões **A/B** e **C/D**. A proporção é dada pela igualdade:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Podemos representar uma proporção das seguintes formas:

- **A** está para **B** assim como **C** está para **D**;
- **A:B::C:D**;
- **A/B = C/D**;
- $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Ainda em uma proporção **A/B = C/D**, diz-se que:

- **A** e **D** são os **extremos**; e
- **B** e **C** são os **meios**.

Multiplicação cruzada

A propriedade das proporções conhecida por **"multiplicação cruzada"** nos diz o seguinte:

Em uma proporção, o **produto dos meios** é igual ao **produto dos extremos**.
Em outras palavras, dada a proporção $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, temos que $C \times B = A \times D$.

Considere, por exemplo, a proporção:

$$\frac{5}{10} = \frac{20}{40}$$

Note que o produto dos meios, 10×20, é igual ao produto dos extremos, 5×40, pois ambas as multiplicações nos retornam o resultado 200.

Vamos a um exemplo.

Determine o valor de incógnita x na proporção $\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9\ (x+1)}{20}$.

Realizando a **"multiplicação cruzada"**, obtemos:

$$4 \times 9(x+1) = 3(x-2) \times 20$$

$$36 \times (x+1) = 60 \times (x-2)$$

$$36x + 36 = 60x - 120$$

$$120 + 36 = 60x - 36x$$

$$156 = 24x$$

$$24x = 156$$

$$x = \frac{156}{24}$$

$$x = 6{,}5$$

Outra forma de entender a **"multiplicação cruzada"** é perceber que podemos rearranjar os **meios** e os **extremos**. Para exemplificar esse conceito, considere a mesma proporção:

$$\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9\ (x+1)}{20}$$

Os meios da proporção considerada são $\mathbf{4}$ e $\mathbf{9\ (x+1)}$.

$$\frac{3(x-2)}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{9\ (x+1)}}{20}$$

Podemos rearranjar os meios da proporção original da seguinte forma:

$$\frac{3(x-2)}{1} = \frac{\mathbf{4 \times 9(x+1)}}{20}$$

Também podemos rearranjar os meios da proporção original assim:

$$\frac{3(x-2)}{\mathbf{4 \times 9\ (x+1)}} = \frac{1}{20}$$

Outra possibilidade é trocar os meios de posição:

$$\frac{3(x-2)}{\mathbf{9\ (x+1)}} = \frac{\mathbf{4}}{20}$$

A mesma ideia vale para os extremos da proporção.

Os extremos da proporção considerada são $\mathbf{3(x-2)}$ e $\mathbf{20}$.

$$\frac{\mathbf{3(x-2)}}{4}=\frac{9\,(x+1)}{\mathbf{20}}$$

Podemos rearranjar os extremos das seguintes formas:

$$\frac{\mathbf{3(x-2)\times 20}}{4}=\frac{9\,(x+1)}{1}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{9\,(x+1)}{\mathbf{3(x-2)\times 20}}$$

$$\frac{\mathbf{20}}{4}=\frac{9\,(x+1)}{\mathbf{3(x-2)}}$$

Entendida essa nova percepção da **"multiplicação cruzada"**, vamos determinar o valor da incógnita x de outra maneira.

Determine o valor de incógnita x na proporção $\frac{3(x-2)}{4}=\frac{9\,(x+1)}{20}$.

$$\frac{3(x-2)}{4}=\frac{9(x+1)}{20}$$

$$\frac{3(x-2)}{1}=\frac{4\times 9\,(x+1)}{20}$$

$$\frac{(x-2)}{1}=\frac{4\times 9\,(x+1)}{3\times 20}$$

$$(x-2)=\frac{4\times 9}{3\times 20}\times(x+1)$$

Simplificando 4 com 20 e 9 com 3, obtemos:

$$(x-2)=\frac{3}{5}\times(x+1)$$

$$x-2=\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}$$

$$x - \frac{3}{5}x = 2 + \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5}x = \frac{13}{5}$$

$$2x = 13$$

$$x = \frac{13}{2}$$

$$x = 6{,}5$$

Vamos praticar o que aprendemos sobre **“multiplicação cruzada”**.

(Pref. P das Missões/2019) O valor de “x” na proporção $\frac{x}{2} = \frac{x+7}{4}$ é:

a) 2.

b) 5.

c) 7.

d) 9.

e) 10.

Comentários:

Sabemos que:

- $$\frac{x}{2} = \frac{x+7}{4}$$

Para determinar o valor de "x", devemos utilizar a "multiplicação cruzada".

$$x \times 4 = 2 \times (x + 7)$$

$$4x = 2x + 14$$

$$4x - 2x = 14$$

$$2x = 14$$

$$x = \frac{14}{2}$$

$$x = 7$$

Gabarito: Letra C.

(CODESG/2019) Considere que os números 0,6; 1,6; 0,3; e k formam, nessa ordem, uma proporção. Qual o valor de k?

a) 0,8

b) 1,8

c) 2,4

d) 2,6

Comentários:

Como os números 0,6; 1,6; 0,3; e k formam uma proporção na ordem indicada, então:

$$\frac{0{,}6}{1{,}6} = \frac{0{,}3}{k}$$

Para determinar o valor de "k", devemos utilizar a "multiplicação cruzada".

$$0{,}6 \times k = 1{,}6 \times 0{,}3$$

$$0{,}6k = 0{,}48$$

$$k = \frac{0{,}48}{0{,}6}$$

$$k = 0{,}8$$

Gabarito: Letra A.

(Pref. Peruíbe/2019) Em um experimento químico, a razão entre uma quantidade do produto A para 2/3 da quantidade do produto B é igual a 1/3. Para obter esse resultado é(são) necessário(s), do produto A,

a) 1/6 da quantidade do produto B.

b) 2/9 da quantidade do produto B.

c) 1/3 da quantidade do produto B.

d) 2/5 da quantidade do produto B.

e) 1/2 da quantidade do produto B.

Comentários:

Seja Q_A a quantidade do produto A e Q_B a quantidade do produto B.

A razão entre Q_A e $\frac{2}{3}Q_b$ é igual a 1/3. Logo:

$$\frac{Q_A}{\left(\frac{2}{3}Q_B\right)} = \frac{1}{3}$$

Rearranjando os meios, temos:

$$\frac{Q_A}{1} = \frac{\left(\frac{2}{3}Q_B\right)}{3}$$

$$Q_A = \frac{2Q_B}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$Q_A = \frac{2}{9} Q_B$$

Logo, são necessários do produto A 2/9 da quantidade do produto B.

Gabarito: Letra B.

Um ponto muito importante na resolução de problemas é **não confundir** a razão entre duas entidades com a razão entre uma entidade e a totalidade de casos do problema. Vejamos o exemplo a seguir:

(Pref. Peruíbe/2019) No ano de 2015, uma pesquisa revelou que, no Brasil, a razão entre o número de pessoas que apresentam algum tipo de deficiência e o número de pessoas que não apresentam deficiência é de 1/3. Com base nessa informação, é correto afirmar que, no Brasil, a cada

a) seis pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

b) cinco pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

c) quatro pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

d) três pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

e) duas pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

Comentários:

Perceba que o problema pergunta sobre a razão entre as pessoas com deficiência (C) e a **totalidade da população** brasileira (T).

A razão apresentada pelo enunciado é entre as pessoas com deficiência (C) e as pessoas sem deficiência (S):

$$\frac{\text{C}}{\text{S}} = \frac{1}{3}$$

Ao realizar a "multiplicação cruzada", obtemos que o número de pessoas sem deficiência é o triplo do número de pessoas com deficiência:

$$1\text{S} = 3\text{C}$$

O total de pessoas no Brasil (T) corresponde à soma das pessoas com e sem deficiência:

$$\text{T} = \text{C} + \text{S}$$

A razão entre o número de pessoas com deficiência e a totalidade da população é:

$$\frac{\text{C}}{\text{T}} = \frac{C}{C + S}$$

Como **S = 3C**, temos:

$$= \frac{C}{C + 3C}$$

$$= \frac{C}{4C} = \frac{1}{4}$$

Logo, no Brasil, a cada quatro pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

Gabarito: Letra C.

Propriedades fundamentais das proporções

As propriedades a seguir serão de grande valia para problemas de proporcionalidade, especialmente a propriedade fundamental da soma.

Propriedade fundamental soma

Considerando a proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, são validas também as proporções $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$ e também $\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$. Em resumo, temos que:

$$\text{Considerando que } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}, \text{então é verdade que } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{a}+\mathrm{c}}{\mathrm{b}+\mathrm{d}}$$

O mesmo vale para uma proporção composta por **mais de duas razões**:

$$\text{Considerando que } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}}=\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}}, \text{então é verdade que } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}}=\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}}=\frac{\mathrm{a}+\mathrm{c}+\mathrm{e}+\mathrm{g}}{\mathrm{b}+\mathrm{d}+\mathrm{f}+\mathrm{h}}$$

Vale ressaltar que **não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção**, sendo também verdade, por exemplo, casos como os seguintes:

$$\text{Considerando que } \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}}=\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}}, \text{então é verdade que } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}}=\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{\mathbf{b}+\mathbf{d}}$$

$$\text{Considerando que } \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}}=\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{h}}, \text{então é verdade que } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}}=\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{g}}{\mathbf{b}+\mathbf{d}+\mathbf{h}}$$

Vamos a um exemplo que mostra a utilidade dessa propriedade.

Considere a proporção com três razões $\frac{a}{5}=\frac{b}{10}=\frac{c}{20}$. Determine a, b e c, sabendo que $a+b+c=140$.

Utilizando a propriedade fundamental da soma, temos que:

$$\frac{a}{5}=\frac{b}{10}=\frac{c}{20}=\frac{a+b+c}{5+10+20}$$

$$\frac{a}{5}=\frac{b}{10}=\frac{c}{20}=\frac{140}{35}$$

$$\frac{a}{5}=\frac{b}{10}=\frac{c}{20}=4$$

A sequência de igualdades acima significa que:

$$\frac{a}{5} = 4 \ \rightarrow a = 20$$

$$\frac{b}{10} = 4 \ \rightarrow b = 40$$

$$\frac{c}{20} = 4 \ \rightarrow c = 80$$

Propriedade fundamental da subtração

Considerando a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, são validas as proporções $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$ e também $\frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$. Em resumo, temos que:

$$\text{Considerando que } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}, \text{então é verdade que } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{a}-\mathrm{c}}{\mathrm{b}-\mathrm{d}}$$

Vamos a um exemplo que mostra a utilidade dessa propriedade.

Considere a proporção $\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5}$. Determine a incógnita "x".

Ao subtrair os numeradores, podemos eliminar a incógnita "x". Observe:

$$\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5} = \frac{\mathbf{(x+1)-(x-4)}}{\mathbf{10-5}}$$

$$\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{5}}$$

$$\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5} = \mathbf{1}$$

Utilizando a igualdade $\frac{x+1}{10} = 1$, obtemos:

$$x + 1 = 10$$

$$x = 9$$

Poderíamos também utilizar a igualdade $\frac{x-4}{5} = 1$:

$$x - 4 = 5$$

$$x = 9$$

Uso conjunto das propriedades da soma e da subtração

Em uma mesma proporção composta por duas ou mais razões, podemos utilizar as duas propriedades anteriores em conjunto. Por exemplo, se tivermos a proporção:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$$

Podemos somar e subtrair os numeradores e denominadores seguindo a mesma lógica:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{-a+c+e+g}{-b+d+f+h}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{a-c+e-g}{b-d+f-h}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{a+c-e-g}{b+d-f-h}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{a+c-e+g}{b+d-f+h}}$$

Enfim, são diversas as possibilidades. O importante é não esquecer que, ao realizar uma operação (soma ou subtração) com o numerador de uma das razões, devemos realizar a mesma operação (soma ou subtração) com o denominador dessa razão.

Vale ressaltar que não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}}=\frac{g}{h}=\boldsymbol{\frac{a+c-e}{b+d-f}}$$

$$\frac{a}{b}=\boldsymbol{\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{-c+e-g}{-d+f-h}}$$

Escala

A escala é um tipo específico de razão. Trata-se da razão entre uma medida representada em um desenho e a medida real do objeto que se representa.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

É muito comum que a escala seja representada na forma **A:B**.

Quando temos, por exemplo, um mapa na escala 1:50.000, significa que cada unidade de comprimento do mapa corresponde a 50.000 unidades de comprimento do mundo real, seja qual for essa unidade de comprimento:

- Se estivermos falando de metros, cada metro do mapa corresponde a 50.000 metros no mundo real;
- Se estivermos falando de centímetros, cada centímetro do mapa corresponde a 50.000 centímetros no mundo real;
- Se estivermos falando de milímetros, cada milímetro do mapa corresponde a 50.000 milímetros no mundo real;
- Etc.

(ANAC/2009) Acerca de grandezas proporcionais e de matemática financeira, julgue o item que segue.

Se a maquete de um helicóptero, construída na escala de 1:24, tiver o comprimento igual a 20 cm, então o comprimento real dessa aeronave será inferior a 5 m.

Comentários:

A escala 1:24 apresenta 20cm como medida representada.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

$$\frac{1}{24} = \frac{20\text{ cm}}{\text{Medida real}}$$

$$1 \times (\text{Medida real}) = 24 \times 20\text{ cm}$$

$$(\text{Medida real}) = 480\text{ cm}$$

Lembre-se que o prefixo "**centi**" (**c**) corresponde a 10^{-2}. O valor da medida real, em metros, é:

$$(\text{Medida real}) = 480 \times \mathbf{10^{-2}}\text{ m}$$

$$(\text{Medida real}) = 4{,}8\text{ m}$$

Logo, o comprimento real dessa aeronave será inferior a 5 m.

Gabarito: CERTO.

(Pref. Olímpia/2019) A tabela a seguir apresenta algumas escalas e medidas:

Escala	Medida na representação gráfica	Medida real
1:1 000	6 cm	60 m
1:2 500	20 cm	X
1:4 000	Y	600 m

As medidas X e Y são, respectivamente, iguais a

a) 25 m e 15 cm.

b) 60 m e 80 cm.

c) 500 m e 12 cm.

d) 500 m e 15 cm.

e) 800 m e 60 cm.

Comentários:

A escala 1:2.500 apresenta 20cm como medida representada e X como medida real.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

$$\frac{1}{2.500} = \frac{20\text{cm}}{\text{X}}$$

$$1 \times \text{X} = 20\text{cm} \ \times 2.500$$

$$\text{X} = 50.000 \text{ cm}$$

Lembre-se que o prefixo "**centi**" (**c**) corresponde a 10^{-2}. O valor de X, em metros, é:

$$\text{X} = 50.000 \times \mathbf{10^{-2}}\text{m}$$

$$\text{X} = 500\text{m}$$

A escala 1:4.000 apresenta Y como medida representada e 600m como medida real.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

$$\frac{1}{4.000} = \frac{\text{Y}}{600\text{m}}$$

$$\frac{600\text{m}}{4.000} = \text{Y}$$

$$\text{Y} = 0{,}15 \text{ m}$$

0,15m correspondem a 15cm. Logo, $\text{Y} = 15\text{cm}$.

Gabarito: Letra D.

Velocidade média e vazão

Nesse tópico, vamos tratar de problemas envolvendo **velocidade média** e **vazão**, que também são tipos específicos de razão.

Velocidade média

A **velocidade média** corresponde à razão entre uma distância percorrida e o tempo em que se percorreu essa distância:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

Se a distância percorrida é dada em **quilômetros** (**km**) e o tempo em que se percorreu a distância é dado em **horas** (**h**), a velocidade média é obtida na unidade **quilômetros por hora** (**km/h**). Por exemplo, caso um automóvel tenha percorrido 144 km em 2h, a velocidade média é:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{144\ \text{km}}{2\ \text{h}} = 72\ \text{km/h}$$

Se a distância for dada em **metros** (**m**) e o tempo for dado em **segundos** (**s**), a velocidade média é obtida na unidade **metros por segundo** (**m/s**). Por exemplo, se um atleta correu 200 metros em 25 segundos, a sua velocidade média é:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{200\text{m}}{25\ \text{s}} = 8\ \text{m/s}$$

Uma vez que **quilômetros por hora** (**km/h**) e **metros por segundo** (**m/s**) são unidades de velocidade, podemos realizar uma conversão entre essas unidades. Sabemos que:

- **1km** corresponde a **1000m**; e
- Em **1h** temos **60min**, que correspondem a 60×60 = **3600s**.

Com base nisso, observe que, **para converter quilômetros por hora** (**km/h**) **para metros por segundo** (**m/s**), **devemos dividir o valor por 3,6**. Acompanhe o raciocínio aplicado para a velocidade de **72 km/h**:

$$72\text{km/h} = \frac{72\ \mathbf{km}}{\mathbf{1\ h}} = \frac{72 \times \mathbf{1000\ m}}{\mathbf{3600\ s}} = \frac{72\ \text{m}}{\frac{3600}{1000}\ \text{s}} = \frac{72\ \text{m}}{3{,}6\ \text{s}} = 20\ \text{m/s}$$

Além disso, note que:

- Como **1km** corresponde a **1000m**, temos que **1m** corresponde a $\frac{1}{1000}$ **km**; e
- Como **1h** temos **3600s**, temos que **1s** corresponde a $\frac{1}{3600}$ **h**.

Com base nisso, podemos observar que, para **converter metros por segundo (m/s) para quilômetros por hora (km/h), devemos multiplicar o valor por 3,6**. Acompanhe o raciocínio aplicado para a velocidade de **20 m/s**:

$$20\ \text{m/s} = \frac{20\ \mathbf{m}}{1\ \text{s}} = \frac{20 \times \mathbf{\frac{1}{1000}km}}{1 \times \mathbf{\frac{1}{3600}h}} = 20 \times \frac{1}{1000} \times 3600 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \times \frac{3600}{1000}\frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \times 3{,}6 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72\ \text{km/h}$$

FIQUE ATENTO!

Para **converter km/h para m/s, devemos dividir o valor por 3,6**
Para **converter m/s para km/h, devemos multiplicar o valor por 3,6**

Cumpre destacar que **tudo que vimos aqui para velocidade média vale para problemas em que temos uma velocidade constante**. Isso porque, **quando a velocidade é constante durante um trajeto, esta é a velocidade média**.

Nesse momento, vamos resolver alguns problemas envolvendo essa razão especial que chamamos de **velocidade média**.

HORA DE PRATICAR!

(PREVISCAM/2022) Um motorista de táxi fez um percurso de 50 km em 30 minutos com velocidade constante. Qual a velocidade, em quilômetros por hora?

a) 105 km/h.

b) 100 km/h.

c) 150 km/h.

d) 120 km/h.

Comentários:

Para obter a velocidade em **quilômetros por hora** (**km/h**), devemos ter a distância percorrida em **quilômetros** (**km**) e o tempo em **horas** (**h**).

Como **1h = 60min**, 30 minutos correspondem à metade de uma hora, ou seja, **30min = 0,5h**. Logo:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

$$\text{Velocidade Média} = \frac{50 \text{ km}}{0{,}5 \text{ h}}$$

$$\text{Velocidade Média} = 100 \text{ km/h}$$

Como a velocidade procurada é uma **velocidade constante** ao longo de todo o trajeto, **esta velocidade é a velocidade média**.

Gabarito: Letra B.

(CBM RJ/2022) Em certa pista, um carro de corrida, mantendo velocidade média de 100 km/h durante 2 horas deu exatamente 45 voltas.

Na mesma pista, aumentando a velocidade média para 180 km/h, o número de voltas que serão dadas nas mesmas 2 horas é

a) 25.

b) 30.

c) 36.

d) 72.

e) 81.

Comentários:

Suponha que em **uma volta** temos uma **distância x em quilômetros**. Note que, na primeira situação, o carro de corrida manteve a velocidade média de **100 km/h** durante **2h** e percorreu a distância de **45x**. Logo:

$$\text{Velocidade Média}_1 = \frac{\text{Distância percorrida}_1}{\text{Tempo}_1}$$

$$100 \text{ km/h} = \frac{45x}{2 \text{ h}}$$

Realizando a "multiplicação cruzada", temos:

$$45x = 2\text{h} \times 100 \text{ km/h}$$

$$45x = 200 \text{ km}$$

$$x = \frac{200}{45} \text{km}$$

Simplificando o numerador e o denominador por 5, temos:

$$x = \frac{40}{9}\ \text{km}$$

Portanto, **uma volta** corresponde à distância de **40/9 km**.

Na segunda situação, o carro de corrida manteve a velocidade média de **180 km/h** durante **2h**. Com isso, podemos obter a **distância *D*** percorrida nessa segunda situação:

$$\text{Velocidade Média}_2 = \frac{\text{Distância percorrida}_2}{\text{Tempo}_2}$$

$$180\ \text{km/h} = \frac{D}{2\ \text{h}}$$

Realizando a "multiplicação cruzada", temos:

$$D = 2\text{h} \times 180\ \text{km/h}$$

$$\boldsymbol{D = 360\ \text{km}}$$

Precisamos saber quantas voltas correspondem à distância de **360 km**. Trata-se da seguinte divisão:

$$\frac{360\ \text{km}}{\frac{40}{9}\ \text{km por volta}}$$

$$= 360 \times \frac{9}{40}$$

$$= \frac{360}{40} \times 9$$

$$= 9 \times 9$$

$$= 81\ \text{voltas}$$

Gabarito: Letra E.

FIQUE ATENTO!

A seguir, apresentarei duas questões de maior complexidade. **Não se preocupe se você errar**, **especialmente caso você nunca tenha visto esse tipo de questão na sua vida**. Isso porque esse tipo de questão **não é comum de aparecer em provas** e, além disso, essas questões **fogem um pouco do escopo de Matemática e de Raciocínio Lógico**, começando a entrar no campo da Física.

(TJ CE/2022) Um trem viaja a uma velocidade constante. Ele leva 5 s para atravessar completamente um túnel de 85 m e gasta 8 s para atravessar completamente um túnel de 160 m. O comprimento do trem, em metros, é

a) 60.

b) 30.

c) 40.

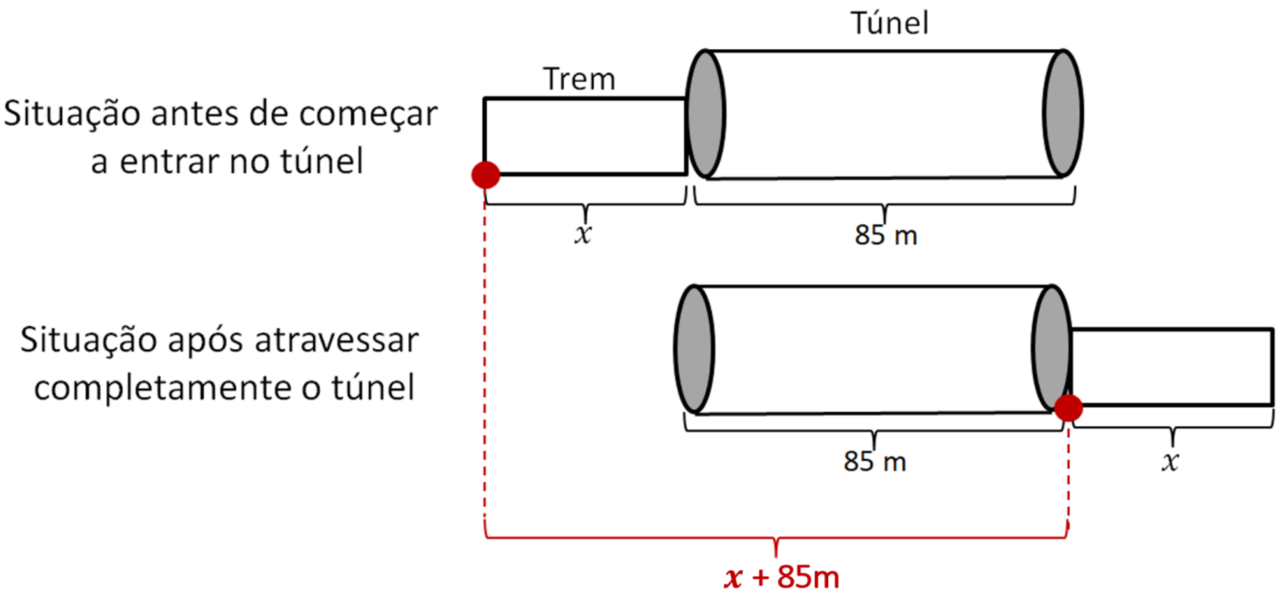
d) 50.

e) 70.

Comentários:

Suponha que o **comprimento do trem**, **em metros**, **seja x**.

Na **primeira situação**, temos o seguinte esquema que representa o trem antes de começar a entrar no túnel e após atravessar completamente o túnel:



Perceba que, **para atravessar completamente o túnel**, o trem precisa percorrer uma **distância x + 85m**, que corresponde ao **comprimento do trem somado ao comprimento do túnel**.

Já que o trem apresenta uma **velocidade constante** ao longo de todo o trajeto, **esta velocidade é a velocidade média**.

Como o trem leva **5s** para percorrer a distância **x + 85m**, a velocidade constante V, em metros por segundo (**m/s**), é:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

$$V = \frac{x + 85}{5}$$

Na **segunda situação**, o trem leva **8s** para atravessar completamente um túnel de **160 m** mantendo a mesma velocidade constante $\boldsymbol{V}$. A distância percorrida, nessa segunda situação, será $\boldsymbol{x}$ **+ 160m**. Logo:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

$$V = \frac{x + 160}{8}$$

Igualando a velocidade V para as duas situações, temos:

$$\frac{x + 85}{5} = \frac{x + 160}{8}$$

Realizando a "multiplicação cruzada", segue que:

$$8 \times (x + 85) = 5 \times (x + 160)$$

$$8x + 680 = 5x + 800$$

$$8x - 5x = 800 - 680$$

$$3x = 120$$

$$x = \frac{120}{3}$$

$$x = 60 \text{ m}$$

Portanto, **o comprimento do trem é 60 metros**.

Gabarito: Letra C.

(Senado/2022) Um tigre avista um javali a 1km de distância e sai, em linha reta, em seu encalço. Nesse instante, o javali foge na direção contrária à do tigre.

O tigre corre a 30m/s, e o javali tenta escapar a uma velocidade de 10m/s.

A distância percorrida pelo javali até ser alcançado pelo tigre é igual a

a) 300m.

b) 400m.

c) 500m.

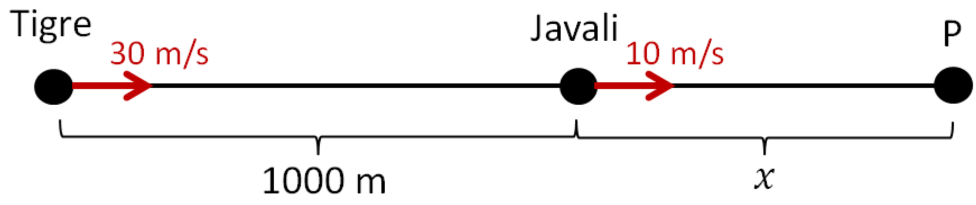
d) 600m.

e) 700m.

Comentários:

Suponha que a distância percorrida pelo javali até ser alcançado pelo tigre seja x. Suponha, ainda, que o tigre alcance o javali no **ponto P**.

Como **1km** é igual a **1000m,** temos a seguinte representação do problema:



Como as velocidades são constantes, podemos utilizar o conceito de velocidade média.

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

Suponha que o tigre e o javali se encontrem no ponto P **após t segundos**. Veja que:

• A velocidade média do tigre é **30 m/s**;

• A distância percorrida pelo tigre é **1000 + x metros**;

• O tempo em que o tigre percorre a distância 1000 + x é **t segundos**.

Logo:

$$30 = \frac{1000 + x}{t}$$

$$\mathbf{30t = 1000 + x}$$

Além disso:

• A velocidade média do javali é **10 m/s**;

• A distância percorrida pelo javali é **x metros**;

• O tempo em que o javali percorre a distância x é **t segundos**.

Logo:

$$\mathbf{10 = \frac{x}{t}}$$

$$10t = x$$

$$\mathbf{t = \frac{x}{10}}$$

Substituindo $t = x/10$ na primeira equação, temos:

$$\mathbf{30t = 1000 + x}$$

$$30 \times \frac{x}{10} = 1000 + x$$

$$3x = 1000 + x$$

$$3x - x = 1000$$

$$2x = 1000$$

$$x = \frac{1000}{2}$$

$$x = 500 \text{ m}$$

Logo, **distância percorrida pelo javali até ser alcançado pelo tigre** é igual a **500m**.

Gabarito: Letra C.

Vazão

A **vazão** corresponde à razão entre um volume e um tempo.

$$\text{Vazão } = \frac{\text{Volume}}{\text{Tempo}}$$

No geral, problemas envolvendo vazão estão relacionados a torneiras que despejam em um recipiente um determinado volume de água em um determinado período de tempo.

Se o volume despejado for dado em **litros** (**l**) e o tempo for dado em **horas** (**h**), a vazão será obtida em **litros por hora** (**l/h**). Por exemplo, caso uma torneira encha um recipiente de 10 litros em 2h, a vazão é:

$$\text{Vazão } = \frac{10 \text{ l}}{2 \text{ h}} = 5 \text{ l/h}$$

A unidade da vazão dependerá das unidades de volume e de tempo consideradas. Caso tenhamos, por exemplo, uma torneira que encha um recipiente de 500ml em 2 minutos, a vazão será:

$$\text{Vazão} = \frac{500 \text{ ml}}{2 \text{ min}} = 250 \text{ ml/min}$$

A grande maioria dos problemas que envolvem o conceito de vazão está relacionada ao uso de torneiras. É muito comum que tenhamos as seguintes situações:

- Temos as **vazões individuais das torneiras** e queremos obter o **tempo em que as torneiras enchem um recipiente quando acionadas em conjunto**; e
- Temos a **vazão conjunta** e a **vazão de algumas torneiras** e queremos obter o **tempo em que uma determinada torneira enche um recipiente**.

Nesses casos, e em outros casos semelhantes, geralmente devemos montar uma equação em que **a soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta**.

Em problemas envolvendo vazão, geralmente devemos utilizar o fato de que **a soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta**.

Vamos resolver alguns problemas.

(Pref Nova Odessa/2022) Uma torneira leva 4 horas para encher um determinado recipiente. Já uma segunda torneira leva 6 horas para encher esse mesmo recipiente. Assim, se as duas torneiras forem abertas juntas, quanto tempo irão levar para encher esse recipiente?

a) 2 horas.

b) 2 horas e 4 minutos.

c) 2 horas e 24 minutos.

d) 2 horas e 36 minutos.

e) 2 horas e 56 minutos.

Comentários:

Suponha que o volume do recipiente em questão seja V.

A primeira torneira leva 4 horas para encher o recipiente de volume V. Logo, a sua vazão é:

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{Volume}_1}{\text{Tempo}_1}$$

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{V}}{4}$$

A segunda torneira leva 6 horas para encher o recipiente de volume V. Logo, a sua vazão é:

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{Volume}_2}{\text{Tempo}_2}$$

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{V}}{4}$$

A soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta. Logo:

$$\text{Vazão conjunta} = \frac{V}{4} + \frac{V}{6}$$

$$\text{Vazão conjunta} = \frac{3V + 2V}{12}$$

$$\text{Vazão conjunta} = \frac{\mathbf{5V}}{\mathbf{12}}$$

A **vazão conjunta** corresponde à razão entre o **volume do recipiente V** e o **tempo t em que as torneiras enchem conjuntamente o recipiente**:

$$\text{Vazão conjunta} = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{t}}$$

Igualando os dois valores para a vazão conjunta, podemos obter o tempo:

$$\frac{\mathbf{5V}}{\mathbf{12}} = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{t}}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{t}$$

$$5t = 12$$

$$t = \frac{12}{5}$$

$$t = 2{,}4 \text{ horas}$$

Como **1h = 60 minutos**, temos que **0,4h** correspondem a:

$$0{,}4 \times 60 = 24\text{min}$$

Logo, **o tempo em que as torneiras irão levar para encher o recipiente conjuntamente é de 2 horas e 24 minutos**.

Gabarito: Letra C.

(Pref Linhares/2020) Uma torneira enche um tanque em 9 horas, uma outra pode fazer o mesmo serviço em 12 horas. Juntando a essas duas torneiras uma terceira, todas trabalhando ao mesmo tempo, o tanque ficará cheio em 4 horas. O tempo que a terceira levaria trabalhando sozinha para encher todo o tanque seria de:

a) 9 horas.

b) 18 horas.

c) 36 horas.

d) 72 horas.

e) 144 horas.

Comentários:

Suponha que o volume do tanque em questão seja V.

A primeira torneira leva 9 horas para encher o tanque de volume V. Logo, a sua vazão é:

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{Volume}_1}{\text{Tempo}_1}$$

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{V}}{9}$$

A segunda torneira leva 12 horas para encher o tanque de volume V. Logo, a sua vazão é:

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{Volume}_2}{\text{Tempo}_2}$$

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{V}}{12}$$

Suponha que o tempo em que a terceira torneira enche o tanque sozinha seja t. Nesse caso, a vazão da terceira torneira é:

$$\text{Vazão}_3 = \frac{\text{V}}{t}$$

A **vazão conjunta** corresponde à razão entre o **volume do recipiente V** e o **tempo de 4 horas em que as três torneiras enchem conjuntamente o recipiente**:

$$\text{Vazão conjunta} = \boldsymbol{\frac{V}{4}}$$

A soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta. Logo:

$$\text{Vazão conjunta} = \boldsymbol{\frac{\text{V}}{9} + \frac{V}{12} + \frac{V}{t}}$$

Igualando os dois valores para a vazão conjunta, podemos obter o tempo em que a terceira torneira enche o tanque trabalhando sozinha:

$$\boldsymbol{\frac{\text{V}}{9} + \frac{V}{12} + \frac{V}{t} = \frac{V}{4}}$$

Simplificando o volume V, temos:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{9 - 4 - 3}{36}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{2}{36}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{18}$$

$$t = 18 \text{ horas}$$

Logo, **o tempo que a terceira torneira levaria trabalhando sozinha para encher todo o tanque é de 18 horas**.

Gabarito: Letra B.

(Pref. Cuiabá/2015) Duas caixas d'água iguais, posicionadas uma ao lado da outra, possuem, cada uma, capacidade de 900 litros, sendo que a primeira está cheia e a segunda, vazia.

A primeira caixa possui uma torneira que consegue esvaziá-la com vazão de 10 litros por hora e a segunda caixa possui uma torneira que consegue enchê-la com vazão de 15 litros por hora.

Abrindo as duas torneiras simultaneamente, o tempo que deve decorrer até que os níveis da água nas duas caixas estejam na mesma altura é de

a) 18 horas.

b) 25 horas.

c) 30 horas.

d) 36 horas.

e) 45 horas.

Comentários:

Temos **duas caixas iguais**, com capacidade de **900 litros**, sendo que inicialmente **a primeira está cheia de água** e a **segunda está vazia**. Além disso, **a primeira caixa deve ser esvaziada**, e **a segunda deve ser enchida com água**.

Note que, **para que os níveis de água nas duas caixas estejam na mesma altura**, **o volume que resta na primeira caixa** deve ser igual ao **volume que foi inserido na segunda caixa**.

Considere, então, que o tempo em horas que deve decorrer até que os níveis de água nas duas caixas estejam na mesma altura seja t. Em outras palavras, considere que o tempo em horas para que **o volume que resta na primeira caixa** seja igual ao **volume inserido na segunda caixa** seja t.

Para obter o tempo t, vamos seguir os seguintes passos:

- **Obter o volume restante na primeira caixa em termos do tempo t;**
- **Obter o volume inserido na segunda caixa em termos do tempo t; e**
- **Igualar os volumes obtidos.**

Volume restante na primeira caixa

O volume retirado da primeira caixa durante o período t é tal que:

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{Volume retirado}_1}{\text{Tempo}_1}$$

$$10 = \frac{\text{Volume retirado}_1}{t}$$

$$\text{Volume retirado}_1 = 10t$$

Portanto, o volume restante na primeira caixa depois de decorrido um tempo t é:

$$\text{Volume restante}_1 = 900 - \text{Volume retirado}_1$$

$$\mathbf{Volume\ restante_1 = 900 - 10}\boldsymbol{t}$$

Volume inserido na segunda caixa

O volume inserido na segunda caixa durante o período t é tal que:

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{Volume inserido}_2}{\text{Tempo}_2}$$

$$15 = \frac{\text{Volume inserido}_2}{\text{t}}$$

$$\mathbf{Volume\ inserido_2 = 15}\boldsymbol{t}$$

Igualar os volumes obtidos

Igualando o volume restante da primeira caixa e o volume inserido na segunda caixa, podemos obter o tempo em que os níveis de água nas duas caixas estão na mesma altura:

$$\mathbf{Volume\ restante_1} = \mathbf{Volume\ inserido_2}$$

$$\mathbf{900 - 10}\boldsymbol{t} = \mathbf{15}\boldsymbol{t}$$

$$900 = 10t + 15t$$

$$900 = 25t$$

$$25t = 900$$

$$t = \frac{900}{25}$$

$$t = 36\ \text{h}$$

Portanto, o tempo que deve decorrer até que os níveis da água nas duas caixas estejam na mesma altura é de **36 horas**.

Gabarito: Letra D.

PROPORCIONALIDADE

Proporcionalidade

Grandezas diretamente proporcionais

Uma grandeza A é diretamente proporcional às grandezas B, C e D quando

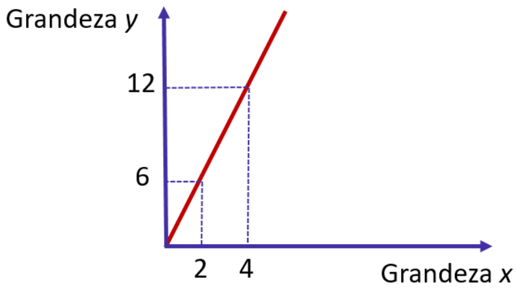
$$\frac{\text{Grandeza A}}{(\text{Grandeza B})\times(\text{Grandeza C})\times(\text{Grandeza D})} = \text{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

Quando uma questão disser que duas ou mais grandezas são **proporcionais**, entenda que elas são **diretamente proporcionais**.

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são diretamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \cdots = \frac{x_n}{y_n} = \text{k}$$



Para resolver problemas de divisão em partes diretamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Grandezas inversamente proporcionais

As expressões a seguir querem dizer a mesma coisa:

- A é **inversamente proporcional** a B;
- A é **diretamente proporcional ao inverso de B**;
- A é **diretamente proporcional a $\frac{1}{B}$**.

Uma grandeza A é inversamente proporcional às grandezas B, C e D quando:

$$\frac{\text{Grandeza A}}{\frac{1}{(\text{Grandeza B})}\times\frac{1}{(\text{Grandeza C})}\times\frac{1}{(\text{Grandeza D})}} = \text{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

De outra forma, podemos dizer que grandeza A é inversamente proporcional às grandezas B, C e D quando:

$$(\text{grandeza A}) \times (\text{gradeza B}) \times (\text{grandeza C}) \times (\text{grabdeza D}) = \text{k}$$

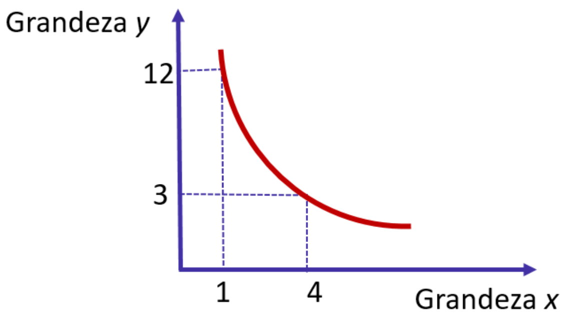
Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são inversamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{\frac{1}{y_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{y_2}} = \frac{x_3}{\frac{1}{y_3}} = \cdots = \frac{x_n}{\frac{1}{y_n}} = k$$

De outra forma, podemos dizer que são inversamente proporcionais quando:

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \cdots = x_n \times y_n = k$$



Para resolver problemas de divisão em partes inversamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Grandezas direta e inversamente proporcionais

Se uma grandeza A for **diretamente** proporcional às **grandezas B e C** e **inversamente** proporcional às **grandezas D e E**, então:

$$\frac{\text{Grandeza A}}{(\text{grandeza B}) \times (\text{grandeza C}) \times \frac{1}{(\text{Grandeza D})} \times \frac{1}{(\text{Grandeza E})}} = k$$

Para resolver problemas de divisão em partes direta e inversamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Nesse capítulo, apresentaremos primeiro as definições para, em seguida, mostrar a aplicação delas em problemas que podem aparecer na sua prova.

Sabemos que a apresentação "crua" das definições pode não ser "facilmente digerível" em um primeiro momento, porém a resolução de problemas tornará as definições mais claras.

Grandezas diretamente proporcionais

Definição de grandezas diretamente proporcionais

Uma grandeza A é **diretamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, a razão entre elas é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\textbf{Grandeza B}} = \mathbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Esse conceito pode ser estendido para quando temos mais de uma grandeza. Uma grandeza A é **diretamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{(\textbf{Grandeza B})\times(\textbf{Grandeza C})\times(\textbf{Grandeza D})} = \mathbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Problemas com grandezas diretamente proporcionais

Para resolver problemas com grandezas diretamente proporcionais, devemos utilizar os conceitos vistos anteriormente. Sem mais delongas, vamos a dois exemplos.

Quando uma questão disser que duas ou mais grandezas são **proporcionais,** entenda que elas são **diretamente proporcionais**

Em uma pizzaria, a produção diária de pizzas é proporcional ao número de horas trabalhadas pelos seus funcionários.

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas.

Quantas pizzas foram produzidas em um dia em que os funcionários trabalharam 7 horas?

Veja que a grandeza "pizzas produzidas" é diretamente proporcional à grandeza "horas trabalhadas".

$$\frac{\text{pizzas produzidas}}{\text{horas trabalhadas}} = \text{k}$$

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas. Logo:

$$\frac{80}{5} = k$$

Suponha que, ao trabalhar 7 horas, foram produzidas x pizzas. Então:

$$\frac{x}{7} = k$$

Com as duas igualdades acima, podemos escrever:

$$\frac{80}{5} = \frac{x}{7} = k$$

Podemos realizar a "multiplicação cruzada" na igualdade $\frac{80}{5} = \frac{x}{7}$. Temos:

$$5x = 80 \times 7$$

$$x = \frac{80 \times 7}{5}$$

$$x = 112 \text{ pizzas}$$

Observação: a partir desse momento, vamos escrever diretamente a igualdade do tipo $\frac{80}{5} = \frac{x}{7} = k$.

Vamos a um novo problema com mais grandezas envolvidas.

Em uma pizzaria, a produção diária de pizzas é proporcional ao número de horas trabalhadas pelos seus funcionários e ao número de funcionários presentes no expediente.

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas com 8 funcionários.

Quantas pizzas foram produzidas em um dia em que estavam presentes 10 funcionários trabalhando 7 horas?

Veja que a grandeza "pizzas produzidas" é diretamente proporcional às grandezas "horas trabalhadas" e "número de funcionários".

$$\frac{(\text{pizzas produzidas})}{(\text{horas trabalhadas}) \times (\text{número de funcionários})} = \text{k}$$

Supondo que foram produzidas x pizzas no dia em que 10 funcionários trabalharam 7 horas, temos:

$$\frac{80}{5 \times 8} = \frac{x}{7 \times 10} = k$$

Podemos simplificar $\frac{80}{5 \times 8} = \frac{x}{7 \times 10}$ e realizar a "multiplicação cruzada" na igualdade.

$$\frac{80}{5 \times 8} = \frac{x}{7 \times 10}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{x}{70}$$

$$2 \times 70 = 1 \times x$$

$$x = 140 \text{ pizzas}$$

Sequências diretamente proporcionais

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são diretamente proporcionais quando:

$$\frac{\mathrm{x}_1}{\mathrm{y}_1} = \frac{\mathrm{x}_2}{\mathrm{y}_2} = \frac{\mathrm{x}_3}{\mathrm{y}_3} = \cdots = \frac{\mathrm{x}_\mathrm{n}}{\mathrm{y}_\mathrm{n}} = \mathrm{k}$$

Onde **k** é uma constante denominada **constante de proporcionalidade.**

(Pref. Ananindeua/2019) A sequência numérica (6,X,Y,12) é diretamente proporcional a sequência (3,4,5,6). Qual o valor de X+Y?

a) 8

b) 18

c) 16

d) 20

Comentários:

Como a sequência $(6, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, 12)$ é proporcional à sequência $(3,4,5,6)$, temos que:

$$\frac{6}{3} = \frac{X}{4} = \frac{Y}{5} = \frac{12}{6} = k$$

Qual é a constante de proporcionalidade **k**? $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2.$

Temos, portanto, que:

$$\frac{6}{3} = \frac{X}{4} = \frac{Y}{5} = \frac{12}{6} = 2$$

Logo:

$$\frac{X}{4} = 2 \ \rightarrow X = 8$$

$$\frac{Y}{5} = 2 \rightarrow Y = 10$$

A soma procurada é $X + Y = 8 + 10 = 18$

Gabarito: Letra B.

Aspecto gráfico da proporcionalidade direta

Se duas grandezas são **diretamente proporcionais**, quando uma grandeza aumenta, a outra também aumenta, e quando uma grandeza diminui, a outra também diminui.

Ocorre que essa descrição qualitativa não é suficiente para descrever por completo o conceito de grandezas diretamente proporcionais, pois há uma condição a mais que deve ser respeitada: **uma grandeza aumenta ou diminui na mesma proporção em que a outra aumenta ou diminui.**

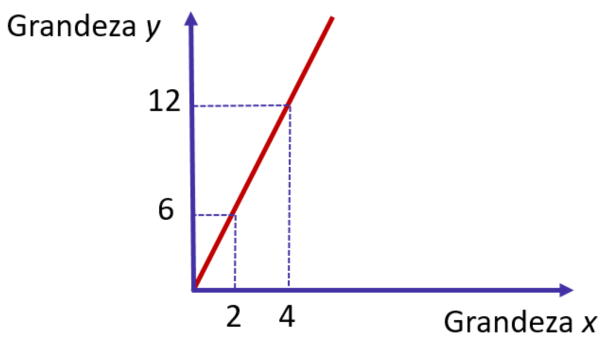
Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve dobrar. Se a primeira grandeza quintuplicar, a segunda grandeza também deve ser multiplicada por 5. Se a primeira grandeza for dividida por 3, a segunda grandeza também deve ser dividida por 3.

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, graficamente, temos uma reta que passa pela origem. Isso porque quando uma grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x, temos:

$$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \mathrm{k}$$

$$\mathbf{y = kx}$$

(Equação da reta que passa pela origem do plano cartesiano)



Perceba, no exemplo do gráfico, que temos um ponto $(x; y)$ dado pelo par $(2; 6)$. Quando x é multiplicado por 2, o y é multiplicado por 2, e o novo ponto $(x; y)$ obtido é $(4; 12)$.

(Pref. SJC/2019) Duas grandezas y e x, diretamente proporcionais, são representadas, graficamente, por uma função cuja expressão algébrica é:

a) $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \cdot b \cdot c \neq 0$

b) $y = ax^2 + bx$, com a e b reais e $a \cdot b \neq 0$

c) $y = ax^2$, com $a \neq 0$, real

d) $y = ax + b$, com a e b reais e $a \cdot b \neq 0$

e) $y = ax$, com $a \neq 0$, real

Comentários:

Duas grandezas diretamente proporcionais podem ser representadas graficamente por uma reta que passa pela origem do plano cartesiano.

Assim, as grandezas y e x podem ser relacionadas pela função $y = ax$, com a diferente de zero. Nesse caso, a é a constante de proporcionalidade k.

Gabarito: Letra E.

Divisão em partes diretamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes proporcionais** (ou seja, em **partes diretamente proporcionais**) tratam da divisão de uma quantia em partes proporcionais a alguns números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Vamos a um exemplo:

Divida o número 2200 em partes proporcionais a 5, 7 e 10.

Se as partes proporcionais a 5, 7 e 10 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = k$$

A soma das partes é 2.200. Logo, $a + b + c = 2.200$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10}$, temos:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = \frac{a+b+c}{5+7+10}$$

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = \frac{2.200}{22}$$

$$\boxed{\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = 100}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 100.

$$\frac{a}{5} = 100 \ \rightarrow a = 500$$

$$\frac{b}{7} = 100 \ \rightarrow b = 700$$

$$\frac{c}{10} = 100 \ \rightarrow c = 1.000$$

Logo, ao dividir o número 2.200 em partes proporcionais a 5, 7 e 10, obtemos, respectivamente, 500, 700 e 1.000.

As questões de concurso público costumam apresentar uma contextualização. Veja um exemplo.

(Pref. Buritizal/2018) Três amigos fizeram um bolão para um jogo de loteria, sendo que um deles colaborou com R$ 13,00, outro com R$ 14,00 e o terceiro com R$ 22,00. Eles foram sorteados e receberam um prêmio de R$ 7.350,00, que será dividido em partes diretamente proporcionais ao que cada um contribuiu no bolão. O valor que receberá o amigo que contribuiu com a menor quantia será

a) R$ 1.950,00.

b) R$ 2.000,00.

c) R$ 2.050,00.

d) R$ 2.100,00.

e) R$ 2.150,00.

Comentários:

Se as partes proporcionais a R$13 , R$14 e R$22 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = k$$

A soma das partes é o total do prêmio, isto é, $a + b + c = R\$\ 7.350$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22}$, temos:

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = \frac{a + b + c}{13 + 14 + 22}$$

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = \frac{7350}{49}$$

$$\boxed{\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = 150}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 100. O valor que receberá o amigo que contribuiu com a menor quantia é tal que:

$$\frac{a}{13} = 150$$

$$a = 1.950$$

Gabarito: Letra A.

Algumas questões sobre divisões proporcionais podem ser mais complexas. Para resolvê-las, devemos nos ater aos princípios apresentados neste capítulo.

(SABESP/2019) Um pai pretende dividir R$ 750,00 entre seus 3 filhos de tal forma que cada um receba uma quantia diretamente proporcional à sua própria idade. Se dois dos filhos receberão, respectivamente, R$ 225,00 e R$ 240,00, e se a soma das idades dos dois filhos mais novos é 31 anos, então a idade do filho mais velho é

a) 15

b) 21

c) 19

d) 20

e) 16

Comentários:

Se as quantias recebidas por dois filhos foram R$225 e R$240, a quantia recebida pelo terceiro filho é o que restou do total de R$750:

$$750 - 225 - 240 = \text{ R\$285}$$

Como cada filho recebeu uma quantia proporcional à idade, os filhos mais novos, de idades N_1 e N_2, receberam as duas menores quantias, ou seja, receberam R$225 e R$240. Se a idade do filho mais velho é V, então temos a seguinte proporção:

$$\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = k$$

Lembre-se que a soma das idades dos dois filhos mais novos é 31. Logo, $N_1 + N_2 = 31$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" com as **duas primeiras razões** da proporção acima, temos:

$$\frac{\mathbf{225}}{\boldsymbol{N_1}} = \frac{\mathbf{240}}{\boldsymbol{N_2}} = \frac{285}{V} = \frac{\mathbf{225 + 240}}{\boldsymbol{N_1 + N_2}}$$

$$\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = \frac{465}{\mathbf{31}}$$

$$\boxed{\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = 15}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 15. Vamos obter a idade do filho mais velho:

$$\frac{285}{V} = 15$$

$$\frac{285}{15} = V$$

$$V = 19$$

Gabarito: Letra C.

Problemas de regra de sociedade

Em uma sociedade empresarial, os lucros ou os prejuízos costumam ser distribuídos entre as pessoas de maneira diretamente proporcional ao capital investido.

Em resumo, problemas de "regra de sociedade" são problemas de divisão proporcional com uma historinha envolvendo sócios de uma empresa ou de um negócio. Vejamos um exemplo.

(BB/2013) Uma empresa obteve um lucro líquido de R$ 263.500,00. Esse lucro será dividido proporcionalmente às cotas da sociedade que cada um dos seus quatro sócios possui. O sócio majoritário detém 9 das cotas e os outros três sócios possuem, respectivamente, 1, 3 e 4 cotas da sociedade. A quantia, em reais, que o sócio que possui 3 cotas receberá nessa divisão é igual a

a) 15.500,00.

b) 139.500,00.

c) 46.500,00.

d) 62.000,00.

e) 31.000,00.

Comentários:

O lucro líquido será dividido em partes proporcionais às cotas da sociedade. Se as partes proporcionais a 1 , 3, 4 e 9 forem respectivamente a, b, c e d, temos:

- $$\frac{a}{1}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{d}{9}=k$$

A soma das partes é o lucro líquido total, isto é, $a+b+c+d=R\$\,263.500$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{1}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{d}{9}$, temos:

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{d}{9}=\frac{a+b+c+d}{1+3+4+9}$$

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{d}{9}=\frac{263.500}{17}$$

$$\boxed{\frac{a}{1}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{d}{9}=15.500}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 15.500. Vamos obter a quantia recebida pelo sócio que tem 3 cotas:

$$\frac{b}{3}=15.500$$

$$b=46.500$$

Gabarito: Letra C.

Grandezas inversamente proporcionais

Para trabalhar com **grandezas inversamente proporcionais**, devemos saber que as expressões a seguir querem dizer a mesma coisa:

- A é **inversamente proporcional** a B;
- A é **diretamente proporcional ao inverso de B**;
- A é **diretamente proporcional a** $\mathbf{\frac{1}{B}}$.

Essa breve introdução é suficiente para resolver todos os problemas sobre grandezas inversamente proporcionais: basta **converter o problema de grandezas inversamente proporcionais em um problema de grandezas diretamente proporcionais**.

Vamos entrar em detalhes.

Definição de grandezas inversamente proporcionais

Uma grandeza A é **inversamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, a razão entre a grandeza A e o inverso da grandeza B é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\frac{1}{\textbf{Grandeza B}}} = \mathbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Note que:

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\frac{1}{\textbf{Grandeza B}}} = (\textbf{Grandeza A}) \times (\textbf{Grandeza B})$$

Podemos, então, reescrever a definição assim:

Uma grandeza A é **inversamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, o produto da grandeza A pela grandeza B é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

$$(\textbf{Grandeza A}) \times (\textbf{Grandeza B}) = \boldsymbol{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Esse conceito pode ser estendido para quando temos mais de uma grandeza. Uma grandeza A é **inversamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:

$$\frac{\textbf{Grandeza A}}{\left(\frac{1}{\textbf{Grandeza B}}\right)\times\left(\frac{1}{\textbf{Grandeza C}}\right)\times\left(\frac{1}{\textbf{Grandeza D}}\right)} = \boldsymbol{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Novamente, podemos reescrever o conceito, dizendo que uma grandeza A é **inversamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:

$$(\textbf{Grandeza A}) \times (\textbf{Grandeza B}) \times (\textbf{Grandeza C}) \times (\textbf{Grandeza D}) = \textbf{k}$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Problemas com grandezas inversamente proporcionais

Para resolver problemas com grandezas inversamente proporcionais, devemos utilizar os conceitos vistos anteriormente. Vamos a um exemplo.

Em uma fábrica de peças automotivas, o "custo fixo unitário da produção" é inversamente proporcional à quantidade de peças produzidas do tipo A e do tipo B.

Em um determinado mês, foram produzidas 50 peças do tipo A e 100 peças do tipo B, gerando um custo fixo unitário de R$ 50.

Determine o "custo fixo unitário da produção" em um mês em que foram produzidas 25 peças do tipo A e 250 peças do tipo B.

Veja que a grandeza "custo fixo unitário" é **inversamente proporcional** às grandezas "peças tipo A" e "peças tipo B".

Logo, a grandeza "custo fixo unitário" é **diretamente proporcional** **ao inverso** da grandeza "peças tipo A" e **ao inverso** da grandeza "peças tipo B".

$$\frac{(\text{custo fixo unitário})}{\frac{1}{(\text{peças tipo A})} \times \frac{1}{(\text{peças tipo B})}} = \text{k}$$

Em um determinado mês, foram produzidas 50 peças do tipo A e 100 peças do tipo B, gerando um custo fixo unitário de R$50. Logo:

$$\frac{50}{\frac{1}{50} \times \frac{1}{100}} = k$$

Suponha que, no mês em que foram produzidas 25 peças do tipo A e 250 peças do tipo B, o custo fixo unitário seja C. Logo:

$$\frac{C}{\frac{1}{25} \times \frac{1}{250}} = k$$

Com as duas igualdades anteriores, podemos escrever:

$$\frac{\mathbf{50}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}}} = \frac{\boldsymbol{C}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{250}}} = k$$

$$\mathbf{50 \times 50 \times 100 = \boldsymbol{C} \times 25 \times 250}$$

$$\frac{50 \times 50 \times 100}{25 \times 250} = C$$

$$C = R\$\ 40$$

(SEFAZ BA/2022) Três grandezas L, M e N são tais que L é diretamente proporcional a M, e M é inversamente proporcional a N.

Quando M = 4 e N = 18, tem-se L = 60.

Quando L = 45, o valor de M + N é

a) 25.

b) 26.

c) 27.

d) 28.

e) 29.

Comentários:

Sabemos que a grandeza L é <u>diretamente proporcional</u> à grandeza M. Logo, sendo k_1 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$\frac{L}{M} = k_1$$

Além disso, a grandeza M é <u>inversamente proporcional</u> à grandeza N. Logo, sendo k_2 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$MN = k_2$$

Quando $\boldsymbol{M = 4}$ e $\boldsymbol{N = 18}$, tem-se $\boldsymbol{L = 60}$. Logo:

$$\frac{L}{M} = k_1 \rightarrow \frac{60}{4} = k_1 \rightarrow \boldsymbol{k_1 = 15}$$

$$MN = k_2 \rightarrow 4 \times 18 = k_2 \rightarrow \boldsymbol{k_2 = 72}$$

Devemos determinar o valor de $M + N$ para o caso em que $L = 45$.

$$\frac{L}{M} = k_1 \rightarrow \frac{45}{M} = 15 \rightarrow M = \frac{45}{15} \rightarrow M = 3$$

$$MN = k_2 \rightarrow 3 \times N = 72 \rightarrow N = 24$$

Logo, **para $L = 45$**, temos:

$$M + N = 3 + 24$$
$$= 27$$

Gabarito: Letra C.

Sequências inversamente proporcionais

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são inversamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{\frac{1}{y_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{y_2}} = \frac{x_3}{\frac{1}{y_3}} = \cdots = \frac{x_n}{\frac{1}{y_n}} = k$$

Onde **k** é uma constante denominada **constante de proporcionalidade.**

Essa definição equivale a dizer que as sequências são inversamente proporcionais quando:

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \cdots = k$$

(Pref. Cerquilho/2019) Assinale a alternativa que contém uma tabela apresentando duas grandezas inversamente proporcionais.

a)

Grandeza x	3	4	5	6	7	8
Grandeza y	12	11	10	9	8	7

b)

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	12	11	10	9	8	7

c)

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	16	14	12	10	8	6

d)

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	32	16	8	4	2	1

e)

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	–4	–3	–2	–1	0	1

Comentários:

Para duas sequências serem inversamente proporcionais, a multiplicação das grandezas deve ser sempre igual a uma consante, isto é:

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \cdots = k$$

Vamos analisar cada alternativa.

A) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	3	4	5	6	7	8
Grandeza y	12	11	10	9	8	7
Produto xy	36	44	50	54	56	56

B) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	12	11	10	9	8	7
Produto xy	96	77	60	45	32	21

C) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	16	14	12	10	8	6
Produto xy	128	98	72	50	32	18

D) O produto dos elementos das duas sequências é constante e igual a 32. **Este é o gabarito**.

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	32	16	8	4	2	1
Produto xy	32	32	32	32	32	32

E) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	-4	-3	-2	-1	0	1
Produto xy	-4	-6	-8	-8	0	32

Gabarito: Letra D.

Aspecto gráfico da proporcionalidade inversa

Se duas grandezas são **inversamente proporcionais**, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui, e quando uma grandeza diminui, a outra aumenta.

Ocorre que essa descrição qualitativa não é suficiente para descrever por completo o conceito de grandezas inversamente proporcionais, pois há uma condição a mais que deve ser respeitada: **quando uma grandeza aumenta, a outra grandeza diminui na mesma proporção, e quando uma grandeza diminui, a outra grandeza aumenta na mesma proporção.**

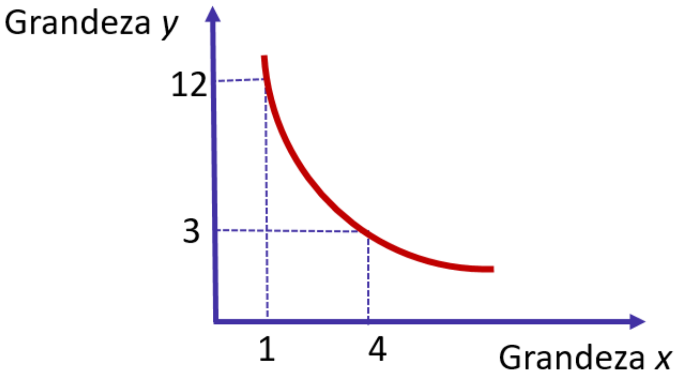
Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve reduzir pela metade. Se a primeira grandeza quintuplicar, a segunda grandeza deve ser dividida por 5. Se a primeira grandeza for dividida por 3, a segunda grandeza deve ser triplicada.

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, graficamente, temos uma curva chamada **hipérbole**.

$$\frac{y}{1/x} = k$$

$$\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$$

(Hipérbole)



Perceba, no exemplo do gráfico, que temos um ponto $(x; y)$ dado pelo par $(1; 12)$. Quando x é multiplicado por 4, o y é dividido por 4, e o novo ponto $(x; y)$ obtido é $(4; 3)$.

(Pref. Campinas/2019) A professora Alice perguntou aos seus alunos o que são grandezas inversamente proporcionais. Analise o diálogo entre um grupo de alunos sobre esse significado:

Júlia:	Analiso a variação de duas grandezas: se uma das grandezas aumenta e a outra diminui, então essas grandezas são necessariamente inversamente proporcionais.
Caio:	Você está errada Júlia, pois há situações em que isso ocorre e as grandezas não são inversamente proporcionais. Essa sua afirmação é necessária, mas não é suficiente para indicar se as grandezas são inversamente proporcionais.
André:	Se uma grandeza aumenta e a outra também aumenta, essas grandezas são diretamente proporcionais e, se uma aumenta e a outra diminui elas são inversamente proporcionais.
Luana:	Eu não analiso esse aspecto de diminuir e aumentar apenas. Se uma grandeza x for inversamente proporcional a y, os produtos dos valores de x pelos correspondentes valores de y são necessariamente iguais.

Considerando as ideias apresentadas pelos quatro estudantes, é correto afirmar que são verdadeiras apenas as argumentações de

a) Júlia e Luana.

b) Júlia e André.

c) Caio e Luana.

d) Caio e André.

e) André e Luana.

Comentários:

Vamos comentar cada ideia apresentada pelos estudantes.

Júlia: O fato de uma das grandezas aumentar enquanto a outra diminui **não necessariamente define que as grandezas são inversamente proporcionais**.

Isso porque é necessário que **uma grandeza diminua na mesma proporção em que a outra aumenta**. Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve reduzir pela metade, por exemplo.

Podemos mostrar o seguinte **contraexemplo** para o argumento de Júlia: considere duas grandezas, dadas por x e y, tais que $y = \frac{1}{x} + 1$. Se x for de 2 para 4, y vai de $\frac{3}{2}$ para $\frac{5}{4}$. Veja que, nesse exemplo, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui. Ocorre que, nesse caso, x **dobrou e** y **não diminuiu pela metade**.

Caio: O argumento de caio está correto. Para duas grandezas serem inversamente proporcionais é necessário que, quando uma aumenta, a outra diminui. Ocorre que isso não é suficiente para que as grandezas sejam inversamente proporcionais: é necessário que **uma grandeza diminua na mesma proporção em que a outra aumenta**.

André: André errou pelo mesmo motivo de Júlia, por não especificar a forma em que as grandezas devem aumentar/diminuir.

Nas grandezas diretamente proporcionais, quando uma grandeza aumenta, a outra aumenta **na mesma proporção**. Nas grandezas inversamente proporcionais, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui **na mesma proporção**.

Luana: Luana definiu corretamente grandezas inversamente proporcionais: os produtos dos valores das duas grandezas devem ser iguais a uma constante.

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \cdots = k$$

As argumentações verdadeiras são as do **Caio** e da **Luana**.

Gabarito: Letra C.

Divisão em partes inversamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes inversamente proporcionais** tratam da divisão de uma quantia em partes inversamente proporcionais a alguns números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Divida o número 700 em partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20.

Se as partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = k$$

A soma das partes é 700. Logo, $a + b + c = 700$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}}$, temos:

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = \frac{700}{\frac{4+2+1}{20}}$$

$$5a = 10b = 20c = \frac{700}{\frac{7}{20}}$$

$$5a = 10b = 20c = 700 \times \frac{20}{7}$$

$$\boxed{5a = 10b = 20c = 2.000}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 2.000.

$$5a = 2.000 \ \rightarrow a = 400$$

$$10b = 2.000 \rightarrow b = 200$$

$$20c = 2.000 \rightarrow c = 100$$

Logo, ao dividir o número 700 em partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20, obtemos, respectivamente, 400, 200 e 100.

As questões de concurso público costumam apresentar uma contextualização. Veja um exemplo.

(BANESTES/2018) Em um terminal de autoatendimento bancário há apenas cédulas de R$ 10,00, R$ 20,00 e R$ 50,00.

As quantidades de cada um dos três tipos de cédula na máquina são inversamente proporcionais aos seus valores.

Se há 272 cédulas ao todo, então a quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

a) R$ 3.600,00;

b) R$ 3.960,00;

c) R$ 4.050,00;

d) R$ 4.240,00;

e) R$ 4.800,00.

Comentários:

Se as quantidades de cédulas de R$10 , R$20 e R$50 forem respectivamente a, b e c, então:

$$\frac{a}{\frac{1}{10}} = \frac{b}{\frac{1}{20}} = \frac{c}{\frac{1}{50}} = k$$

A soma do número de cédulas é 272, isto é, $a + b + c = 272$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção, temos:

$$\frac{a}{\frac{1}{10}} = \frac{b}{\frac{1}{20}} = \frac{c}{\frac{1}{50}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{50}}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{10}} = \frac{b}{\frac{1}{20}} = \frac{c}{\frac{1}{50}} = \frac{272}{\frac{10+5+2}{100}}$$

$$10a = 20b = 50c = \frac{272}{\frac{17}{100}}$$

$$10a = 20b = 50c = 272 \times \frac{100}{17}$$

$$\boxed{10a = 20b = 50c = 1.600}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 1.600. O número de cédulas de cada tipo é:

$$10a = 1.600 \ \rightarrow a = 160$$

$$20b = 1.600 \ \rightarrow b = 80$$

$$50c = 1.600 \ \rightarrow c = 32$$

Temos, portanto, 160 cédulas de R$10, 80 cédulas de R$20 e 32 cédulas de R$50. A quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

$$160 \times R\$10 + 80 \times R\$20 + 32 \times R\$\,50$$

$$= R\$\,4.800$$

Gabarito: Letra E.

Grandezas direta e inversamente proporcionais

Quando se apresentam problemas em que uma grandeza A é diretamente proporcional a algumas grandezas e inversamente proporcional a outras grandezas, **devemos transformar tudo para grandezas diretamente proporcionais.**

Se uma grandeza A for diretamente proporcional às grandezas B e C e inversamente proporcional às grandezas D e E, então podemos dizer que **a grandeza A é diretamente proporcional às grandezas B, C, 1/D e 1/E**. Logo:

$$\frac{(\text{grandeza A})}{(\text{grandeza B}) \times (\text{grandeza C}) \times \frac{1}{(\text{grandeza D})} \times \frac{1}{(\text{grandeza E})}} = \mathbf{k}$$

Onde **k** é a constante de proporcionalidade.

Problemas com grandezas direta e inversamente proporcionais

Vamos a um problema.

Em uma fábrica de parafusos, a receita em reais obtida em um mês é diretamente proporcional ao número de parafusos produzidos e inversamente proporcional à cotação do dólar.

Em um determinado mês, foram produzidos 1.000.000 de parafusos e a receita foi de R$ 10.000,00, sendo o dólar cotado a R$ 2,50.

Determine a receita em reais obtida ao se produzir 500.000 parafusos com o dólar cotado a R$ 5,00.

Veja que a grandeza "receita obtida" é diretamente proporcional a grandeza "número de parafusos" e inversamente proporcional à grandeza "cotação do dólar".

$$\frac{(\text{receita obtida})}{(\text{número de parafusos}) \times \frac{1}{(\text{cotação do dólar})}} = k$$

Supondo que a receita em reais obtida ao se produzir 500.000 parafusos com o dólar a R$ 5,00 foi x, então:

$$\frac{10.000}{1.000.000 \times \frac{1}{2{,}5}} = \frac{x}{500.000 \times \frac{1}{5}} = k$$

$$\frac{10.000 \times 2{,}5}{1.000.000} = \frac{x \times 5}{500.000} = k$$

Podemos simplificar a proporção $\frac{10.000 \times 2{,}5}{1.000.000} = \frac{x \times 5}{500.000}$ para depois realizar a "multiplicação cruzada". Simplificando os denominadores de lados diferentes da igualdade por 500.000, temos:

$$\frac{10.000 \times 2{,}5}{2} = \frac{x \times 5}{1}$$

Realizando a "multiplicação cruzada", temos:

$$2 \times (x \times 5) = 10.000 \times 2{,}5 \times 1$$

$$10x = 25.000$$

$$x = 2.500$$

Logo, a receita em reais obtida foi de R$ 2.500,00.

Divisão em partes direta e inversamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes direta e inversamente proporcionais** tratam da divisão de uma quantia em partes proporcionais a alguns números e inversamente proporcionais a outros números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Vamos a um exemplo.

Um pai quer dividir a quantia de R$ 15.000 a seus três filhos Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo de modo diretamente proporcional às notas obtidas em uma prova de matemática e de modo inversamente proporcional ao tempo semanal que eles jogam videogame.

Arnaldo obteve 10 em matemática e joga videogame durante 10h por semana.

Bernaldo obteve 8 em matemática e joga videogame durante 2h por semana.

Cernaldo obteve 5 em matemática e joga videogame durante 1h por semana.

Qual foi a quantia em reais que cada filho recebeu?

A quantia foi dividida em partes **diretamente proporcionais** **à nota obtida em matemática** e **inversamente proporcionais** ao **tempo dispendido com videogame**.

Se Arnaldo recebeu a quantia A, Bernaldo recebeu a quantia B e Cernaldo recebeu a quantia C, temos a seguinte proporção:

$$\frac{A}{10 \times \frac{1}{10}} = \frac{B}{8 \times \frac{1}{2}} = \frac{C}{5 \times \frac{1}{1}} = k$$

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = k$$

Temos que a soma das quantias recebidas é R$ 15.000.

$$A + B + C = 15.000$$

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5}$, temos:

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{A + B + C}{1 + 4 + 5}$$

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{15.000}{10}$$

$$\boxed{\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = 1.500}$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 1.500.

$$\frac{A}{1} = 1.500 \ \rightarrow A = 1.500$$

$$\frac{B}{4} = 1.500 \ \rightarrow B = 6.000$$

$$\frac{C}{5} = 1.500 \ \rightarrow C = 7.500$$

Logo, Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo receberam, respectivamente, R$ 1.500, R$ 6.000 e R$ 7.500.

Questões Comentadas – Cebraspe

Frações

1.(CESPE/FUB/2018) Paulo, Maria e João, servidores lotados em uma biblioteca pública, trabalham na catalogação dos livros recém-adquiridos. Independentemente da quantidade de livros a serem catalogados em cada dia, Paulo cataloga 1/4, Maria cataloga 1/3 e João, 5/12.

A respeito da catalogação de livros por esses servidores, julgue o item a seguir.

Entre os três servidores, Maria é a mais eficiente, isto é, em cada dia de trabalho, ela cataloga mais livros que cada um dos outros dois.

Comentários:

Para determinar o servidor que cataloga mais livros, devemos determinar qual fração dentre $\mathbf{\frac{1}{4}}$, $\mathbf{\frac{1}{3}}$ e $\mathbf{\frac{5}{12}}$ é a maior.

Ao comparar frações, devemos encontrar **frações equivalentes** que apresentem o mesmo denominador. O denominador será o MMC entre 4, 3 e 12, que é 12. Temos que:

$$\frac{1}{4} = \mathbf{\frac{3}{12}} \text{ e } \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{4}{12}}$$

Portanto, as frações com denominador 12 correspondentes à quantidade de livros catalogados por **Paulo**, **Maria** e **João** são, respectivamente:

$$\mathbf{\frac{3}{12}};\mathbf{\frac{4}{12}};\mathbf{\frac{5}{12}}$$

Logo, **João** cataloga mais livros do que cada um dos outros dois.

Gabarito: ERRADO.

2. (CESPE/TCE-RS/2013) Na secretaria de um órgão público, as páginas dos processos, para serem digitalizadas, são separadas e distribuídas entre 7 servidores — 4 servidores recém-contratados e 3 servidores antigos. Julgue o item a seguir, a respeito dessa situação.

Considere que, com a aquisição de novos equipamentos, o tempo para se digitalizar uma página, que era de 22 segundos, passou a ser de [22 – 22 × P] segundos, em que P correspondente à dízima periódica 0,27272727.... Nessa situação, com os novos equipamentos, a digitalização de uma página passou a ser feita em 16 segundos.

Comentários:

P é uma dízima periódica que pode ser escrita na forma fracionária:

$$P = 0,\overline{27} = \frac{27}{99}$$

O tempo de digitalização da página passou a ser:

$$22 - 22 \times P$$

$$= 22 - 22 \times \frac{27}{99}$$

$$= 22\left(1 - \frac{27}{99}\right)$$

$$= 22\left(\frac{99 - 27}{99}\right)$$

$$= 22 \times \frac{72}{99}$$

Simplificando 22 e 99 por 11, obtemos:

$$= 2 \times \frac{72}{9}$$

$$= 2 \times 8 = 16$$

Gabarito: CERTO.

3.(CESPE/CNJ/2013)

ano de início dos processos	especificação		
	em trâmite	para parecer	julgado
2010	200	30	600
2011	240	30	580
2012	260	50	700

Considerando os dados da tabela acima, que mostra a quantidade e situação de processos, nos anos 2010, 2011 e 2012, em um tribunal, julgue o item subsequente.

Se, em 2011, 5 juízes atuavam no referido tribunal, então a relação juiz/processo era de, aproximadamente, 1:170.

Comentários:

Em 2011, temos um total de:

$$240 + 30 + 580 = 850 \text{ processos}$$

A relação juiz/processo, em 2011, era de:

$$\frac{\text{Juiz}}{\text{Processo}} = \frac{5}{850}$$

Ao simplificar o numerador e o denominador por 5, encontramos $\frac{1}{170}$, como afirma o item da questão.

Gabarito: CERTO.

4.(CESPE/TJ PA/2020) Dois colaboradores do setor de informática de uma empresa são responsáveis por fazer a manutenção dos computadores da empresa. Durante certo período de tempo, um dos colaboradores fez manutenção em $0,\overline{26} = 0,262626$ da quantidade total de computadores da empresa e, nesse mesmo período de tempo, o outro colaborador fez manutenção em $0,\overline{18} = 0,181818$ dessa quantidade total de computadores, tendo restado 110 computadores sem manutenção.

Nessa situação, a quantidade total de computadores dessa empresa é igual a

a) 130.

b) 139.

c) 155.

d) 159.

e) 198.

Comentários:

Seja T o total de computadores da empresa. O número de **computadores com manutenção** é:

$$0,\overline{26} \textbf{ do } \text{total} + 0,\overline{18} \textbf{ do } \text{total}$$

$$= 0,\overline{26} \times \mathrm{T} + 0,\overline{18} \times \mathrm{T}$$

$$= \frac{26}{99}\mathrm{T} + \frac{18}{99}\mathrm{T}$$

$$= \frac{26 + 18}{99}\mathrm{T}$$

$$= \frac{44}{99}\mathrm{T}$$

$$= \frac{4}{9}T$$

O total de **computadores sem manutenção** é tal que:

$$(\textbf{Total} \text{ de computadores}) - (\text{Computadores } \textbf{com} \text{ manutenção}) = (\text{Computadores } \textbf{sem} \text{ manutenção})$$

$$T - \frac{4}{9}T = 110$$

$$\frac{9-4}{9}T = 110$$

$$\frac{5}{9}T = 110$$

$$T = \frac{110 \times 9}{5}$$

$$T = 198$$

Temos, portanto 198 computadores na empresa.

Gabarito: Letra E.

5.(CESPE/Pref. B dos Coqueiros/2020) Em seu testamento, um pai deixou o diagrama mostrado a seguir, para ilustrar como deverá ocorrer a distribuição de sua herança, no valor de 2,7 milhões de reais, entre seus cinco herdeiros.

Com base nas informações precedentes, e considerando-se que, em cada linha desse diagrama, o retângulo branco mostrado está dividido em partes iguais, é correto concluir que

a) o quarto filho receberá mais de 420 mil reais.

b) a mãe e o terceiro filho receberão, juntos, um total de 1,3 milhão de reais.

c) a mãe e o primeiro filho receberão, juntos, menos de 1,4 milhão de reais.

d) os quatro filhos receberão, juntos, 2 milhões de reais.

e) a mãe e o quarto filho receberão, juntos, exatamente o mesmo total recebido pelos outros três filhos.

Comentários:

Pelo diagrama, podemos perceber que:

- A mãe receberá $\frac{1}{3}$ do total da herança;
- O 1º filho receberá $\frac{1}{3}$ do valor restante após a distribuição da parte que cabe à mãe; e
- Os demais filhos (3º, 4º e 5º) receberão cada um $\frac{1}{3}$ do que restou após a distribuição da herança para mãe e para o 1º filho.

O valor recebido pela **mãe** é:

$$\frac{1}{3} \times 2.700.000 = \text{ R\$ } 900.000$$

Após a distribuição da parte que cabe à **mãe**, restam $2.700.000 - 900.000 = \text{R\$ } 1.800.000$.

O valor recebido pelo **1º filho** é:

$$\frac{1}{3} \times 1.800.000 = \text{R\$ } 600.000$$

Após a distribuição da herança para **mãe** e para o **1º filho**, restam $1.800.000 - 600.000 = \text{R\$ } 1.200.000$.

O valor recebido individualmente pelo 2º, pelo 3º e pelo 4º filho é:

$$\frac{1}{3} \times 1.200.000 = \text{R\$ } 400.000$$

Note que **a mãe e o terceiro filho** receberão, juntos, um total de:

$$900.000 + 400.000 = \text{R\$ } 1.300.000$$

Gabarito: Letra B.

Texto para as próximas questões

Ao iniciar uma sessão plenária na câmara municipal de uma pequena cidade, apenas 1/4 dos assentos destinados aos vereadores foram ocupados. Com a chegada do vereador Veron, 1/3 dos assentos passaram a ficar ocupados. Nessa situação hipotética, é correto afirmar que

6. (CESPE/TRE RJ/2012) Menos de cinco assentos estavam ocupados quando o vereador Veron chegou à câmara municipal.

7.(CESPE/TRE RJ/2012) Os assentos destinados aos vereadores serão todos ocupados somente após a chegada de mais nove vereadores.

8.(CESPE/TRE RJ/2012) Há mais de 15 assentos destinados aos vereadores no plenário da câmara.

Comentários:

Considere que a totalidade de assentos destinados aos vereadores é A. Antes da chegada do vereador Veron, $\frac{1}{4}A$ eram os assentos ocupados. Após a chegada desse único vereador, temos $\frac{1}{3}A$ de assentos ocupados.

Podemos escrever:

$$(\text{Assentos ocupados depois}) = (\text{Assentos ocupados antes}) + 1$$

$$\frac{1}{3}\text{A} = \frac{1}{4}\text{A} + 1$$

$$\frac{1}{3}\text{A} - \frac{1}{4}\text{A} = 1$$

$$\frac{4-3}{12}\text{A} = 1$$

$$\frac{1}{12}\text{A} = 1$$

$$\text{A} = 12$$

Logo, o total de assentos destinados aos vereadores é $\text{A} = 12$.

Questão 06

Antes da chegada do vereador Veron, estavam ocupados:

$$\frac{1}{4}A = \frac{1}{4} \times 12 = 3 \text{ assentos}$$

Logo, a assertiva está **CERTA** ao dizer que **menos de cinco** assentos estavam ocupados quando o vereador Veron chegou à câmara municipal.

Questão 07

Após a chegada do vereador Veron, temos ocupados:

$$3 + 1 = 4 \text{ assentos}$$

O número de assentos livres é:

$$12 - 4 = 8 \text{ assentos}$$

Logo, após a chegada do vereador Veron, os assentos destinados aos vereadores serão todos ocupados somente após a chegada de **mais oito** vereadores. O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**.

Questão 08

Conforme já calculado, há 12 assentos destinados aos vereadores ($A = 12$). O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**.

Gabarito: 06 - CERTO. 07 - ERRADO. 08 - ERRADO.

9. (CESPE/PM DF/2010) Existe um cálculo para saber a quantidade certa de água que se deve ingerir diariamente: 500 mL de água como valor fixo, mais 30 mL de água por quilo de massa corporal. Assim, uma pessoa com 57 kg deve beber 2.210 mL de água por dia.

Água, o melhor remédio. In: Correio Braziliense, 23/8/2009, p. 29 (com adaptações).

Após ler a reportagem acima, Pedro calculou que deveria ingerir, diariamente, 2.750 mL de água. Com base nessas informações, julgue o item que se segue.

Se Pedro beber $\frac{4}{11}$ da água que deve ingerir pela manhã e $\frac{2}{5}$ à tarde, então ele terá de beber 650 mL durante a noite para completar a quantidade diária recomendada.

Comentários:

Pedro deve ingerir diariamente **2.750 ml**. Pela manhã, Pedro bebeu $\frac{4}{11}$ desse volume.

$$\frac{4}{11} \textbf{ de } 2750$$

$$= \frac{4}{11} \times 2750$$

$$= \frac{4 \times 2750}{11}$$

$$= \frac{11.000}{11}$$

$$= \mathbf{1.000\ ml}$$

À tarde, Pedro ingeriu $\frac{2}{5}$ da totalidade do que ele deve beber no dia.

$$\frac{2}{5}\ \mathbf{de}\ 2750$$

$$= \frac{2}{5} \times 2750$$

$$= \frac{2 \times 2750}{5}$$

$$= \frac{5.500}{5}$$

$$= 1.100\ \text{ml}$$

A quantia que resta para Pedro beber é:

$$\underbrace{2750\text{ml}}_{\text{Total}} - \underbrace{1.000\ \text{ml}}_{\text{Manhã}} - \underbrace{1.100\ \text{ml}}_{\text{Tarde}} = 650\ \text{ml}$$

Gabarito: CERTO.

10.(CESPE/TC-DF/2014) Em uma empresa, as férias de cada um dos 50 empregados podem ser marcadas na forma de trinta dias ininterruptos, ou os trinta dias podem ser fracionados em dois períodos de quinze dias ininterruptos ou, ainda, em três períodos de dez dias ininterruptos. Em 2013, depois de marcadas as férias de todos os 50 empregados, constatou-se que 23, 20 e 28 deles marcaram os trinta dias de férias ou parte deles para os meses de janeiro, fevereiro e junho, respectivamente. Constatou-se, também, que, nesse ano, nenhum empregado marcou férias para algum mês diferente dos mencionados.

Tendo como referência as informações acima, julgue o item que se segue.

Suponha que, em 2013, mais de 5/6 dos empregados que não marcaram férias para fevereiro eram do sexo feminino e mais de 2/3 dos que não marcaram férias para janeiro eram do sexo masculino. Nessa situação, é correto afirmar que, em 2013, havia na empresa no máximo 12 mulheres a mais que homens.

Comentários:

Para resolver a questão, vamos transformar as frações em números absolutos.

"*...mais de 5/6 dos empregados que não marcaram férias para fevereiro eram do sexo feminino...*"

Como 20 empregados marcaram férias para fevereiro e há um total de 50 empregados, temos 50—20 = 30 empregados que não marcaram férias para fevereiro. Desses 30, **mais de 5/6 são mulheres**.

$$\frac{5}{6}\ \textbf{de}\ 30 = \frac{5}{6} \times 30 = 25$$

Logo, temos a certeza que nessa empresa **mais de 25 empregados são mulheres**.

"...mais de 2/3 dos que não marcaram férias para janeiro eram do sexo masculino..."

Como 23 empregados marcaram férias para janeiro e há um total de 50 empregados, temos 50−23 = 27 empregados que não marcaram férias para janeiro. Desses 27, **mais de 2/3 são homens**.

$$\frac{2}{3}\textbf{de}\ 27 = \frac{2}{3} \times 27 = 18$$

Logo, temos a certeza que nessa empresa **mais de 18 empregados são homens**.

Em resumo, temos as seguintes informações:

- A empresa tem **50 empregados**;
- **Mais de 25 empregados** são **mulheres**; e
- **Mais de 18 empregados** são **homens**;

O item da questão questiona se é correto afirmar que havia na empresa **no máximo 12 mulheres a mais que homens**. Devemos então **maximizar o número de mulheres** respeitando as informações do enunciado. Para tanto, podemos **minimizar o número de homens**.

Como **mais de 18 empregados são homens**, **o número mínimo de homens é 19**. Logo, o número máximo de mulheres é:

$$\underbrace{50}_{\substack{\text{Total de}\\ \text{empregados}}} - \underbrace{19}_{\substack{\text{Número mínimo}\\ \text{de homens}}} = \underbrace{31}_{\substack{\text{Número máximo}\\ \text{de mulheres}}}$$

Isso significa que na empresa havia no máximo 12 mulheres a mais do que homens, pois:

$$\underbrace{31}_{\substack{\text{Número máximo}\\ \text{de mulheres}}} - \underbrace{19}_{\substack{\text{Número mínimo}\\ \text{de homens}}} = 12$$

Gabarito: CERTO.

Questões Comentadas – Cebraspe

Razão e proporção

1.(CESPE/ANAC/2009) Acerca de grandezas proporcionais e de juros, julgue o item a seguir.

Se, em uma aula de dança, houver 45 pessoas, entre moças e rapazes, e se a razão entre o número de moças e o número de rapazes for igual a $\frac{5}{4}$, então 8 moças ficarão sem par.

Comentários:

Temos um total de 45 pessoas entre moças (M) e rapazes (R):

$$M + R = 45$$

A razão entre o número de moças e o número de rapazes é igual a $\frac{5}{4}$:

$$\frac{M}{R} = \frac{5}{4}$$

$$M = \frac{5}{4}R$$

Substituindo a expressão acima em $M + R = 45$, obtemos:

$$\frac{5}{4}R + R = 45$$

$$\frac{9}{4}R = 45$$

$$R = 4 \times \frac{45}{9}$$

$$R = 20$$

Como temos 20 rapazes e um total de 45 pessoas, o número de moças é:

$$M = 45 - 20$$
$$M = 25$$

O número de moças que ficarão sem par é:

$$M - R = 25 - 20 = 5$$

Gabarito: ERRADO.

2.(CESPE/MEC/2009) Considere que uma empresa tenha contratado N pessoas para preencher vagas em 2 cargos; que o salário mensal de um dos cargos seja de R$ 2.000,00 e o do outro seja de R$ 2.800,00 e que o gasto mensal para pagar os salários dessas pessoas seja de R$ 34.000,00. A partir dessas considerações, julgue o item subsequente.

Se o gasto mensal, em reais, com os contratados para o cargo com salário mensal de R$ 2.000,00 estiver para 3, assim como o gasto mensal, em reais, com os contratados para o cargo com salário mensal de R$ 2.800,00 está para 14, então o número de contratados para estes 2 cargos será superior a 12.

Comentários:

Seja N_{2000} o número de contratados para receber R$ 2.000 e N_{2800} o número de contratados para receber R$ 2.800.

- O gasto mensal para pagar aqueles que recebem R$ 2.000 é $\mathbf{2.000} \times \boldsymbol{N_{2000}}$.
- O gasto mensal para pagar aqueles que recebem R$ 2.800 é $\mathbf{2.800} \times \boldsymbol{N_{2800}}$.

Como o gasto mensal para pagar todos salários é de R$ 34.000, temos:

$$\mathbf{2.000} \times \boldsymbol{N_{2000}} + \mathbf{2.800} \times \boldsymbol{N_{2800}} = 34.000$$

$$20N_{2000} + 28N_{2800} = 340$$

O item da questão diz que $\mathbf{2000} \times \boldsymbol{N_{2000}}$ está para 3 assim como $\mathbf{2.800} \times \boldsymbol{N_{2800}}$ está para 14. Logo:

$$\frac{2000 \times N_{2000}}{3} = \frac{2.800 \times N_{2800}}{14}$$

$$\frac{2000 \times N_{2000}}{3} = 200 \times N_{2800}$$

$$\frac{2000 \times N_{2000}}{3 \times 200} = N_{2800}$$

$$\boldsymbol{N_{2800}} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}} \times \boldsymbol{N_{2000}}$$

Substituindo a expressão acima em $20N_{2000} + 28N_{2800} = 340$, temos:

$$20N_{2000} + 28\boldsymbol{N_{2800}} = 340$$

$$20N_{2000} + 28 \times \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}} \times \boldsymbol{N_{2000}} = 340$$

$$\left(20 + \frac{280}{3}\right) N_{2000} = 340$$

$$\left(\frac{60+280}{3}\right)N_{2000}=340$$

$$\frac{340}{3}N_{2000}=340$$

$$N_{2000}=340\times\frac{3}{340}$$

$$N_{2000}=3$$

Agora que temos N_{2000}, podemos obter N_{2800}.

$$\boldsymbol{N_{2800}=\frac{10}{3}\times N_{2000}}$$

$$N_{2800}=\frac{10}{3}\times 3$$

$$N_{2800}=10$$

Portanto, o número de pessoas contratadas para os dois cargos é:

$$N_{2000}+N_{2800}=3+10=13$$

Gabarito: CERTO.

3. (CESPE/PM AL/2017) Em um tanque A, há uma mistura homogênea de 240 L de gasolina e 60 L de álcool; em outro tanque B, 150 L de gasolina estão misturados homogeneamente com 50 L de álcool.

A respeito dessas misturas, julgue o item subsequente.

Para que a proporção álcool/gasolina no tanque A fique igual à do tanque B é suficiente acrescentar no tanque A uma quantidade de álcool que é inferior a 25 L.

Comentários:

Devemos determinar a quantidade x de álcool foi acrescentada no tanque A para que ele fique com a mesma **proporção álcool/gasolina** do tanque B.

Após a inserção dessa quantidade x de álcool no tanque A, esse tanque fica com **60 + x litros** de álcool e continua com **240 litros** de gasolina.

$$\frac{\text{Proporção álcool/gasolina do tanque A depois de acrescentar x litros de álcool}}{} = \text{Proporção álcool/gasolina do tanque B}$$

$$\frac{60+x}{240} = \frac{50}{150}$$

$$60 + x = 240 \times \frac{50}{150}$$

$$60 + x = 240 \times \frac{1}{3}$$

$$x = 80 - 60$$

$$x = 20 \text{ litros}$$

Logo, para que a proporção álcool/gasolina no tanque A fique igual à do tanque B, devemos acrescentar no tanque A **20 litros de álcool**, valor que é **inferior a 25 litros**.

Gabarito: CERTO.

4.(CESPE/STM/2011) Determinado órgão promoveu concurso público para provimento de vagas de um cargo de nível médio e um de nível superior. As remunerações mensais dos cargos de nível médio e de nível superior eram números diretamente proporcionais a 2 e 3; e a remuneração mensal do cargo de nível médio era R$ 3.000,00 menor que a remuneração do cargo de nível superior.

A respeito dessa situação, julgue o item que se segue.

A soma das remunerações mensais dos 2 cargos é superior a R$ 16.000,00.

Comentários:

Considere que a remuneração do cargo de **nível superior** é $\boldsymbol{s}$. Nesse caso, a remuneração do cargo de **nível médio** é $\boldsymbol{m} = s - 3.000$.

As remunerações mensais dos cargos de **nível médio** e de **nível superior** são diretamente proporcionais a 2 e 3. Logo:

$$\frac{m}{2} = \frac{s}{3} = k$$

$$\frac{s - 3000}{2} = \frac{s}{3} = k$$

Realizando a "**multiplicação cruzada**" em $\frac{s-3000}{2} = \frac{s}{3}$, temos:

$$3 \times (s - 3.000) = 2s$$

$$3s - 9.000 = 2s$$

$$s = R\$ \ 9.000$$

Logo, a remuneração de **nível superior** é 9.000 e a remuneração de **nível médio** é:

$$m = s - 3.000$$

$$m = 9.000 - 3.000$$

$$m = R\$ \ 6.000$$

Portanto, a soma das remunerações é:

$$s + m = 9.000 + 6.000 = R\$ \ 15.000$$

Gabarito: ERRADO.

5.(CESPE/STM/2011) Carlos e Paulo são funcionários de uma empresa e seus salários brutos mensais, em reais, são diretamente proporcionais aos números 3 e 5. Além disso, o salário de Paulo supera o salário de Carlos em R$ 2.640,00.

Com base nessa situação, julgue o item a seguir.

A soma dos salários de Carlos e Paulo é igual a R$ 10.560,00.

Comentários:

Considere que a remuneração de **Carlos** é $\boldsymbol{c}$. Nesse caso, a remuneração de **Paulo** é $p = c + 2.640$.

As remunerações mensais de **Carlos** e de **Paulo** são diretamente proporcionais a 3 e 5. Logo:

$$\frac{c}{3} = \frac{p}{5} = k$$

$$\frac{c}{3} = \frac{c + 2.640}{5} = k$$

Realizando a "**multiplicação cruzada**" em $\frac{c}{3} = \frac{c+2.640}{5}$, temos:

$$5c = 3 \times (c + 2.640)$$

$$5c = 3c + 7.920$$

$$2c = 7.920$$

$$c = R\$ \ 3.960$$

Logo, a remuneração de **Carlos** é 3.960 e a remuneração de **Paulo** é:

$$p = c + 2.640$$

$$p = 3.960 + 2.640$$

$$p = R\$\ 6.600$$

Portanto, a soma dos salários de **Carlos** e **Paulo** é:

$$c + p = 3.960 + 6.600 = R\$\ 10.560$$

Gabarito: CERTO.

Questões Comentadas – Cebraspe

Proporcionalidade

1.(CESPE/TRT 17/2009) Sabendo-se que velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais, é correto afirmar que aumentando-se em 25% a velocidade de digitação de um texto, o tempo necessário para se digitar esse texto fica reduzido em 20%.

Comentários:

Como velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais, então o **produto das grandezas velocidade e tempo é uma constante**:

$$(\text{Velocidade}) \times (\text{Tempo}) = k$$

Suponha que inicialmente a velocidade era V_1 e o tempo era t_1. Com o aumento da velocidade, temos uma nova velocidade V_2 e um novo tempo t_2. Como o produto é constante, temos:

$$V_1 \times t_1 = V_2 \times t_2 = k$$

Sabemos que a velocidade aumentou em 25%. Isso significa que:

$$V_2 = (1 + 25\%)V_1$$
$$V_2 = 1{,}25V_1$$

Logo:

$$V_1 \times t_1 = V_2 \times t_2$$
$$V_1 \times t_1 = 1{,}25V_1 \times t_2$$

Simplificando V_1, temos:

$$t_1 = 1{,}25 \times t_2$$

$$t_2 = \frac{1}{1{,}25} t_1$$

$$t_2 = 0{,}8\, t_1$$

$$t_2 = 80\%\, t_1$$

Note, portanto, que o novo tempo **t_2 é 80% do tempo original t_1**. Isso significa que um aumento em 25% na velocidade fez com que o **tempo** fosse **reduzido em 20%.**

Gabarito: CERTO.

2. (CESPE/IBAMA/2012) Um órgão de controle, ao aplicar sanções contra empresas petroleiras cujas atividades resultem em agressão ao meio ambiente, determina o valor da multa, em reais, de modo proporcional ao volume de petróleo derramado, em barris, ao tempo de duração do derramamento, em semanas, e à área da região afetada, em quilômetros quadrados. Assim, se determinada empresa petroleira deixar vazar, por três semanas, quatro mil barris de petróleo bruto, causando a contaminação de 950 km2 de superfície marítima, será, em decorrência disso, multada em R$ 5.000.000,00. Com base nessas informações, julgue o item seguinte.

Caso, depois de estancado um vazamento, o petróleo derramado avance por uma área correspondente a 10% da área inicialmente afetada, o valor da multa recebida pela empresa aumentará 10% em relação ao valor que seria estabelecido no momento do estanque.

Comentários:

O **valor da multa** é diretamente proporcional ao **volume de petróleo** derramado, ao **tempo de duração** do derramamento e à **área da região afetada**. Nesse caso:

$$\frac{(\text{Multa})}{(\text{Volume}) \times (\text{Tempo}) \times (\text{Área})} = k$$

Suponha que inicialmente temos um **valor de multa** M_1 ocasionada por um **volume de petróleo** V_1 com um **tempo de derramamento** t_1 em uma **área** A_1. Caso, **depois de estancado o vazamento**, a área afetada aumente em 10%, temos, em um segundo momento:

- Uma **multa** M_2, que queremos determinar;
- Um **volume de petróleo** $V_2 = V_1$, pois o **derramamento foi estancado**;
- Um **tempo de derramamento** $t_2 = t_1$, pois o **derramamento foi estancado**; e
- Uma área afetada $A_2 = 1{,}1A_1$, pois a área aumentou em 10%.

Nesse caso, temos:

$$\frac{M_1}{V_1 \times t_1 \times A_1} = \frac{M_2}{V_2 \times t_2 \times A_2} = k$$

$$\frac{M_1}{V_1 \times t_1 \times A_1} = \frac{M_2}{V_1 \times t_1 \times 1{,}1A_1}$$

Simplificando V_1, t_1 e A_1, temos:

$$M_1 = \frac{M_2}{1{,}1} \rightarrow M_2 = 1{,}1M_1$$

Logo, o **novo valor de multa (M_2) aumentará em 10%** com relação ao valor que seria estabelecido no momento do estanque (M_1)

Gabarito: CERTO.

Texto para as próximas questões

O valor do prêmio dos seguros de vida vendidos por determinada seguradora foi determinado de modo diretamente proporcional ao produto da idade, em anos, do segurado pela quantia, em reais, segurada, sendo a constante da proporcionalidade a mesma para todos os seguros de vida. Os valores do prêmio dos clientes são reajustados na data de seu aniversário. O prêmio mensal do seguro no valor de R$ 30.000,00 de determinado cliente, por exemplo, passou, a partir do momento que ele completou 30 anos de idade, a ser de R$ 30,00.

Com base nessas informações, julgue os itens abaixo.

3.(CESPE/TJ RR/2012) O valor do prêmio mensal para um cliente de 70 anos de idade que deseje segurar a quantia de R$ 100.000,00 será superior a R$ 200,00.

4.(CESPE/TJ RR/2012) Quando o referido cliente completar 31 anos de idade, o aumento do valor do prêmio mensal de seu seguro, considerando-se a quantia de R$ 30.000,00, será superior a 5%.

5.(CESPE/TJ RR/2012) A quantia segurada por um cliente de 45 anos de idade que paga um prêmio mensal de R$ 100,00 é superior a R$ 100.000,00.

Comentários:

O valor do prêmio é diretamente proporcional ao produto da idade pela quantia segurada.

$$\frac{(\text{Prêmio})}{(\text{Idade}) \times (\text{Quantia segurada})} = k$$

Para determinado cliente de **30 anos** com uma **quantia segurada de R$ 30.000**, temos um **prêmio de R$ 30**. Logo:

$$\frac{30}{30 \times 30.000} = k$$

$$k = \frac{1}{30.000}$$

<u>Questão 03</u>

Para um cliente de **70 anos** com uma quantia segurada de **R$ 100.000**, temos:

$$\frac{(\text{Prêmio})}{(\text{Idade}) \times (\text{Quantia segurada})} = k$$

$$\frac{(\text{Prêmio})}{70 \times 10.0000} = \frac{1}{30.000}$$

$$(\text{Prêmio}) = \frac{70 \times 100.000}{30.000}$$

$$(\text{Prêmio}) = \frac{700}{3}$$

$$(\text{Prêmio}) = R\$\ 233{,}33$$

Logo, o prêmio será superior a R$ 200. O **gabarito**, portanto, é **CERTO**.

Questão 04

Para um cliente de **31 anos** com uma quantia segurada de **R$ 30.000**, temos:

$$\frac{(\text{Prêmio})}{(\text{Idade}) \times (\text{Quantia segurada})} = k$$

$$\frac{(\text{Prêmio})}{31 \times 30.000} = \frac{1}{30.000}$$

$$(\text{Prêmio}) = \frac{31 \times 30.000}{30.000}$$

$$(\text{Prêmio}) = R\$\ 31{,}00$$

O aumento do valor do prêmio foi de:

$$\frac{31 - 30}{30} = \frac{1}{30} = 0{,}0333\ldots \approx 3{,}33\%$$

Logo, o aumento será **inferior a 5%**. O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**.

Questão 05

Para um cliente de **45 anos** que paga um prêmio de **R$ 100,00**, temos:

$$\frac{(\text{Prêmio})}{(\text{Idade}) \times (\text{Quantia segurada})} = k$$

$$\frac{100}{45 \times (\text{Quantia segurada})} = \frac{1}{30.000}$$

$$\frac{30.000 \times 100}{45} = (\text{Quantia segurada})$$

$$(\text{Quantia segurada}) \approx R\$\ 66.666{,}67$$

Logo, a quantia segurada será **inferior a R$ 100.000**. O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**.

Gabarito: 03 - CERTO. 04 - ERRADO. 05 - ERRADO.

6. (CESPE/Pref. São Cristóvão/2019) Há cinco anos, João, Paulo e Miguel se associaram para montar uma lanchonete. João entrou com R$ 80.000; Paulo, com R$ 120.000; e Miguel, com R$ 200.000. A lanchonete foi vendida, hoje, por R$ 3.200.000 e essa quantia foi dividida entre os três de forma diretamente proporcional aos valores que cada um investiu.

A partir dessa situação hipotética, julgue o item a seguir.

João recebeu menos de R$ 700.000.

Comentários:

Suponha que o valor recebido por ocasião da venda da lanchonete é $\boldsymbol{j}$ para **João**, $\boldsymbol{p}$ para **Paulo** e $\boldsymbol{m}$ para **Miguel**.

Como o valor da venda foi dividido em partes diretamente proporcionais ao capital investido por **João**, **Paulo** e **Miguel**, temos:

$$\frac{j}{80.000} = \frac{p}{120.000} = \frac{m}{200.000} = k$$

A soma dos valores recebidos é R$ 3.200.000. Logo, $j + p + m = 3.200.000$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{j}{80.000} = \frac{p}{120.000} = \frac{m}{200.000}$, temos:

$$\frac{j}{80.000} = \frac{p}{120.000} = \frac{m}{200.000} = \frac{j + p + m}{80.000 + 120.000 + 200.000}$$

$$\frac{j}{80.000} = \frac{p}{120.000} = \frac{m}{200.000} = \frac{3.200.000}{400.000}$$

$$\boxed{\frac{j}{80.000} = \frac{p}{120.000} = \frac{m}{200.000} = 8}$$

O valor recebido por João (j) é tal que:

$$\frac{j}{80.000} = 8$$

$$j = 640.000$$

Logo, João recebeu menos do que R$ 700.000.

Gabarito: CERTO.

7.(CESPE/CAGE RS/2018) João, Pedro e Tiago, três investidores amadores, animados com a popularização das criptomoedas, investiram 12, 14 e 24 mil reais, respectivamente, em moeda virtual. Após uma semana do investimento, eles perceberam que o prejuízo acumulado, que era de 8 mil reais, deveria ser dividido entre os três, em proporção direta aos valores investidos.

Nessa situação, em caso de desistência do investimento após a constatação do prejuízo, João, Pedro e Tiago receberão, respectivamente, as quantias, em reais, de

a) 9.340, 11.340 e 21.340.

b) 10.080, 11.760 e 20.160.

c) 11.920, 13.240 e 22.840.

d) 2.660, 2.660 e 2.660.

e) 1.920, 2.240 e 3.840.

Comentários:

Suponha que o prejuízo absorvido é j para João, p para Pedro e t para Tiago.

Como o prejuízo foi dividido em partes diretamente proporcionais ao capital investido por João, Pedro e Tiago, temos:

$$\frac{j}{12.000} = \frac{p}{14.000} = \frac{t}{24.000} = k$$

A soma dos prejuízos é R$ 8.000. Logo, $j + p + t = 8.000$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{j}{12.000} = \frac{p}{14.000} = \frac{t}{24.000}$, temos:

$$\frac{j}{12.000} = \frac{p}{14.000} = \frac{t}{24.000} = \frac{j + p + t}{12.000 + 14.000 + 24.000}$$

$$\frac{j}{12.000} = \frac{p}{14.000} = \frac{t}{24.000} = \frac{8.000}{50.000}$$

$$\boxed{\frac{j}{12.000} = \frac{p}{14.000} = \frac{t}{24.000} = \frac{4}{25}}$$

Logo, os prejuízos absorvidos por João, Pedro e Tiago são:

$$\frac{j}{12.000} = \frac{4}{25} \rightarrow j = \frac{4 \times 12.000}{25} \rightarrow j = 1.920$$

$$\frac{p}{14.000} = \frac{4}{25} \rightarrow p = \frac{4 \times 14.000}{25} \rightarrow p = 2.240$$

$$\frac{t}{24.000} = \frac{4}{25} \rightarrow t = \frac{4 \times 24.000}{25} \rightarrow t = 3.840$$

Observe que a questão pergunta o valor dos investimentos após a constatação dos prejuízos. Temos:

- **João**: $12.000 - 1.920 = 10.080$;
- **Pedro:** $14.000 - 2.240 = 11.760$;
- **Tiago:** $24.000 - 3.840 = 20.160$.

O **gabarito**, portanto, é a **letra B**: **10.080**, **11.760** e **20.160**.

Gabarito: Letra B.

8.(CESPE/BNB/2018) No item a seguir é apresentada uma situação hipotética, seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de proporcionalidade, divisão proporcional, média e porcentagem.

Vilma, Marta e Cláudia trabalham em uma mesma agência bancária. Vilma está nesse emprego há 5 anos, Marta, há 7 anos e Cláudia, há 12 anos. Para premiar a eficiência dessas funcionárias, a direção do banco concedeu-lhes uma bonificação de R$ 12.000, que deverão ser divididos entre as três, de forma diretamente proporcional aos respectivos tempos de serviço.

Nesse caso, Vilma receberá mais de R$ 3.000 de bonificação.

Comentários:

Suponha que o valor recebido a título de bonificação é v para Vilma, m para Marta e c para Cláudia.

Como a totalidade da bonificação foi dividida em partes proporcionais aos tempos de serviço, temos:

$$\frac{v}{5} = \frac{m}{7} = \frac{c}{12} = k$$

A soma dos valores recebidos é R$ 12.000. Logo, $v + m + c = 12.000$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{v}{5} = \frac{m}{7} = \frac{c}{12}$, temos:

$$\frac{v}{5} = \frac{m}{7} = \frac{c}{12} = \frac{v+m+c}{5+7+12}$$

$$\frac{v}{5} = \frac{m}{7} = \frac{c}{12} = \frac{12.000}{24}$$

$$\boxed{\frac{v}{5} = \frac{m}{7} = \frac{c}{12} = 500}$$

O valor recebido por Vilma (v) é tal que:

$$\frac{v}{5} = 500$$

$$v = 2.500$$

Portanto, Vilma receberá **menos de** R$ 3.000 de bonificação.

Gabarito: ERRADO.

9.(CESPE/IFF/2018) A quantia de R$ 360.000 deverá ser repassada às escolas A, B e C para complemento da merenda escolar. A distribuição será em partes diretamente proporcionais às quantidades de alunos de cada escola. Sabe-se que a escola A tem 20% a mais de alunos que a escola B e que a escola C tem 20% a menos de alunos que a escola B. Nesse caso, a escola A deverá receber

a) R$ 140.000.

b) R$ 144.000.

c) R$ 168.000.

d) R$ 192.000.

e) R$ 216.000.

Comentários:

Suponha que os valores recebidos pelas escolas A, B e C são, respectivamente, a, b e c.

Considerando que a escola B tem **x alunos**, temos que:

- A escola A tem 20% a mais de alunos que a escola B: $1{,}2\ x$ alunos.
- A escola C tem 20% a menos de alunos que a escola B: $0{,}8x$ alunos.

Como o valor total foi dividido em partes diretamente proporcionais às quantidades de alunos de cada escola, temos:

$$\frac{a}{1{,}2x} = \frac{b}{x} = \frac{c}{0{,}8x} = k$$

Podemos simplificar o valor x das proporções em $\frac{a}{1{,}2x} = \frac{b}{x} = \frac{c}{0{,}8x}$. Ficamos com:

$$\frac{a}{1{,}2} = \frac{b}{1} = \frac{c}{0{,}8}$$

A soma dos valores recebidos pelas escolas é R$ 360.000. Logo, $a + b + c = 360.000$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{a}{1{,}2} = \frac{b}{1} = \frac{c}{0{,}8}$, temos:

$$\frac{a}{1{,}2} = \frac{b}{1} = \frac{c}{0{,}8} = \frac{a + b + c}{1{,}2 + 1 + 0{,}8}$$

$$\frac{a}{1{,}2} = \frac{b}{1} = \frac{c}{0{,}8} = \frac{360.000}{3}$$

$$\boxed{\frac{a}{1{,}2} = \frac{b}{1} = \frac{c}{0{,}8} = 120.000}$$

O valor recebido pela escola A (a) é:

$$\frac{a}{1{,}2} = 120.000$$

$$a = R\$\ 144.000$$

Gabarito: Letra B.

10.(CESPE/CBM AL/2017) Um tanque contém 256 L de gasolina pura. Do tanque foram retirados 64 L de gasolina e acrescentados 64 L de álcool. Depois de homogeneizada essa mistura, foram retirados 64 L e acrescentados outros 64 L de álcool.

Com relação a esse procedimento, julgue o próximo item.

No final desse processo, se for possível separar as substâncias álcool e gasolina da mistura que está no tanque, serão encontrados mais de 140 L de gasolina pura.

Comentários:

Vamos resolver o problema passo a passo.

"Um tanque contém 256 L de gasolina pura. Do tanque foram retirados 64 L de gasolina e acrescentados 64 L de álcool."

Temos a seguinte composição:

- Gasolina: $256 - 64 = 192\ \mathrm{L}$;
- Álcool: $64\ \mathrm{L}$.

"Depois de homogeneizada essa mistura, foram retirados 64 L..."

Ao retirar 64 L da mistura, retirou-se uma quantidade g de gasolina e uma quantidade a de álcool. Uma vez que a mistura foi homogeneizada, **essas quantidades g e a são diretamente proporcionais a 192 e 64**, respectivamente.

$$\frac{g}{192} = \frac{a}{64} = k$$

A soma das partes é 64 L. Logo, $g + a = 64$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{g}{192} = \frac{a}{64}$, temos:

$$\frac{g}{192} = \frac{a}{64} = \frac{g+a}{256}$$

$$\frac{g}{192} = \frac{a}{64} = \frac{64}{256}$$

$$\boxed{\frac{g}{192} = \frac{a}{64} = \frac{1}{4}}$$

Portanto, a constante de proporcionalidade é $\frac{1}{4}$.

$$\frac{g}{192} = \frac{1}{4} \rightarrow g = \frac{192}{4} \rightarrow g = 48 \text{ L}$$

$$\frac{a}{64} = \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{64}{4} \rightarrow a = 16 \text{ L}$$

Foram retirados 48 L de gasolina e 16 L de álcool. Ficamos com a seguinte composição:

- Gasolina: $192 - 48 = 144 \text{ L}$;
- Álcool: $64 - 16 = 48 \text{ L}$.

"... e acrescentados outros 64 L de álcool."

Ao final dos procedimentos, ficamos com:

- Gasolina: 144 L;
- Álcool: $48 + 64 = 112 \text{ L}$.

Note que, ao final do processo, temos **144 L litros de gasolina**, valor superior a 140 L.

Gabarito: CERTO.

11.(CESPE/TCE-SC/2016) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética relativa a proporcionalidade, porcentagem e juros, seguida de uma assertiva a ser julgada.

A participação dos vendedores nos lucros de uma empresa é diretamente proporcional às suas vendas. Os vendedores A, B e C venderam juntos R$ 500.000 em produtos: A vendeu R$ 225.000, B vendeu R$ 175.000 e C, o restante. Eles dividiram entre si, a título de participação nos lucros, o valor de R$ 10.000. Nessa situação, C recebeu R$ 2.000 de participação nos lucros.

Comentários:

Suponha que os valores recebidos como **participação nos lucros** pelos vendedores A, B e C são, respectivamente, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$.

Sabemos que **A vendeu R$ 255.000**, **B vendeu R$ 175.000** e C vendeu o restante do total de R$ 500.000. Logo, **C vendeu**:

$$500.000 - 255.000 - 175.000 = \boldsymbol{R\$\ 100.000}$$

Como a **participação nos lucros** foi dividida **proporcionalmente às vendas**, temos:

$$\frac{a}{225.000} = \frac{b}{175.000} = \frac{c}{100.000} = k$$

A soma dos valores recebidos como participação nos lucros é R$ 10.000. Logo, $a + b + c = 10.000$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{225.000} = \frac{b}{175.000} = \frac{c}{100.000}$, temos:

$$\frac{a}{225.000} = \frac{b}{175.000} = \frac{c}{100.000} = \frac{a+b+c}{225.000 + 175.000 + 100.000}$$

$$\frac{a}{225.000} = \frac{b}{175.000} = \frac{c}{100.000} = \frac{10.000}{500.000}$$

$$\boxed{\frac{a}{225.000} = \frac{b}{175.000} = \frac{c}{100.000} = \frac{1}{50}}$$

O valor recebido pelo vendedor C (c) é tal que:

$$\frac{c}{100.000} = \frac{1}{50}$$

$$c = \frac{100.000}{50}$$

$$c = R\$\ 2.000$$

Gabarito: CERTO.

12.(CESPE/MDIC/2014) Lúcio, Breno, Cláudia e Denise abriram a loja virtual Lik, para a qual, no ato de abertura, Lúcio contribuiu com R$ 10.000,00; Breno, com R$ 15.000,00; Cláudia, com R$ 12.000,00; e Denise, com R$ 13.000,00. Os lucros obtidos por essa loja serão distribuídos de forma diretamente proporcional à participação financeira de cada um dos sócios no ato de abertura da loja.

A partir dessas informações, julgue o item a seguir.

Se o lucro obtido ao final de determinado mês for igual a R$ 7.000,00, então a parcela de Cláudia no lucro será superior a R$ 1.700,00 nesse mês.

Comentários:

Suponha que o valor recebido como lucro é $\boldsymbol{l}$ para **Lúcio**, $\boldsymbol{b}$ para **Breno**, $\boldsymbol{c}$ para **Cláudia** e $\boldsymbol{d}$ para **Denise**.

Como o lucro foi dividido em partes diretamente proporcionais ao capital investido por Lúcio, Breno, Cláudia e Denise, temos:

$$\frac{l}{10.000} = \frac{b}{15.000} = \frac{c}{12.000} = \frac{d}{13.000} = k$$

A soma dos valores recebidos a título de lucro da empresa é R$ 7.000. Logo, $l + b + c + d = 7.000$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma"** na proporção $\frac{l}{10.000} = \frac{b}{15.000} = \frac{c}{12.000} = \frac{d}{13.000}$, temos:

$$\frac{l}{10.000} = \frac{b}{15.000} = \frac{c}{12.000} = \frac{d}{13.000} = \frac{l + b + c + d}{10.000 + 15.000 + 12.000 + 13.000}$$

$$\frac{l}{10.000} = \frac{b}{15.000} = \frac{c}{12.000} = \frac{d}{13.000} = \frac{7.000}{50.000}$$

$$\boxed{\frac{l}{10.000} = \frac{b}{15.000} = \frac{c}{12.000} = \frac{d}{13.000} = \frac{7}{50}}$$

O valor recebido por Cláudia (c) é tal que:

$$\frac{c}{12.000} = \frac{7}{50}$$

$$c = 7 \times \frac{12.000}{50}$$

$$c = R\$\ 1.680$$

Logo, a questão erra ao afirmar que a parcela de Cláudia no lucro será superior a R$ 1.700,00 nesse mês.

Gabarito: ERRADO.

13.(CESPE/CGE PI/2015) Considerando que uma instituição financeira empreste a quantia de R$ 5.000,00 para ser quitada em um ano, sob taxa de juros compostos anual e capitalização semestral, julgue o item que se segue.

Se a taxa nominal de juros a ser cobrada for inversamente proporcional à quantidade de interessados e, para 800 clientes interessados, essa taxa for de 30%, então, para 1.500 clientes interessados, essa taxa de juros será de 18% ao ano.

Comentários:

A taxa é inversamente proporcional à quantidade de interessados. Logo:

$$(\text{Taxa}) \times (\text{Interessados}) = \text{k}$$

Para 800 interessados, a taxa é de 30%. Logo:

$$(\text{Taxa}) \times (\text{Interessados}) = \text{k}$$

$$30\% \times 800 = k$$

$$\frac{30}{100} \times 800 = k$$

$$k = 240$$

Devemos determinara taxa correspondente a 1.5000 interessados.

$$(\text{Taxa}) \times (\text{Interessados}) = \text{k}$$

$$(\text{Taxa}) \times 1.500 = 240$$

$$(\text{Taxa}) = \frac{240}{1500}$$

$$(\text{Taxa}) = \frac{16}{100} = 16\%$$

Gabarito: ERRADO.

14.(CESPE/SEDF/2017) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de juros, divisão proporcional e regra de três.

Um empresário dividiu, entre três de seus empregados, a quantia de R$ 6.600,00 em partes inversamente proporcionais a 2, 5 e 8.

Nesse caso, todos os valores nessa partilha são maiores que R$ 1.100,00.

Comentários:

Suponha que o dinheiro será repartido nas partes a, b e c de modo inversamente proporcional a, respectivamente, 2, 5 e 8. Temos a seguinte proporção:

$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{8}} = k$$

Sabemos que a soma das partes totaliza R$ 6.600. Logo, $a + b + c = 6.600$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{8}}$, temos:

$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{8}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{8}} = \frac{6.600}{\frac{20+8+5}{40}}$$

$$2a = 5b = 8c = \frac{6.600}{\frac{33}{40}}$$

$$2a = 5b = 8c = \frac{6600}{33} \times 40$$

$$\boxed{2a = 5b = 8c = 8.000}$$

O menor valor recebido será c, pois este valor é inversamente proporcional ao maior número apresentado. Temos que:

$$8c = 8.000$$

$$c = R\$\ 1.000$$

Gabarito: ERRADO.

15.(CESPE/FUB/2018) A respeito de razões, proporções e inequações, julgue o item seguinte.

Situação hipotética: Vanda, Sandra e Maura receberam R$ 7.900 do gerente do departamento onde trabalham, para ser divido entre elas, de forma inversamente proporcional a 1/6, 2/9 e 3/8, respectivamente.

Assertiva: Nessa situação, Sandra deverá receber menos de R$ 2.500.

Comentários:

Suponha **Vanda**, **Sandra** e **Maura** receberão, respectivamente, $\boldsymbol{v}$**,** $\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{m}$. Essas partes em que a quantia total é repartida são inversamente proporcionais a, respectivamente, **1/6, 2/9 e 3/8**. Temos a seguinte proporção:

$$\frac{v}{\frac{1}{1/6}} = \frac{s}{\frac{1}{2/9}} = \frac{m}{\frac{1}{3/8}} = k$$

$$\frac{v}{6} = \frac{s}{\frac{9}{2}} = \frac{m}{\frac{8}{3}} = k$$

Sabemos que a soma das partes totaliza R$ 7.900. Logo, $v + s + m = 7.900$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{v}{6} = \frac{s}{\frac{9}{2}} = \frac{m}{\frac{8}{3}}$, temos:

$$\frac{v}{6} = \frac{s}{\frac{9}{2}} = \frac{m}{\frac{8}{3}} = \frac{v + s + m}{6 + \frac{9}{2} + \frac{8}{3}}$$

$$\frac{v}{6} = \frac{s}{\frac{9}{2}} = \frac{m}{\frac{8}{3}} = \frac{7.900}{\frac{36 + 27 + 16}{6}}$$

$$\frac{v}{6} = \frac{s}{\frac{9}{2}} = \frac{m}{\frac{8}{3}} = \frac{7.900}{\frac{36 + 27 + 16}{6}}$$

$$\frac{v}{6} = \frac{s}{\frac{9}{2}} = \frac{m}{\frac{8}{3}} = \frac{7.900}{\frac{79}{6}}$$

$$\frac{v}{6} = \frac{s}{\frac{9}{2}} = \frac{m}{\frac{8}{3}} = \frac{7.900}{79} \times 6$$

$$\boxed{\frac{v}{6} = \frac{s}{\frac{9}{2}} = \frac{m}{\frac{8}{3}} = 600}$$

O valor que **Sandra** receberá é:

$$\frac{s}{\frac{9}{2}} = 600$$

$$s = 600 \times \frac{9}{2}$$

$$s = R\$ \, 2.700$$

Gabarito: ERRADO.

Texto para as próximas questões

Os irmãos Jonas, Pierre e Saulo, que têm, respectivamente, 30, 20 e 18 anos de idade, herdaram de seu pai a quantia de R$ 5 milhões. O testamento prevê que essa quantia deverá ser dividida entre os irmãos em partes inversamente proporcionais às suas idades.

Nessa situação hipotética,

16.(CESPE/STM/2018) Um dos irmãos receberá metade da herança.

17. (CESPE/STM/2018) Jonas receberá 50% a mais que Saulo.

Comentários:

Suponha que **Jonas**, **Pierre** e **Saulo** receberão, respectivamente, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{s}$. Essas partes em que a quantia total é repartida são inversamente proporcionais a, respectivamente, **30, 20 e 18**. Temos a seguinte proporção:

$$\frac{j}{\frac{1}{30}} = \frac{p}{\frac{1}{20}} = \frac{s}{\frac{1}{18}} = k$$

Sabemos que a soma das partes totaliza R$ 5 milhões. Logo, $j + p + s = 5.000.000$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{j}{\frac{1}{30}} = \frac{p}{\frac{1}{20}} = \frac{s}{\frac{1}{18}}$, temos:

$$\frac{j}{\frac{1}{30}} = \frac{p}{\frac{1}{20}} = \frac{s}{\frac{1}{18}} = \frac{j + p + s}{\frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{18}}$$

$$\frac{j}{\frac{1}{30}} = \frac{p}{\frac{1}{20}} = \frac{s}{\frac{1}{18}} = \frac{5.000.000}{\frac{6 + 9 + 10}{180}}$$

$$30j = 20p = 18s = \frac{5.000.000}{\frac{25}{180}}$$

$$30j = 20p = 18s = \frac{5.000.000}{25} \times 180$$

$$\boxed{30j = 20p = 18s = 36.000.000}$$

O valor que cada irmão receberá é tal que:

$$30j = 36.000.000 \ \rightarrow j = \frac{36.000.000}{30} \rightarrow j = R\$\ 1.200.000$$

$$20p = 36.000.000 \rightarrow p = \frac{36.000.000}{20} \rightarrow p = R\$\ 1.800.000$$

$$18s = 36.000.000 \rightarrow s = \frac{36.000.000}{18} \rightarrow s = R\$\ 2.000.000$$

Questão 16

Nenhum dos irmãos receberá metade da herança. O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**.

Questão 17

Jonas receberá $j = R\$\ 1.200.000$, e Saulo receberá $s = R\$\ 2.000.000$. Portanto, é **ERRADO** dizer que Jonas recebe 50% a mais do que Saulo, pois Saulo recebe mais do que Jonas.

Gabarito: 16 - ERRADO. 17 - ERRADO.

18.(CESPE/TJ PA/2020) Um servidor deve digitalizar 72.000 documentos de uma página cada. Os documentos a serem digitalizados devem ser distribuídos em 3 máquinas digitalizadoras com velocidades de digitalização diferentes. Para digitalizar a mesma quantidade de documentos, uma das máquinas menos rápidas gasta o triplo do tempo da mais rápida, enquanto a outra gasta seis vezes o tempo da máquina mais rápida.

Nessa situação, para que as três máquinas, funcionando simultaneamente, demorem o mesmo tempo para digitalizar os 72.000 documentos, devem ser colocados na máquina mais rápida

a) 8.000 documentos.

b) 16.000 documentos.

c) 24.000 documentos.

d) 32.000 documentos.

e) 48.000 documentos.

Comentários:

Para que as três máquinas demorem o mesmo tempo para digitalizar os documentos, devemos distribuir a totalidade dos documentos de modo **inversamente proporcional ao tempo** que cada máquina leva para digitalizar uma folha.

Suponha que a máquina **mais veloz** fique com $\boldsymbol{a}$ **documentos** e gaste um tempo $\boldsymbol{t}$ para digitalizar uma folha. Nesse caso:

- A máquina **intermediária** fica com $\boldsymbol{b}$ **documentos** e gasta um tempo $\boldsymbol{3t}$; e
- A máquina **mais lenta** fica com $\boldsymbol{c}$ **documentos** e gasta um tempo $\boldsymbol{6t}$.

Nesse caso, a distribuição dos documentos de modo **inversamente proporcional ao tempo** que cada máquina leva para digitalizar uma folha é representada por:

$$\frac{a}{\frac{1}{t}} = \frac{b}{\frac{1}{3t}} = \frac{c}{\frac{1}{6t}} = k$$

Podemos simplificar t da igualdade $\frac{a}{\frac{1}{t}} = \frac{b}{\frac{1}{3t}} = \frac{c}{\frac{1}{6t}}$.

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{6}}$$

A soma dos documentos distribuídos para as três máquinas é $a + b + c = 72.000$. Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção, temos:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = \frac{a+b+c}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = \frac{72.000}{\frac{6+2+1}{6}}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = \frac{72.000}{\frac{9}{6}}$$

$$\boxed{a = 3b = 6c = 48.000}$$

A questão nos pede o número de documentos que deve ser colocado na máquina mais rápida. Da igualdade acima, temos:

$$a = 48.000 \text{ documentos}$$

Gabarito: Letra E.

19.(CESPE/MDIC/2014) A respeito de proporções e regra de três, julgue o próximo item.

Caso toda a produção de uma fábrica seja destinada aos públicos infantil, jovem e adulto, de modo que as porcentagens da produção destinadas a cada um desses públicos sejam inversamente proporcionais, respectivamente, aos números 2, 3 e 6, então mais de 30% da produção dessa fábrica destinar-se-á ao público jovem.

Comentários:

Suponha que a produção destinada ao público **infantil**, **jovem** e **adulto** seja, respectivamente, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{a}$. Essas partes em que a produção total é repartida são inversamente proporcionais a, respectivamente, **2, 3 e 6**. Temos a seguinte proporção:

$$\frac{i}{\frac{1}{2}} = \frac{j}{\frac{1}{3}} = \frac{a}{\frac{1}{6}} = k$$

Sabemos que o **total da produção ($\boldsymbol{t}$)** é dada pela soma $t = i + j + a$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{i}{\frac{1}{2}} = \frac{j}{\frac{1}{3}} = \frac{a}{\frac{1}{6}}$, temos:

$$\frac{i}{\frac{1}{2}} = \frac{j}{\frac{1}{3}} = \frac{a}{\frac{1}{6}} = \frac{(i+j+a)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$$

$$\frac{i}{\frac{1}{2}} = \frac{j}{\frac{1}{3}} = \frac{a}{\frac{1}{6}} = \frac{t}{\frac{3+2+1}{6}}$$

$$2i = 3j = 6a = \frac{\frac{t}{6}}{6}$$

$$\boxed{2i = 3j = 6a = t}$$

A produção destinada ao público jovem é tal que:

$$3j = t$$

$$j = \frac{1}{3} \times t$$

$$j = 0{,}333 \ldots \times t$$

$$j = 33{,}33 \ldots \% \ \times t$$

Logo, a produção destinada ao **público jovem** é **mais do que 30% do total da produção (t)**.

Gabarito: CERTO.

20.(CESPE/FUB/2016) Diariamente, o tempo médio gasto pelos servidores de determinado departamento para executar suas tarefas é diretamente proporcional à quantidade de tarefas executadas e inversamente proporcional à sua produtividade individual diária P.

Com base nessas informações, julgue o item a seguir.

Considere que na terça-feira a quantidade de tarefas a serem executadas por um servidor correspondia a 50% a mais do que a quantidade de tarefas executadas no dia anterior. Nesse caso, para que o servidor concluísse seu trabalho da terça-feira no mesmo tempo gasto para concluí-lo na segunda-feira, a sua produtividade na terça-feira deveria aumentar em 50% em relação à produtividade da segunda-feira.

Comentários:

O **tempo** gasto para executar as tarefas é **diretamente proporcional** à **quantidade** de tarefas e **inversamente proporcional** à **produtividade**. Logo:

$$\frac{(\text{Tempo})}{(\text{Quantidade}) \times \dfrac{1}{(\text{Produtividade})}} = k$$

Considere que o servidor, na **segunda-feira**, realizou no tempo t_1 uma quantidade q_1 de tarefas tendo uma produtividade p_1. Logo:

$$\frac{t_1}{q_1 \times \dfrac{1}{p_1}} = k$$

Na **terça-feira**, o servidor realizou no tempo t_2 uma quantidade q_2 de tarefas tendo uma produtividade p_2.

- A quantidade de tarefas na terça-feira é 50% superior: $q_2 = 1{,}5q_1$;
- O tempo gasto na terça-feira deve ser o mesmo: $t_2 = t_1$;
- Queremos determinar a produtividade p_2.

Portanto:

$$\frac{t_2}{q_2 \times \frac{1}{p_2}} = \boldsymbol{k}$$

$$\frac{t_2}{q_2 \times \frac{1}{p_2}} = \frac{t_1}{q_1 \times \frac{1}{p_1}}$$

$$\frac{t_1}{1{,}5q_1 \times \frac{1}{p_2}} = \frac{t_1}{q_1 \times \frac{1}{p_1}}$$

$$\frac{t_1 \times p_2}{1{,}5q_1} = \frac{t_1 \times p_1}{q_1}$$

Simplificando t_1 e q_1, temos:

$$\frac{p_2}{1{,}5} = p_1$$

$$p_2 = 1{,}5\,p_1$$

Logo, a produtividade na terça-feira (p_2) deve ser 50% superior à produtividade da segunda (p_1).

Gabarito: CERTO.

LISTA DE QUESTÕES – CEBRASPE

Frações

1.(CESPE/FUB/2018) Paulo, Maria e João, servidores lotados em uma biblioteca pública, trabalham na catalogação dos livros recém-adquiridos. Independentemente da quantidade de livros a serem catalogados em cada dia, Paulo cataloga 1/4, Maria cataloga 1/3 e João, 5/12.

A respeito da catalogação de livros por esses servidores, julgue o item a seguir.

Entre os três servidores, Maria é a mais eficiente, isto é, em cada dia de trabalho, ela cataloga mais livros que cada um dos outros dois.

2. (CESPE/TCE-RS/2013) Na secretaria de um órgão público, as páginas dos processos, para serem digitalizadas, são separadas e distribuídas entre 7 servidores — 4 servidores recém-contratados e 3 servidores antigos. Julgue o item a seguir, a respeito dessa situação.

Considere que, com a aquisição de novos equipamentos, o tempo para se digitalizar uma página, que era de 22 segundos, passou a ser de [22 − 22 × P] segundos, em que P correspondente à dízima periódica 0,27272727.... Nessa situação, com os novos equipamentos, a digitalização de uma página passou a ser feita em 16 segundos.

3.(CESPE/CNJ/2013)

ano de início dos processos	especificação		
	em trâmite	para parecer	julgado
2010	200	30	600
2011	240	30	580
2012	260	50	700

Considerando os dados da tabela acima, que mostra a quantidade e situação de processos, nos anos 2010, 2011 e 2012, em um tribunal, julgue o item subsequente.

Se, em 2011, 5 juízes atuavam no referido tribunal, então a relação juiz/processo era de, aproximadamente, 1:170.

4.(CESPE/TJ PA/2020) Dois colaboradores do setor de informática de uma empresa são responsáveis por fazer a manutenção dos computadores da empresa. Durante certo período de tempo, um dos colaboradores fez manutenção em $0,\overline{26} = 0,262626$ da quantidade total de computadores da empresa e, nesse mesmo período de tempo, o outro colaborador fez manutenção em $0,\overline{18} = 0,181818$ dessa quantidade total de computadores, tendo restado 110 computadores sem manutenção.

Nessa situação, a quantidade total de computadores dessa empresa é igual a

a) 130.

b) 139.

c) 155.

d) 159.

e) 198.

5.(CESPE/Pref. B dos Coqueiros/2020) Em seu testamento, um pai deixou o diagrama mostrado a seguir, para ilustrar como deverá ocorrer a distribuição de sua herança, no valor de 2,7 milhões de reais, entre seus cinco herdeiros.

Com base nas informações precedentes, e considerando-se que, em cada linha desse diagrama, o retângulo branco mostrado está dividido em partes iguais, é correto concluir que

a) o quarto filho receberá mais de 420 mil reais.

b) a mãe e o terceiro filho receberão, juntos, um total de 1,3 milhão de reais.

c) a mãe e o primeiro filho receberão, juntos, menos de 1,4 milhão de reais.

d) os quatro filhos receberão, juntos, 2 milhões de reais.

e) a mãe e o quarto filho receberão, juntos, exatamente o mesmo total recebido pelos outros três filhos.

Texto para as próximas questões

Ao iniciar uma sessão plenária na câmara municipal de uma pequena cidade, apenas 1/4 dos assentos destinados aos vereadores foram ocupados. Com a chegada do vereador Veron, 1/3 dos assentos passaram a ficar ocupados. Nessa situação hipotética, é correto afirmar que

6. (CESPE/TRE RJ/2012) Menos de cinco assentos estavam ocupados quando o vereador Veron chegou à câmara municipal.

7.(CESPE/TRE RJ/2012) Os assentos destinados aos vereadores serão todos ocupados somente após a chegada de mais nove vereadores.

8.(CESPE/TRE RJ/2012) Há mais de 15 assentos destinados aos vereadores no plenário da câmara.

9. (CESPE/PM DF/2010) Existe um cálculo para saber a quantidade certa de água que se deve ingerir diariamente: 500 mL de água como valor fixo, mais 30 mL de água por quilo de massa corporal. Assim, uma pessoa com 57 kg deve beber 2.210 mL de água por dia.

Água, o melhor remédio. In: Correio Braziliense, 23/8/2009, p. 29 (com adaptações).

Após ler a reportagem acima, Pedro calculou que deveria ingerir, diariamente, 2.750 mL de água. Com base nessas informações, julgue o item que se segue.

Se Pedro beber $\frac{4}{11}$ da água que deve ingerir pela manhã e $\frac{2}{5}$ à tarde, então ele terá de beber 650 mL durante a noite para completar a quantidade diária recomendada.

10.(CESPE/TC-DF/2014) Em uma empresa, as férias de cada um dos 50 empregados podem ser marcadas na forma de trinta dias ininterruptos, ou os trinta dias podem ser fracionados em dois períodos de quinze dias ininterruptos ou, ainda, em três períodos de dez dias ininterruptos. Em 2013, depois de marcadas as férias de todos os 50 empregados, constatou-se que 23, 20 e 28 deles marcaram os trinta dias de férias ou parte deles para os meses de janeiro, fevereiro e junho, respectivamente. Constatou-se, também, que, nesse ano, nenhum empregado marcou férias para algum mês diferente dos mencionados.

Tendo como referência as informações acima, julgue o item que se segue.

Suponha que, em 2013, mais de 5/6 dos empregados que não marcaram férias para fevereiro eram do sexo feminino e mais de 2/3 dos que não marcaram férias para janeiro eram do sexo masculino. Nessa situação, é correto afirmar que, em 2013, havia na empresa no máximo 12 mulheres a mais que homens.

GABARITO – CEBRASPE

Frações

1. ERRADO
2. CERTO
3. CERTO
4. LETRA E
5. LETRA B
6. CERTO
7. ERRADO
8. ERRADO
9. CERTO
10. CERTO

LISTA DE QUESTÕES – CEBRASPE

Razão e proporção

1.(CESPE/ANAC/2009) Acerca de grandezas proporcionais e de juros, julgue o item a seguir.

Se, em uma aula de dança, houver 45 pessoas, entre moças e rapazes, e se a razão entre o número de moças e o número de rapazes for igual a $\frac{5}{4}$, então 8 moças ficarão sem par.

2.(CESPE/MEC/2009) Considere que uma empresa tenha contratado N pessoas para preencher vagas em 2 cargos; que o salário mensal de um dos cargos seja de R$ 2.000,00 e o do outro seja de R$ 2.800,00 e que o gasto mensal para pagar os salários dessas pessoas seja de R$ 34.000,00. A partir dessas considerações, julgue o item subsequente.

Se o gasto mensal, em reais, com os contratados para o cargo com salário mensal de R$ 2.000,00 estiver para 3, assim como o gasto mensal, em reais, com os contratados para o cargo com salário mensal de R$ 2.800,00 está para 14, então o número de contratados para estes 2 cargos será superior a 12.

3. (CESPE/PM AL/2017) Em um tanque A, há uma mistura homogênea de 240 L de gasolina e 60 L de álcool; em outro tanque B, 150 L de gasolina estão misturados homogeneamente com 50 L de álcool.

A respeito dessas misturas, julgue o item subsequente.

Para que a proporção álcool/gasolina no tanque A fique igual à do tanque B é suficiente acrescentar no tanque A uma quantidade de álcool que é inferior a 25 L.

4.(CESPE/STM/2011) Determinado órgão promoveu concurso público para provimento de vagas de um cargo de nível médio e um de nível superior. As remunerações mensais dos cargos de nível médio e de nível superior eram números diretamente proporcionais a 2 e 3; e a remuneração mensal do cargo de nível médio era R$ 3.000,00 menor que a remuneração do cargo de nível superior.

A respeito dessa situação, julgue o item que se segue.

A soma das remunerações mensais dos 2 cargos é superior a R$ 16.000,00.

5. (CESPE/STM/2011) Carlos e Paulo são funcionários de uma empresa e seus salários brutos mensais, em reais, são diretamente proporcionais aos números 3 e 5. Além disso, o salário de Paulo supera o salário de Carlos em R$ 2.640,00.

Com base nessa situação, julgue o item a seguir.

A soma dos salários de Carlos e Paulo é igual a R$ 10.560,00.

GABARITO – CEBRASPE

Razão e proporção

1. ERRADO
2. CERTO
3. CERTO
4. ERRADO
5. CERTO

LISTA DE QUESTÕES – CEBRASPE

Proporcionalidade

1.(CESPE/TRT 17/2009) Sabendo-se que velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais, é correto afirmar que aumentando-se em 25% a velocidade de digitação de um texto, o tempo necessário para se digitar esse texto fica reduzido em 20%.

2. (CESPE/IBAMA/2012) Um órgão de controle, ao aplicar sanções contra empresas petroleiras cujas atividades resultem em agressão ao meio ambiente, determina o valor da multa, em reais, de modo proporcional ao volume de petróleo derramado, em barris, ao tempo de duração do derramamento, em semanas, e à área da região afetada, em quilômetros quadrados. Assim, se determinada empresa petroleira deixar vazar, por três semanas, quatro mil barris de petróleo bruto, causando a contaminação de 950 km2 de superfície marítima, será, em decorrência disso, multada em R$ 5.000.000,00. Com base nessas informações, julgue o item seguinte.

Caso, depois de estancado um vazamento, o petróleo derramado avance por uma área correspondente a 10% da área inicialmente afetada, o valor da multa recebida pela empresa aumentará 10% em relação ao valor que seria estabelecido no momento do estanque.

Texto para as próximas questões

O valor do prêmio dos seguros de vida vendidos por determinada seguradora foi determinado de modo diretamente proporcional ao produto da idade, em anos, do segurado pela quantia, em reais, segurada, sendo a constante da proporcionalidade a mesma para todos os seguros de vida. Os valores do prêmio dos clientes são reajustados na data de seu aniversário. O prêmio mensal do seguro no valor de R$ 30.000,00 de determinado cliente, por exemplo, passou, a partir do momento que ele completou 30 anos de idade, a ser de R$ 30,00. Com base nessas informações, julgue os itens abaixo.

3.(CESPE/TJ RR/2012) O valor do prêmio mensal para um cliente de 70 anos de idade que deseje segurar a quantia de R$ 100.000,00 será superior a R$ 200,00.

4.(CESPE/TJ RR/2012) Quando o referido cliente completar 31 anos de idade, o aumento do valor do prêmio mensal de seu seguro, considerando-se a quantia de R$ 30.000,00, será superior a 5%.

5.(CESPE/TJ RR/2012) A quantia segurada por um cliente de 45 anos de idade que paga um prêmio mensal de R$ 100,00 é superior a R$ 100.000,00.

6. (CESPE/Pref. São Cristóvão/2019) Há cinco anos, João, Paulo e Miguel se associaram para montar uma lanchonete. João entrou com R$ 80.000; Paulo, com R$ 120.000; e Miguel, com R$ 200.000. A lanchonete foi vendida, hoje, por R$ 3.200.000 e essa quantia foi dividida entre os três de forma diretamente proporcional aos valores que cada um investiu.

A partir dessa situação hipotética, julgue o item a seguir.

João recebeu menos de R$ 700.000.

7.(CESPE/CAGE RS/2018) João, Pedro e Tiago, três investidores amadores, animados com a popularização das criptomoedas, investiram 12, 14 e 24 mil reais, respectivamente, em moeda virtual. Após uma semana do investimento, eles perceberam que o prejuízo acumulado, que era de 8 mil reais, deveria ser dividido entre os três, em proporção direta aos valores investidos.

Nessa situação, em caso de desistência do investimento após a constatação do prejuízo, João, Pedro e Tiago receberão, respectivamente, as quantias, em reais, de

a) 9.340, 11.340 e 21.340.

b) 10.080, 11.760 e 20.160.

c) 11.920, 13.240 e 22.840.

d) 2.660, 2.660 e 2.660.

e) 1.920, 2.240 e 3.840.

8.(CESPE/BNB/2018) No item a seguir é apresentada uma situação hipotética, seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de proporcionalidade, divisão proporcional, média e porcentagem.

Vilma, Marta e Cláudia trabalham em uma mesma agência bancária. Vilma está nesse emprego há 5 anos, Marta, há 7 anos e Cláudia, há 12 anos. Para premiar a eficiência dessas funcionárias, a direção do banco concedeu-lhes uma bonificação de R$ 12.000, que deverão ser divididos entre as três, de forma diretamente proporcional aos respectivos tempos de serviço.

Nesse caso, Vilma receberá mais de R$ 3.000 de bonificação.

9.(CESPE/IFF/2018) A quantia de R$ 360.000 deverá ser repassada às escolas A, B e C para complemento da merenda escolar. A distribuição será em partes diretamente proporcionais às quantidades de alunos de cada escola. Sabe-se que a escola A tem 20% a mais de alunos que a escola B e que a escola C tem 20% a menos de alunos que a escola B. Nesse caso, a escola A deverá receber

a) R$ 140.000.

b) R$ 144.000.

c) R$ 168.000.

d) R$ 192.000.

e) R$ 216.000.

10.(CESPE/CBM AL/2017) Um tanque contém 256 L de gasolina pura. Do tanque foram retirados 64 L de gasolina e acrescentados 64 L de álcool. Depois de homogeneizada essa mistura, foram retirados 64 L e acrescentados outros 64 L de álcool.

Com relação a esse procedimento, julgue o próximo item.

No final desse processo, se for possível separar as substâncias álcool e gasolina da mistura que está no tanque, serão encontrados mais de 140 L de gasolina pura.

11.(CESPE/TCE-SC/2016) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética relativa a proporcionalidade, porcentagem e juros, seguida de uma assertiva a ser julgada.

A participação dos vendedores nos lucros de uma empresa é diretamente proporcional às suas vendas. Os vendedores A, B e C venderam juntos R$ 500.000 em produtos: A vendeu R$ 225.000, B vendeu R$ 175.000 e C, o restante. Eles dividiram entre si, a título de participação nos lucros, o valor de R$ 10.000. Nessa situação, C recebeu R$ 2.000 de participação nos lucros.

12.(CESPE/MDIC/2014) Lúcio, Breno, Cláudia e Denise abriram a loja virtual Lik, para a qual, no ato de abertura, Lúcio contribuiu com R$ 10.000,00; Breno, com R$ 15.000,00; Cláudia, com R$ 12.000,00; e Denise, com R$ 13.000,00. Os lucros obtidos por essa loja serão distribuídos de forma diretamente proporcional à participação financeira de cada um dos sócios no ato de abertura da loja.

A partir dessas informações, julgue o item a seguir.

Se o lucro obtido ao final de determinado mês for igual a R$ 7.000,00, então a parcela de Cláudia no lucro será superior a R$ 1.700,00 nesse mês.

13.(CESPE/CGE PI/2015) Considerando que uma instituição financeira empreste a quantia de R$ 5.000,00 para ser quitada em um ano, sob taxa de juros compostos anual e capitalização semestral, julgue o item que se segue.

Se a taxa nominal de juros a ser cobrada for inversamente proporcional à quantidade de interessados e, para 800 clientes interessados, essa taxa for de 30%, então, para 1.500 clientes interessados, essa taxa de juros será de 18% ao ano.

14.(CESPE/SEDF/2017) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de juros, divisão proporcional e regra de três.

Um empresário dividiu, entre três de seus empregados, a quantia de R$ 6.600,00 em partes inversamente proporcionais a 2, 5 e 8.

Nesse caso, todos os valores nessa partilha são maiores que R$ 1.100,00.

15.(CESPE/FUB/2018) A respeito de razões, proporções e inequações, julgue o item seguinte.

Situação hipotética: Vanda, Sandra e Maura receberam R$ 7.900 do gerente do departamento onde trabalham, para ser divido entre elas, de forma inversamente proporcional a 1/6, 2/9 e 3/8, respectivamente.

Assertiva: Nessa situação, Sandra deverá receber menos de R$ 2.500.

Texto para as próximas questões

Os irmãos Jonas, Pierre e Saulo, que têm, respectivamente, 30, 20 e 18 anos de idade, herdaram de seu pai a quantia de R$ 5 milhões. O testamento prevê que essa quantia deverá ser dividida entre os irmãos em partes inversamente proporcionais às suas idades.

Nessa situação hipotética,

16.(CESPE/STM/2018) Um dos irmãos receberá metade da herança.

17. (CESPE/STM/2018) Jonas receberá 50% a mais que Saulo.

18.(CESPE/TJ PA/2020) Um servidor deve digitalizar 72.000 documentos de uma página cada. Os documentos a serem digitalizados devem ser distribuídos em 3 máquinas digitalizadoras com velocidades de digitalização diferentes. Para digitalizar a mesma quantidade de documentos, uma das máquinas menos rápidas gasta o triplo do tempo da mais rápida, enquanto a outra gasta seis vezes o tempo da máquina mais rápida.

Nessa situação, para que as três máquinas, funcionando simultaneamente, demorem o mesmo tempo para digitalizar os 72.000 documentos, devem ser colocados na máquina mais rápida

a) 8.000 documentos.

b) 16.000 documentos.

c) 24.000 documentos.

d) 32.000 documentos.

e) 48.000 documentos.

19.(CESPE/MDIC/2014) A respeito de proporções e regra de três, julgue o próximo item.

Caso toda a produção de uma fábrica seja destinada aos públicos infantil, jovem e adulto, de modo que as porcentagens da produção destinadas a cada um desses públicos sejam inversamente proporcionais, respectivamente, aos números 2, 3 e 6, então mais de 30% da produção dessa fábrica destinar-se-á ao público jovem.

20. (CESPE/FUB/2016) Diariamente, o tempo médio gasto pelos servidores de determinado departamento para executar suas tarefas é diretamente proporcional à quantidade de tarefas executadas e inversamente proporcional à sua produtividade individual diária P.

Com base nessas informações, julgue o item a seguir.

Considere que na terça-feira a quantidade de tarefas a serem executadas por um servidor correspondia a 50% a mais do que a quantidade de tarefas executadas no dia anterior. Nesse caso, para que o servidor concluísse seu trabalho da terça-feira no mesmo tempo gasto para concluí-lo na segunda-feira, a sua produtividade na terça-feira deveria aumentar em 50% em relação à produtividade da segunda-feira.

Gabarito – Cebraspe

Proporcionalidade

1. CERTO
2. CERTO
3. CERTO
4. ERRADO
5. ERRADO
6. CERTO
7. LETRA B
8. ERRADO
9. LETRA B
10. CERTO
11. CERTO
12. ERRADO
13. ERRADO
14. ERRADO
15. ERRADO
16. ERRADO
17. ERRADO
18. LETRA E
19. CERTO
20. CERTO

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.