

## **Aula 00**

*CNU - Concurso Nacional Unificado  
(Bloco 7 - Área de Dados, Tecnologia e  
Informação) Passo Estratégico de  
Estatística (Pré-Edital)*

Autor:

**Allan Maux Santana**

03 de Novembro de 2023

# Índice

1) O que é o Passo Estratégico .....	3
2) Apresentação .....	4
3) Análise CNU - Estatística .....	5
4) Introdução ao Estudo da Estatística .....	6
5) Medias de Tendência Central (Posição) .....	32
6) Variáveis Aleatórias Discretas .....	93
7) Medidas de Dispersão (Variabilidade) .....	128



## O QUE É O PASSO ESTRATÉGICO?

O Passo Estratégico é um material escrito e enxuto que possui dois objetivos principais:

- a) orientar revisões eficientes;
- b) destacar os pontos mais importantes e prováveis de serem cobrados em prova.

Assim, o Passo Estratégico pode ser utilizado tanto para **turbinar as revisões dos alunos mais adiantados nas matérias, quanto para maximizar o resultado na reta final de estudos por parte dos alunos que não conseguirão estudar todo o conteúdo do curso regular.**

Em ambas as formas de utilização, como regra, **o aluno precisa utilizar o Passo Estratégico em conjunto com um curso regular completo.**

Isso porque nossa didática é direcionada ao aluno que já possui uma base do conteúdo.

Assim, se você vai utilizar o Passo Estratégico:

- a) **como método de revisão**, você precisará de seu curso completo para realizar as leituras indicadas no próprio Passo Estratégico, em complemento ao conteúdo entregue diretamente em nossos relatórios;
- b) **como material de reta final**, você precisará de seu curso completo para buscar maiores esclarecimentos sobre alguns pontos do conteúdo que, em nosso relatório, foram eventualmente expostos utilizando uma didática mais avançada que a sua capacidade de compreensão, em razão do seu nível de conhecimento do assunto.

### Seu cantinho de estudos famoso!

Poste uma foto do seu cantinho de estudos nos stories do Instagram e nos marque:



[@passoestrategico](https://www.instagram.com/passoestrategico)

Vamos repostar sua foto no nosso perfil para que ele fique famoso entre milhares de concurseiros!



## APRESENTAÇÃO

Olá! Sou o professor **Allan Maux** e serei o seu analista do **Passo Estratégico** nas matérias de **EXATAS**.

Para que você conheça um pouco sobre mim, segue um resumo da minha **experiência profissional**, acadêmica e como concursado:



*Sou, atualmente, Auditor Fiscal do Município de Petrolina – PE, **aprovado em 2º lugar** no concurso de 2011.*

*Sou formado em **matemática** e pós-graduado em direito tributário municipal.*

*Fui, por 05 anos, **Secretário de Fazenda do Município de Petrolina**, período no qual participei da comissão que elaborou o **novo Código Tributário da Cidade, vigente até o momento**, colocando a cidade entre as maiores arrecadações do Estado de Pernambuco.*

*Lecionei, também, em cursos preparatórios para o ITA, em Recife-PE.*

*Fui aprovado e nomeado no concurso para Analista da Receita Federal, em 2012.*

*Aprovado e nomeado, em 2007, para o cargo de gestor de tributos da Secretaria da Fazenda do Estado de Minas Gerais.*

*Nossa carreira como Auditor Fiscal de Petrolina é bastante atraente e me fez refletir bastante por sua manutenção, nosso salário inicial beira aos 18k e, final de carreira, passa dos 35k, basicamente, esse salário me fez refletir por aposentar as chuteiras como concursado e permanecer no meu Pernambuco.*

*Atualmente, também, leciono matemática para concursos e vestibulares, presencialmente e com aulas em vídeo.*

Estou extremamente feliz de ter a oportunidade de trabalhar na equipe do “Passo”, porque tenho convicção de que nossos relatórios e simulados proporcionarão uma preparação diferenciada aos nossos alunos!

Bem, vamos ao que interessa!!

**Prof. Allan Maux**



## ANÁLISE ESTATÍSTICA

Inicialmente, convém destacar os percentuais de incidência de todos os assuntos previstos em nosso curso – quanto maior o percentual de incidência de um determinado assunto, maior será sua importância para nosso certame.

Nossa análise será executada em concursos realizados de **2019 a 2023** de **Estatística** das principais bancas.

<i>- % de cobrança em provas anteriores</i>	
<i>ESTATÍSTICA DESCRITIVA</i>	<i>38,48%</i>
<i>PROBABILIDADE</i>	<i>23,43%</i>
<i>ESTIMAÇÃO PONTUAL E INTERVALAR / TESTES DE HIPÓTESES</i>	<i>18,10%</i>
<i>REGRESSÃO LINEAR</i>	<i>16,19%</i>
<i>DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE</i>	<i>3,81%</i>
<i>TOTAL</i>	<i>100%</i>

Vocês perceberão que nos cursos de exatas os perfis das questões das bancas são muito idênticos, portanto, treinem exaustivamente principalmente aquele assunto que possui uma maior incidência em nossa análise e que você tenha mais dificuldade.



[@estrategiaconcursos](#)

[@passoestrategico](#)

[@profallanmaux](#)



# CONCEITOS INICIAIS

## Sumário

<i>O que é mais cobrado dentro do assunto.....</i>	<i>2</i>
<i>Roteiro de revisão e pontos do assunto que merecem destaque .....</i>	<i>2</i>
<i>Conceitos Iniciais .....</i>	<i>2</i>
<i>Dados Estatísticos.....</i>	<i>3</i>
<i>Variáveis Estatísticas .....</i>	<i>4</i>
<i>Distribuições de Frequências.....</i>	<i>6</i>
<i>Representações Gráficas de Dados.....</i>	<i>8</i>
<i>Aposta Estratégica .....</i>	<i>11</i>
<i>Questões estratégicas.....</i>	<i>12</i>
<i>Questões FGV.....</i>	<i>12</i>
<i>Questões CEBRASPE.....</i>	<i>15</i>
<i>Questões FCC.....</i>	<i>20</i>
<i>Lista de Questões Estratégicas .....</i>	<i>21</i>
<i>Questões FGV.....</i>	<i>21</i>
<i>Questões CEBRASPE.....</i>	<i>22</i>
<i>Questões FCC.....</i>	<i>25</i>
<i>Gabarito.....</i>	<i>25</i>



## O que é mais cobrado dentro do assunto

Vamos analisar agora como se comporta a incidência dos sub assuntos da nossa aula de hoje. Assim, você será melhor direcionado nos seus estudos, vejam:

INTRODUÇÃO À ESTATÍSTICA / GRÁFICOS / DIAGRAMAS / TABELAS / VARIÁVEIS DISCRETAS E CONTÍNUAS	Grau de incidência
FORMAS DE APRESENTAÇÃO DE DADOS	75,0%
TIPOS DE VARIÁVEIS	16,5%
CONCEITOS INICIAIS DE ESTATÍSTICA	8,5%
<b>TOTAL</b>	<b>100,00%</b>

## ROTEIRO DE REVISÃO E PONTOS DO ASSUNTO QUE MERECEM DESTAQUE

A ideia desta seção é apresentar um roteiro para que você realize uma revisão completa do assunto e, ao mesmo tempo, destacar aspectos do conteúdo que merecem atenção.

Para revisar e ficar bem preparado no assunto, você precisa, basicamente, seguir os passos a seguir:

### Conceitos Iniciais

Vamos, de imediato, ao conceito de Estatística:

Basicamente, a Estatística tem por finalidade a **Tomada de Decisões**, acerca de um processo ou população, baseadas em interpretações de dados de uma amostra da população.

Podemos assim dividir a Estatística:

CONCEITOS BÁSICOS	
<u>Estatística Descritiva</u> <u>Básica</u> <u>(Dedutiva)</u>	<u>Estatística Inferencial Avançada</u> <u>(Indutiva)</u>



Descreve e Resume os dados, através da média, moda, mediana, variância, etc – são as primeiras etapas do processo estatístico, aqui <b>não</b> são tomadas as decisões.	Estuda processos para a partir de dados de uma amostra, <b>inferir (concluir)</b> algo de uma população, objetivando a tomada de decisões, sendo a parte final do processo estatístico.
---	---

Ainda, temos a **Estatística Probabilística** que consiste, basicamente, na aplicação da Teoria da Probabilidade.

Seu principal objetivo é o de calcular a chance de determinado Evento acontecer. Vamos conhecer alguns elementos do estudo da Estatística:

<b>CONCEITOS BÁSICOS</b>		
<b>POPULAÇÃO</b>	<b>CENSO</b>	<b>AMOSTRA</b>
Conjunto de todos os elementos	Contagem de toda a População	Subconjunto não vazio da População

## **Dados Estatísticos**

Vamos logo esquematizar esse conceito e sua classificação:

<b>Dados Estatísticos – Conceito:</b> <b>(Observações/Características obtidas através de uma pesquisa)</b>		
<b>Univariado</b>	<b>Bivariado</b>	<b>Multivariado</b>
Apenas uma característica do objeto	Dois características...	Mais de duas características...

Os dados estatísticos, quando do momento de sua coleta, se apresentam de forma **desorganizada**, por isso recebem o nome de **DADOS BRUTOS**.

Já a **organização** desses dados brutos em ordem, crescente ou decrescente, recebe o nome de **ROL**.

Suponha uma pesquisa com 11 concurreseiros a respeito da quantidade de dias que cada um estuda por semana. Seguem as respostas:

1, 3, 5, 2, 1, 6, 3, 4, 5, 7, 7



Obviamente, a forma como os dados estão dispostos não demonstra qualquer tipo de organização, sendo chamados de **DADOS BRUTOS**.

Ao reescrever os dados em ordem, crecente ou decrecente, passaremos a ter um **ROL**:

1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7

A diferença entre o maior valor (7) e o menor (1) é chamada de **AMPLITUDE (6)**.

## **Variáveis Estatísticas**

Dentre os tópicos relacionados a essa parte inicial do nosso estudo, saber classificar as variáveis estatísticas é um do mais cobrados.

Mas, Allan, o que seria uma **variável estatística**?

**Variável Estatística** é justamente o objeto de nosso estudo. É aquilo que estamos pesquisando. O levantamento estatístico é justamente focado nas variáveis pesquisadas. No nosso exemplo, seria a quantidade de dias da semana que o concurseiro estuda.

<b>VARIÁVEIS</b>	
<b><u>Quantitativas</u></b>	<b><u>Qualitativas</u></b>
Está relacionada a uma informação <b><u>Numérica</u></b> <b><u>(Quanto?)</u></b> Ex.: a idade de um grupo de pessoas	Está relacionada a um <b><u>Atributo</u></b> <b><u>(Qual?)</u></b> Ex.: o grau de instrução desse grupo

Acredito não haver dificuldades quanto à classificação entre **Variáveis Quantitativas** e **Qualitativas**, confere?

Se a resposta à pesquisa for um **número**, logo a variável será **quantitativa**, caso seja um **atributo** (qualidade), será **qualitativa**.

No entanto, temos ainda mais algumas classificações que fogem um pouco dessas tão triviais, mas nada de muito difícil, vejam?

Se, no momento de uma pesquisa, você tiver que responder a essas duas perguntas:

1. Quanto filhos você tem?
2. Qual a sua altura?



Podemos classificá-las como **Variáveis Quantitativas**, ok?

Comparando-as, percebemos que existe uma simples, porém importante diferença entre as duas. Ainda não perceberam?

1. Quanto filhos você tem? (Aqui você faz uma **contagem**)
2. Qual a sua altura? (Nessa você faz uma **medição**)

<b>Quantitativas</b>	
<b>Discretas</b>	<b>Contínua</b>
Contagem	Medição

Uma outra forma de entender essa diferença é na forma de se encontrar o resultado. Quando a gente conta, temos um limite de possíveis resultados dentro de um intervalo, certo? Não dá para você responder à pesquisa dizendo que 2,38 filhos, dá? Já em relação à altura, podemos dizer sim que temos 1,735m, ok?

Então, ainda podemos assim diferenciá-las:

<b>Quantitativas</b>	
<b>Discretas</b>	<b>Contínua</b>
Valores <b>restritos</b> dentro de um intervalo de possíveis resultados	Valores <b>irrestritos</b> dentro de um intervalo de possíveis resultados

E se as perguntas fossem essas?

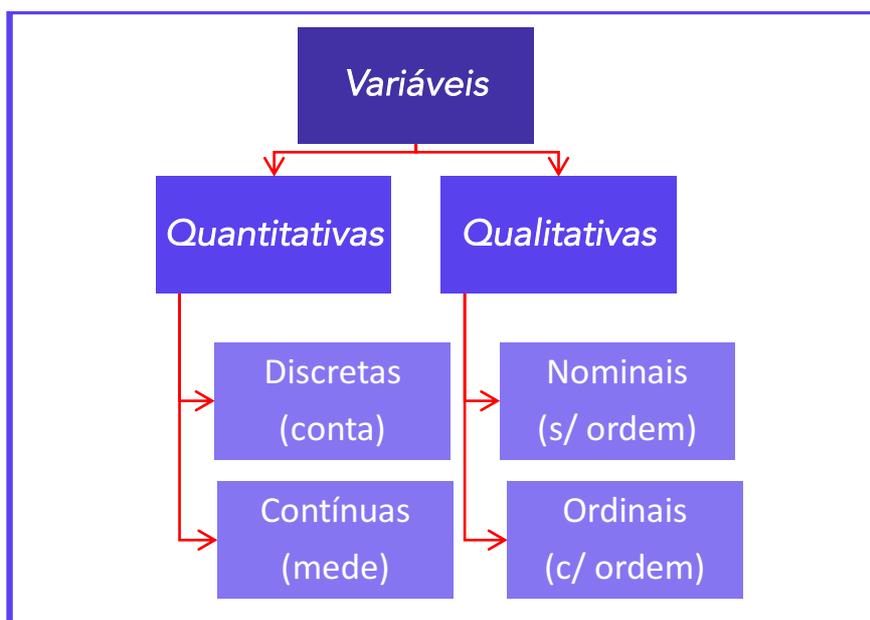
1. Qual o bairro que você mora?
2. Qual seu grau de instrução? (Fundamental, médio, superior, pós-graduação)

Facilmente, vemos que estamos diante de **Variáveis Qualitativas**, certo? A primeira é chamada de **nominais**, já a segunda de **ordinais**, visto que a gente pode organizá-las (ordená-las) de maneira hierárquica.

<b>Qualitativas</b>	
<b>Nominais</b>	<b>Ordinais</b>
Não há hierarquia	Há hierarquia (ordem)

Resumindo:





Guardem esse esquema, ele lhe ajudará com umas algumas questões teóricas.

## Distribuições de Frequências

Vamos voltar ao nosso exemplo do início da aula.

Suponha uma pesquisa com 11 concurreis a respeito da quantidade de dias que cada um estuda por semana. Seguem as respostas:

Ao reescrever os dados em ordem, crecente ou decrecente, passaremos a ter um ROL:

1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7

Podemos organizar esses valores da seguinte forma:

<u>QUANT.</u> <u>DIAS/SEMANA</u>	<u>FREQUÊNCIA</u>
<u>1</u>	2
<u>2</u>	1
<u>3</u>	2
<u>4</u>	1
<u>5</u>	2
<u>6</u>	1
<u>7</u>	2
<b>TOTAL</b>	<b>11</b>



Essa **Tabela** é conhecida como **Distribuição** de **Frequência de Dado não-agrupados**.

**Frequência** nada mais é do que a quantidade de vezes que cada valor de uma variável aparece num levantamento de dados. Fácil demais...

Vejam que falamos em **dados não-agrupados**, pois os valores que estão na tabela são **individuais**. E se a pesquisa fosse feita sobre a idade de 50 pessoas, vocês acham que essa tabela poderia ser individualizada? Ou seria mais eficiente apresentá-la através de um grupo de intervalos?

<u>IDADES</u>	<u>FREQUÊNCIA ABSOLUTA (fi)</u>	<u>FREQUÊNCIA RELATIVA (Fi)</u>
<u>0 ┆ 10</u>	12	24%
<u>10 ┆ 20</u>	5	10%
<u>20 ┆ 30</u>	13	26%
<u>30 ┆ 40</u>	5	10%
<u>40 ┆ 50</u>	6	12%
<u>50 ┆ 60</u>	9	18%
<b>TOTAL</b>	<b>50</b>	<b>100%</b>

Percebam que aqui os dados foram agrupados de acordo com a faixa com cada faixa etária.

0 ┆ 10 : Nessa representação, chamada de **classe**, o 0 (zero é incluído), já o 10 é excluído do intervalo.

No exemplo, temos um total de **06 classes**.

A **Amplitude** de cada intervalo de classe é a diferença entre o Limite Superior e o Inferior, que nosso caso será de:  $(10 - 0) = 10$

$$h = \text{Amplitude de Classe} = L_{\text{superior}} - L_{\text{inferior}}$$

Para determinarmos o **Ponto Médio (PM)** de cada Classe, basta calcularmos a média aritmética simples entre os limites de cada classe. Vejam:

<u>IDADES</u>	<u>PONTO MÉDIO (PM)</u>
<u>0 ┆ 10</u>	<u>5</u> = $(0 + 10)/2$
<u>10 ┆ 20</u>	<u>15</u> = $(10 + 20)/2$
<u>20 ┆ 30</u>	<u>25</u> = $(20 + 30)/2$



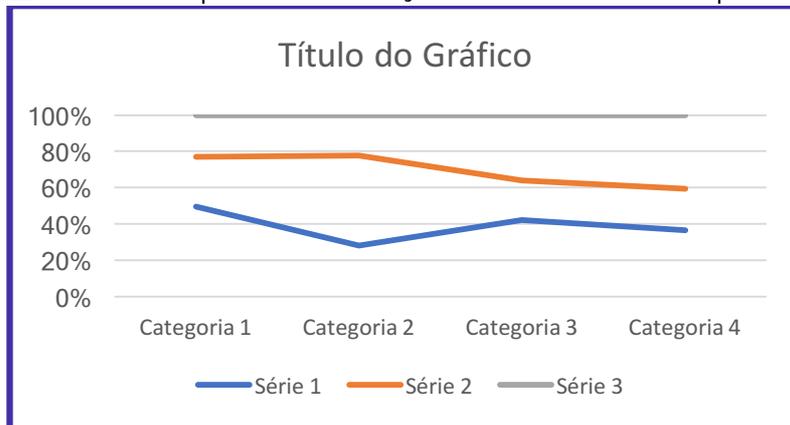
<u>30</u> † <u>40</u>	<u>35</u> = (30 + 40)/2
<u>40</u> † <u>50</u>	<u>45</u> = (40 + 50)/2
<u>50</u> † <u>60</u>	<u>55</u> = (50 + 60)/2

Já a **Amplitude Total** é a diferença entre o Limite Superior da última classe e o Limite Inferior da primeira classe, sendo o tamanho de todo o conjunto a ser observado.

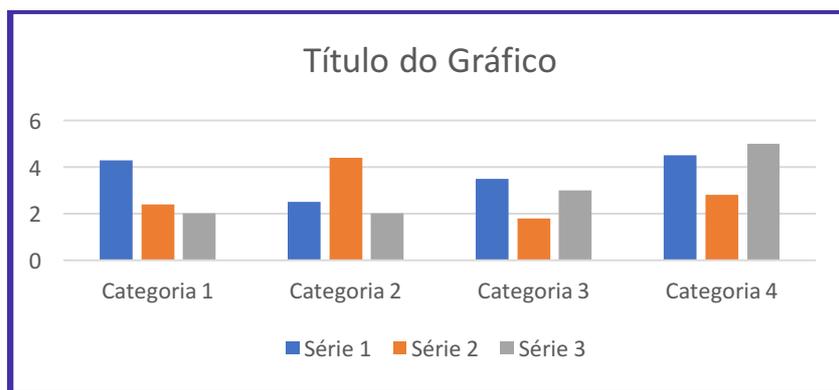
## Representações Gráficas de Dados

Aqui vamos estudar os famosos gráficos. Precisaremos diferenciar cada tipo de gráfico, meus amigos, por nome, uso e finalidade e, também, saber interpretá-los.

**GRÁFICO EM LINHAS:** Séries Temporais – evolução de valores com o passar de tempo:

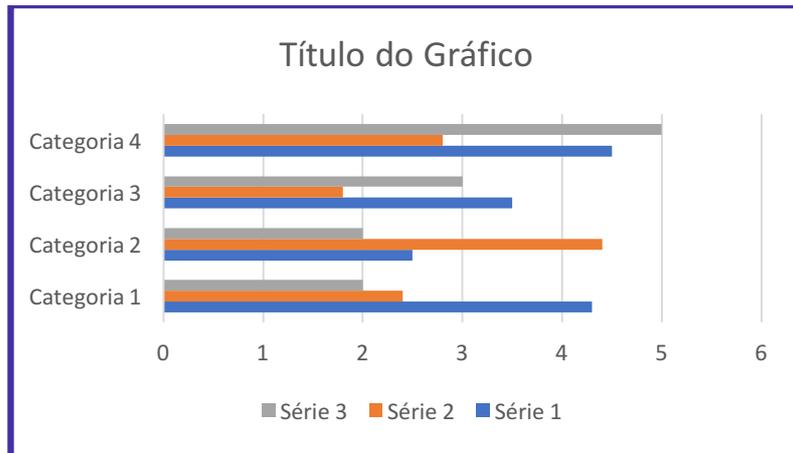


**GRÁFICO DE COLUNAS:** Séries Estatísticas.

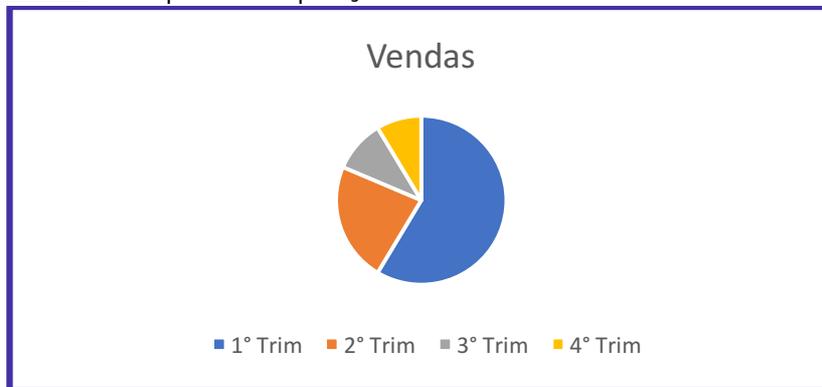


**GRÁFICO DE BARRAS:** Séries Estatísticas.

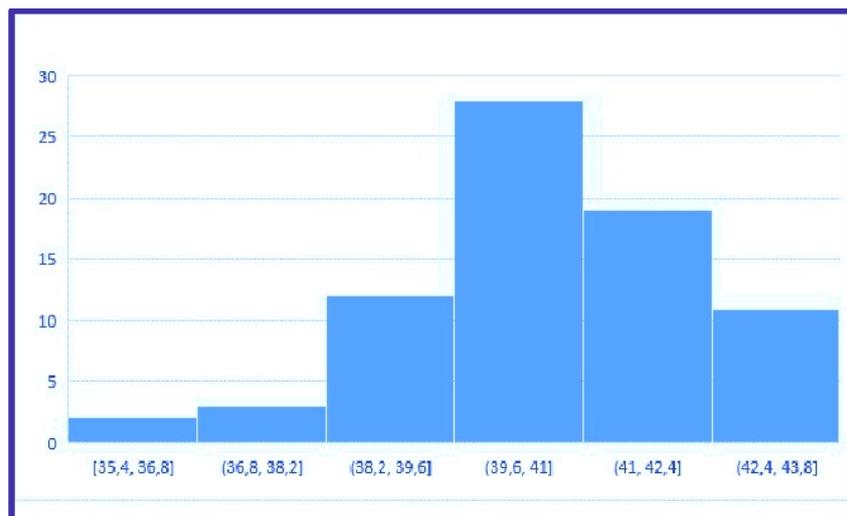




**GRÁFICOS DE SETORES:** Comparar Proporções.



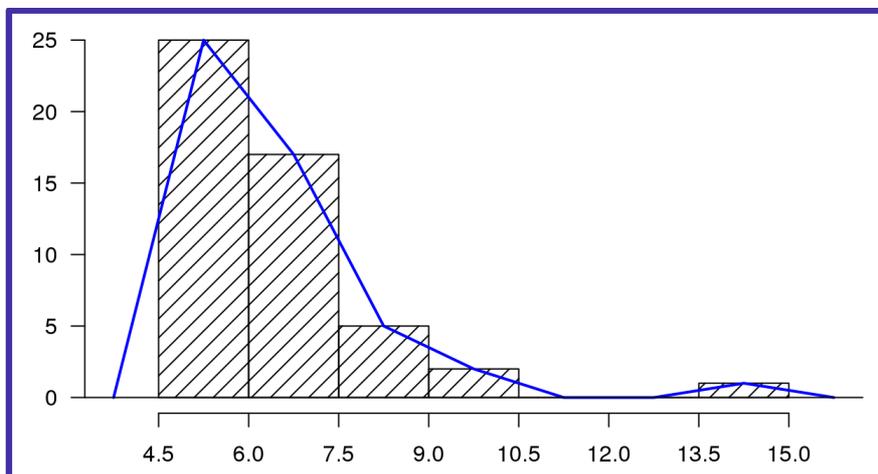
**HISTOGRAMA:** Utilizado em Dados Agrupados – Distribuição de Frequência em Classes.



O histograma é bem parecido com o gráfico de colunas, porém reparem que no histograma não existem espaço entre as colunas.



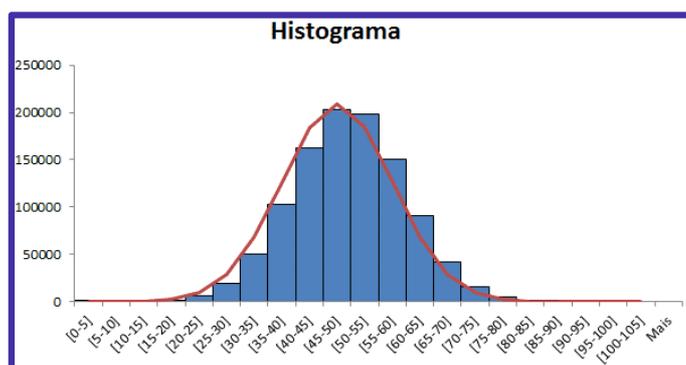
**POLÍGONO DE FREQUÊNCIAS:** Obtido através da união dos pontos médios das bases superiores das colunas do Histograma.



**CURVA DE FREQUÊNCIAS:** obtida a partir do *Polígono de Frequências* – Polígono de Frequência *Polido*.

POLÍGONO DE FREQUÊNCIA	CURVA DE FREQUÊNCIA
<i>Imagem real</i>	<i>Imagem tendenciosa</i>

Basicamente o que é feito é a eliminação dos vértices do Polígono de Frequência. Vejam como ficaria:



A linha vermelha seria justamente nossa *curva de frequência* simétrica.

Porem, podemos ter uma *assimetria* à esquerda conforme *gráfico 1*, ou à direita *gráfico 2*.

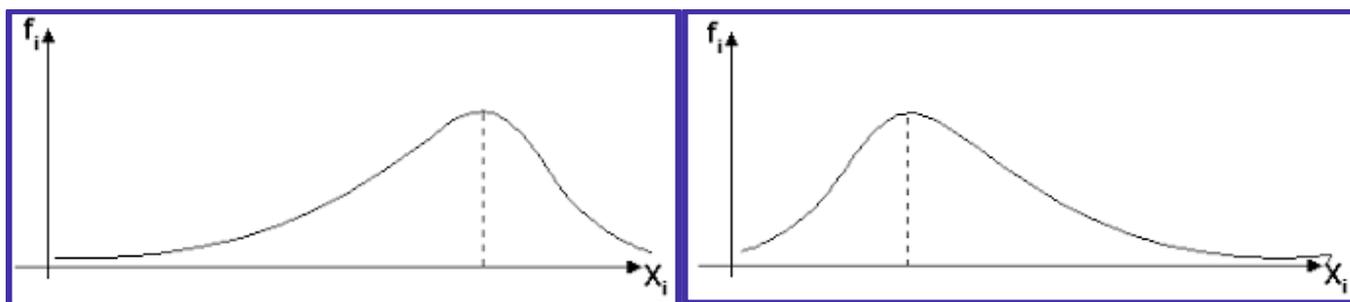
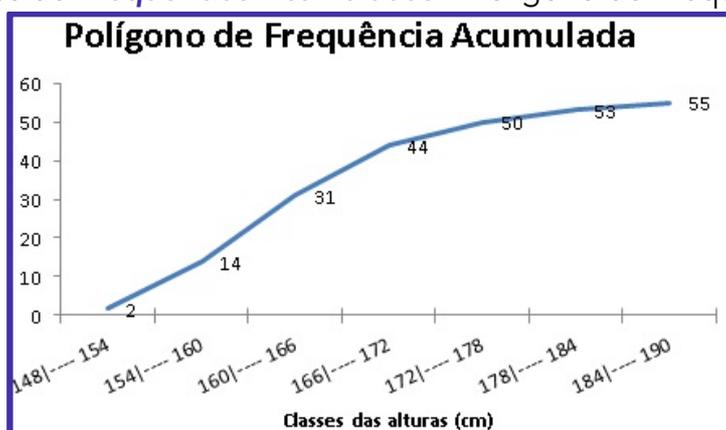


Gráfico 1

Gráfico 2

$$\text{Frequência Polida} = \frac{f_{\text{anterior}} + 2 f_{\text{classe considerada}} + f_{\text{posterior}}}{4}$$

**OGIVAS:** Obtido através de **Frequências Acumuladas** – Polígono de Frequência Acumulada.



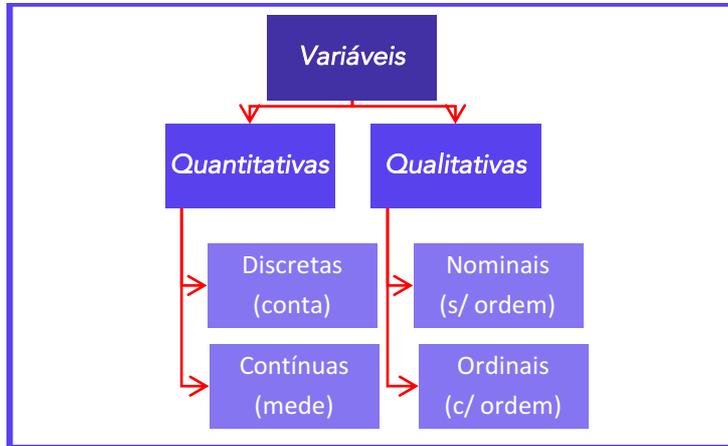
## APOSTA ESTRATÉGICA

A ideia desta seção é apresentar os pontos do conteúdo que mais possuem chances de serem cobrados em prova, considerando o histórico de questões da banca em provas de nível semelhante à nossa, bem como as inovações no conteúdo, na legislação e nos entendimentos doutrinários e jurisprudenciais<sup>1</sup>.

Pessoal, nossa Aposta Estratégica, obviamente, não poderia deixar de ser outra:

<sup>1</sup> Vale deixar claro que nem sempre será possível realizar uma aposta estratégica para um determinado assunto, considerando que às vezes não é viável identificar os pontos mais prováveis de serem cobrados a partir de critérios objetivos ou minimamente razoáveis.

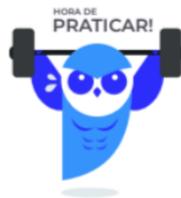
### Classificação das Variáveis



## QUESTÕES ESTRATÉGICAS

Nesta seção, apresentamos e comentamos uma amostra de questões objetivas selecionadas estrategicamente: são questões com nível de dificuldade semelhante ao que você deve esperar para a sua prova e que, em conjunto, abordam os principais pontos do assunto.

A ideia, aqui, não é que você fixe o conteúdo por meio de uma bateria extensa de questões, mas que você faça uma boa revisão global do assunto a partir de, relativamente, poucas questões.



### Questões FGV

#### Q.01 (FGV / COMPESA/ 2018)

A COMPESA, em uma pesquisa de satisfação dos usuários, preparou um formulário para traçar os perfis de seus clientes e o grau de satisfação com os serviços da empresa, Em um formulário, ela solicitou os dados a seguir.

I. Idade.

II. Grau de escolaridade.

III. Faixa de renda familiar.

IV. Nota dada ao serviço.

Assinale a opção que contempla apenas variáveis categóricas.

- a) I e II.
- b) II e III.
- c) III e IV.
- d) I, II e III.
- e) I, II e IV.

**Comentários:**

I – Idade: Variável Quantitativa

II - Grau de Escolaridade: **Variável Qualitativa – Categórica**

III – Faixa de Renda Familiar (classe baixa, classe média, classe alta): **Variável Qualitativa**

IV – Nota dada ao Serviço: Variável Quantitativa

**Gabarito: B**

**Q. 02 (FGV/Auditor (ALBA) / Auditoria/2014)**

Observe a tabela de frequências a seguir, que se refere aos saldos em conta, num determinado dia, de duzentas contas-correntes:

Saldos em conta (R\$)	Frequência
Até 100,00	8
De mais de 100,00 a 300,00	28
De mais de 300,00 a 500,00	46
De mais de 500,00 a 700,00	54
De mais de 700,00 a 900,00	44
De mais de 900,00 a 1.100,00	13
De mais de 1.100,00 a 1.300,00	6
Acima de 1.300,00	1

A frequência relativa acumulada de saldos em R\$ 900,00 é igual a

- a) 22%.
- b) 36%.
- c) 54%.



d) 90%.

e) 97%.

**Comentários:**

Nessa questão temos apenas que encontrar a frequência relativa acumulada de saldos em R\$ 900,00. Além disso, é dito que temos 200 contas-corretes. Podemos fazer isso de duas formas.

**Primeira forma:** encontrar a frequência relativa de cada classe e depois fazer a acumulação até R\$ 900,00. Para tanto, basta dividir cada frequência absoluta por 200 e depois multiplicar por 100%.

Saldos em conta (R\$)	Frequência	Frequência Relativa	Freq. Relativa Acum.
Até 100,00	8	$\frac{8}{200} \cdot 100\% = 4\%$	4%
De mais de 100,00 a 300,00	28	$\frac{28}{200} \cdot 100\% = 14\%$	18%
De mais de 300,00 a 500,00	46	$\frac{46}{200} \cdot 100\% = 23\%$	41%
De mais de 500,00 a 700,00	54	$\frac{54}{200} \cdot 100\% = 27\%$	68%
<b>De mais de 700,00 a 900,00</b>	<b>44</b>	<b><math>\frac{44}{200} \cdot 100\% = 22\%</math></b>	<b>90%</b>
De mais de 900,00 a 1.100,00	13	$\frac{13}{200} \cdot 100\% = 6,5\%$	96,5%
De mais de 1.100,00 a 1.300,00	6	$\frac{6}{200} \cdot 100\% = 3\%$	99,5%
Acima de 1.300,00	1	$\frac{1}{200} \cdot 100\% = 0,5\%$	100%

Vejam que até a acumulação de R\$ 900,00 temos 90%. Portanto, letra "D" a resposta.

**Segunda forma:** encontrar a frequência absoluta acumulada.

Saldos em conta (R\$)	Frequência	Freq. Abs. Acum
Até 100,00	8	8
De mais de 100,00 a 300,00	28	36
De mais de 300,00 a 500,00	46	82
De mais de 500,00 a 700,00	54	136
<b>De mais de 700,00 a 900,00</b>	<b>44</b>	<b>180</b>
De mais de 900,00 a 1.100,00	13	193
De mais de 1.100,00 a 1.300,00	6	199
Acima de 1.300,00	1	200



Vejam que até a acumulação de R\$ 900,00 temos um acumulado de 180.

Para encontrar a frequência acumulada correspondente, basta dividir por 200 e depois multiplicar por 100%.

$$\frac{180}{200} \cdot 100\% = 90\%$$

Portanto, letra "D" a resposta.

**Gabarito: D**

## Questões CEBRASPE

### Q.03 (CESPE - CEBRASPE / DEPEN / 2015)

*O diretor de um sistema penitenciário, com o propósito de estimar o percentual de detentos que possuem filhos, entregou a um analista um cadastro com os nomes de 500 detentos da instituição para que esse profissional realizasse entrevistas com os indivíduos selecionados.*

*A partir dessa situação hipotética e dos múltiplos aspectos a ela relacionados, julgue o item seguinte, referente a técnicas de amostragem.*

*A diferença entre um censo e uma amostra consiste no fato de esta última exigir a realização de um número maior de entrevistas.*

**C - Certo.**

**E - Errado.**

**Comentários:**

CONCEITOS BÁSICOS	
<u>CENSO</u>	<u>AMOSTRA</u>
Contagem de toda a População	Subconjunto não vazio da População

Percebam que o examinador inverteu os conceitos, logo, o correto seria:

*A diferença entre uma **amostra** e um **censo** consiste no fato de esta última exigir a realização de um número maior de entrevistas.*

**Gabarito: Errado**

### Q.04 (CESPE - CEBRASPE / Agência Nacional de Saúde Suplementar/ 2005)

*A identificação do tipo de variável é um requisito importante para a escolha do teste estatístico mais adequado. Acerca das variáveis, julgue o seguinte item.*



O tipo de sangue, a cor dos olhos e o número de filhos de famílias de baixa renda são todas variáveis qualitativas.

C - Certo.

E - Errado.

**Comentários:**

Tipo de Sangue e Cor dos Olhos são **variáveis qualitativas**.

Número de filhos é uma **variável quantitativa discreta**.

**Gabarito: Errado**

**Q.05 (CESPE - CEBRASPE / Banco da Amazônia S.A. / 2006)**

Na estatística, as medidas descrevem fenômenos em termos que podem ser analisados de forma objetiva. Acerca desse assunto, julgue o seguinte item.

O número de filhos é uma variável categórica ordinal, pois pode ser quantificada.

C - Certo.

E - Errado.

**Comentários:**

O número de filhos é uma variável **quantitativa discreta**.

**Gabarito: Errado**

**Q.06 (CESPE - CEBRASPE / Agência Nacional de Saúde Suplementar/ 2005)**

A identificação do tipo de variável é um requisito importante para a escolha do teste estatístico mais adequado. Acerca das variáveis, julgue o seguinte item.

Os valores das variáveis quantitativas discretas não podem ser contados, mas apenas mensurados.

C - Certo.

E - Errado.

**Comentários:**

Os valores das variáveis quantitativas discretas podem ser contados.

**Gabarito: Errado**

**Q.07 (CESPE - CEBRASPE / Agência Nacional de Saúde Suplementar/ 2005)**

A identificação do tipo de variável é um requisito importante para a escolha do teste estatístico mais adequado. Acerca das variáveis, julgue o seguinte item.

O peso de crianças é considerado uma variável quantitativa contínua.

C - Certo.

E - Errado.

**Comentários:**



Dentro de um intervalo de dados, o peso de uma criança pode assumir qualquer valor. Além disso, vimos que as variáveis que são medidas são as **quantitativas contínuas**. Logo, nosso enunciado está corretíssimo.

**Gabarito: Correto**

**Q.08 (CESPE - CEBRASPE / Polícia Federal / 2005)**

*Um projeto de serviços de assistência social foi desenvolvido para ser implementado em todas as delegacias e plantões policiais de um estado brasileiro. Porém, antes da sua aplicação em todo o estado, ele foi implementado em 10 municípios, em caráter experimental, por 12 meses. Esses municípios foram escolhidos aleatoriamente entre os 250 municípios do estado. Nesse período experimental, foram registradas 48.000 ocorrências nos 10 municípios selecionados. Em 25% dessas ocorrências, as pessoas envolvidas foram encaminhadas aos assistentes sociais. A partir dessas ocorrências, os 100 assistentes sociais envolvidos nesse projeto atenderam, em média, 500 pessoas por mês. Os resultados obtidos foram positivos, observando-se uma queda na reincidência de denúncias e ocorrências registradas nesses municípios após a implementação do projeto.*

*A partir dos dados apresentados no texto acima, julgue o item subsequente.*

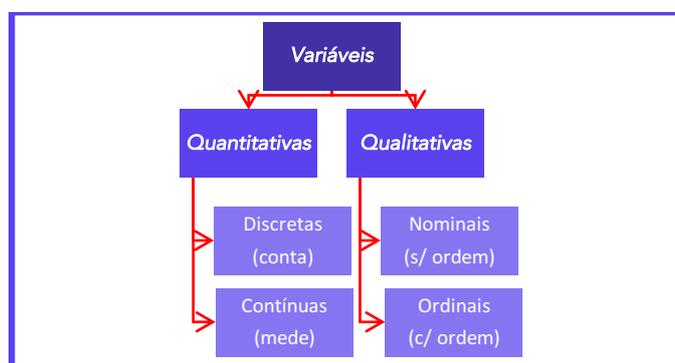
*O número de ocorrências registradas durante o período experimental de 12 meses nos 10 municípios selecionados (48.000) é a realização de uma variável aleatória contínua.*

**C - Certo.**

**E - Errado.**

**Comentários:**

Vejam que estamos querendo classificar o número de ocorrência registradas. Vamos dar uma breve lembrada:



A quantidade de ocorrências é medida ou contada?

Concordam comigo que ela é contada? Logo, temos uma **Variável Discreta**.

**Gabarito: Errado**

**Q.09 (CESPE - CEBRASPE / Agência Nacional de Saúde Complementar / 2005)**

*A identificação do tipo de variável é um requisito importante para a escolha do teste estatístico mais adequado. Acerca das variáveis, julgue o seguinte item.*

*O peso de crianças é considerado uma variável quantitativa contínua.*

**C - Certo.**

**E - Errado.**

**Comentários:**

Aquilo que pode ser medido é considerada uma Variável Quantitativa Contínua.

**Gabarito: Correto**

**Q.10 (CESPE – CEBRASPE / Instituto Jones dos Santos Neves - ES / 2010)**

quantidade X de processos analisados por servidor	frequência
1	6
2	9
3	10
4	3
5	2
total de servidores	30

*Considerando que a tabela acima mostra a distribuição de frequências da quantidade X de processos que cada servidor de certo órgão público analisou em determinada semana, julgue o item a seguir.*

*A variável X é quantitativa discreta.*

**C - Certo.**

**E - Errado.**

**Comentários:**

Perfeitamente correta nossa assertiva. Visto que "x" representa a quantidade de processos, logo podemos contá-los.

**Gabarito: Correto**

**Q.11 (CESPE – CEBRASPE / BACEN / 2013)**

**2 4 8 4 8 1 2 32 12 1 5 7 5 5 3 4 24 19 4 14**

*Os dados mostrados acima representam uma amostra, em minutos, do tempo utilizado na armazenagem de formulários no almoxarifado central de certa instituição por diversos funcionários. Com base nesses dados, julgue o próximo item.*



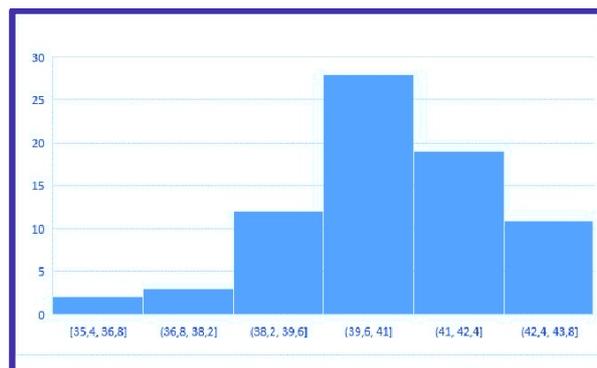
É inviável a elaboração de um histograma em decorrência do fato de ser este um conjunto de dados quantitativos discretos; dessa forma, apenas por meio de um gráfico de barras pode ser realizada a representação gráfica.

C - Certo.

E - Errado.

Comentários:

**HISTOGRAMA:** Utilizado em Dados Agrupados – Distribuição de Frequência em Classes.



Podemos muito bem agrupar os dados da questão, ok? O histograma é utilizado para indicar a frequência que certo dado aparece.

Gabarito: Errado

### Q.12 (CESPE – CEBRASPE / BACEN / 2013)

número diário de denúncias registradas (X)	frequência relativa
0	0,3
1	0,1
2	0,2
3	0,1
4	0,3
<b>total</b>	<b>1,0</b>

A tabela precedente apresenta a distribuição de frequências relativas da variável X, que representa o número diário de denúncias registradas na ouvidoria de determinada instituição pública. A partir das informações dessa tabela, julgue o item seguinte.

A variável X é do tipo qualitativo nominal.

C - Certo.

E - Errado.

Comentários:

A variável "X" representa o número (quantidade) de denúncias registradas, logo temos uma **Variável Quantitativa Discreta**.

**Gabarito: Errado**

## Questões FCC

Q.13 (FCC / Defensoria Pública do Estado de SP/ 2009)

Sobre estatística aplicada, é correto o que se afirma em:

- a) **Parâmetros são medidas características de grupos, determinadas por meio de uma amostra aleatória.**
- b) **A estatística descritiva é a técnica pela qual são coletados dados de uma amostra, a partir dos quais são tomadas decisões sobre uma determinada população.**
- c) **A caracterização de uma população se dá por meio da observação de todos os seus componentes que a integram.**
- d) **A estatística inferencial compreende um conjunto de técnicas destinadas à síntese de dados numéricos.**
- e) **Censo é o processo utilizado para se medir as características de todos os membros de uma dada população.**

**Comentários**

**Alternativa A: Errada**

Parâmetros são valores **fixos**. Portanto, não variam como as variáveis aleatórias. Ainda mais, eles são determinados pela população.

**Alternativa B: Errada**

CONCEITOS BÁSICOS	
<u>Estatística Descritiva</u>	<u>Estatística Inferencial</u>
Descreve os dados, através da média, moda, mediana, variância, etc	Estuda processos para a partir de dados de uma amostra, inferir (concluir) algo de uma população

**Alternativa C: Errada**

Uma população é caracterizada por meio de **medidas** de **posição** e de **dispersão**.

**Alternativa D: Errada**

Conforme tabela da Alternativa "B".

**Alternativa E: Certa**



A Alternativa "E" traduz perfeitamente o conceito de Censo.

**Gabarito: E**

Prof. Allan Maux

## LISTA DE QUESTÕES ESTRATÉGICAS

### Questões FGV

#### Q.01 (FGV / COMPESA/ 2018)

A COMPESA, em uma pesquisa de satisfação dos usuários, preparou um formulário para traçar os perfis de seus clientes e o grau de satisfação com os serviços da empresa, Em um formulário, ela solicitou os dados a seguir.

I. Idade.

II. Grau de escolaridade.

III. Faixa de renda familiar.

IV. Nota dada ao serviço.

Assinale a opção que contempla apenas variáveis categóricas.

- a) I e II.
- b) II e III.
- c) III e IV.
- d) I, II e III.
- e) I, II e IV.

#### Q. 02 (FGV/Auditor (ALBA)/Auditoria/2014)

Observe a tabela de frequências a seguir, que se refere aos saldos em conta, num determinado dia, de duzentas contas-correntes:

Saldos em conta (R\$)	Frequência
Até 100,00	8
De mais de 100,00 a 300,00	28
De mais de 300,00 a 500,00	46
De mais de 500,00 a 700,00	54
De mais de 700,00 a 900,00	44
De mais de 900,00 a 1.100,00	13
De mais de 1.100,00 a 1.300,00	6



Acima de 1.300,00	1
-------------------	---

A frequência relativa acumulada de saldos em R\$ 900,00 é igual a

- a) 22%.
- b) 36%.
- c) 54%.
- d) 90%.
- e) 97%.

## Questões CEBRASPE

### Q.03 (CESPE - CEBRASPE / DEPEN / 2015)

O diretor de um sistema penitenciário, com o propósito de estimar o percentual de detentos que possuem filhos, entregou a um analista um cadastro com os nomes de 500 detentos da instituição para que esse profissional realizasse entrevistas com os indivíduos selecionados.

A partir dessa situação hipotética e dos múltiplos aspectos a ela relacionados, julgue o item seguinte, referente a técnicas de amostragem.

A diferença entre um censo e uma amostra consiste no fato de esta última exigir a realização de um número maior de entrevistas.

C - Certo.

E - Errado.

### Q.04 (CESPE - CEBRASPE / Agência Nacional de Saúde Suplementar/ 2005)

A identificação do tipo de variável é um requisito importante para a escolha do teste estatístico mais adequado. Acerca das variáveis, julgue o seguinte item.

O tipo de sangue, a cor dos olhos e o número de filhos de famílias de baixa renda são todas variáveis qualitativas.

C - Certo.

E - Errado.

### Q.05 (CESPE - CEBRASPE / Banco da Amazônia S.A. / 2006)

Na estatística, as medidas descrevem fenômenos em termos que podem ser analisados de forma objetiva. Acerca desse assunto, julgue o seguinte item.

O número de filhos é uma variável categórica ordinal, pois pode ser quantificada.

C - Certo.

E - Errado.



**Q.06 (CESPE - CEBRASPE / Agência Nacional de Saúde Suplementar/ 2005)**

*A identificação do tipo de variável é um requisito importante para a escolha do teste estatístico mais adequado. Acerca das variáveis, julgue o seguinte item.*

*Os valores das variáveis quantitativas discretas não podem ser contados, mas apenas mensurados.*

**C - Certo.**

**E - Errado.**

**Q.07 (CESPE - CEBRASPE / Agência Nacional de Saúde Suplementar/ 2005)**

*A identificação do tipo de variável é um requisito importante para a escolha do teste estatístico mais adequado. Acerca das variáveis, julgue o seguinte item.*

*O peso de crianças é considerado uma variável quantitativa contínua.*

**C - Certo.**

**E -Errado.**

**Q.08 (CESPE - CEBRASPE / Polícia Federal / 2005)**

*Um projeto de serviços de assistência social foi desenvolvido para ser implementado em todas as delegacias e plantões policiais de um estado brasileiro. Porém, antes da sua aplicação em todo o estado, ele foi implementado em 10 municípios, em caráter experimental, por 12 meses. Esses municípios foram escolhidos aleatoriamente entre os 250 municípios do estado. Nesse período experimental, foram registradas 48.000 ocorrências nos 10 municípios selecionados. Em 25% dessas ocorrências, as pessoas envolvidas foram encaminhadas aos assistentes sociais. A partir dessas ocorrências, os 100 assistentes sociais envolvidos nesse projeto atenderam, em média, 500 pessoas por mês. Os resultados obtidos foram positivos, observando-se uma queda na reincidência de denúncias e ocorrências registradas nesses municípios após a implementação do projeto.*

*A partir dos dados apresentados no texto acima, julgue o item subsequente.*

*O número de ocorrências registradas durante o período experimental de 12 meses nos 10 municípios selecionados (48.000) é a realização de uma variável aleatória contínua.*

**C - Certo.**

**E - Errado.**

**Q.09 (CESPE - CEBRASPE / Agência Nacional de Saúde Complementar / 2005)**

*A identificação do tipo de variável é um requisito importante para a escolha do teste estatístico mais adequado. Acerca das variáveis, julgue o seguinte item.*

*O peso de crianças é considerado uma variável quantitativa contínua.*

**C - Certo.**

**E - Errado.**



**Q.10 (CESPE – CEBRASPE / Instituto Jones dos Santos Neves - ES / 2010)**

quantidade X de processos analisados por servidor	frequência
1	6
2	9
3	10
4	3
5	2
total de servidores	30

Considerando que a tabela acima mostra a distribuição de frequências da quantidade X de processos que cada servidor de certo órgão público analisou em determinada semana, julgue o item a seguir.

A variável X é quantitativa discreta.

C - Certo.

E - Errado.

**Q.11 (CESPE – CEBRASPE / BACEN / 2013)**

2 4 8 4 8 1 2 32 12 1 5 7 5 5 3 4 24 19 4 14

Os dados mostrados acima representam uma amostra, em minutos, do tempo utilizado na armazenagem de formulários no almoxarifado central de certa instituição por diversos funcionários. Com base nesses dados, julgue o próximo item.

É inviável a elaboração de um histograma em decorrência do fato de ser este um conjunto de dados quantitativos discretos; dessa forma, apenas por meio de um gráfico de barras pode ser realizada a representação gráfica.

C - Certo.

E - Errado.

**Q.12 (CESPE – CEBRASPE / BACEN / 2013)**

número diário de denúncias registradas (X)	frequência relativa
0	0,3
1	0,1
2	0,2
3	0,1
4	0,3
total	1,0

A tabela precedente apresenta a distribuição de frequências relativas da variável X, que representa o número diário de denúncias registradas na ouvidoria de determinada instituição pública. A partir das informações dessa tabela, julgue o item seguinte.



A variável X é do tipo qualitativo nominal.

C - Certo.

E - Errado.

## Questões FCC

Q.13 (FCC / Defensoria Pública do Estado de SP/ 2009)

Sobre estatística aplicada, é correto o que se afirma em:

- a) Parâmetros são medidas características de grupos, determinadas por meio de uma amostra aleatória.
- b) A estatística descritiva é a técnica pela qual são coletados dados de uma amostra, a partir dos quais são tomadas decisões sobre uma determinada população.
- c) A caracterização de uma população se dá por meio da observação de todos os seus componentes que a integram.
- d) A estatística inferencial compreende um conjunto de técnicas destinadas à síntese de dados numéricos.
- e) Censo é o processo utilizado para se medir as características de todos os membros de uma dada população.

## Gabarito

GABARITO



<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>
B	D	ERR	ERR	ERR	ERR	CER	ERR	CER	CER
<u>11</u>	<u>12</u>	<u>13</u>	<u>14</u>	<u>15</u>	<u>16</u>	<u>17</u>	<u>18</u>	<u>19</u>	<u>20</u>
ERR	ERR	E	*	*	*	*	*	*	*





## MEDIDAS DE POSIÇÃO /

### SEPARATRIZES

#### Sumário

Medidas de Posição / .....	1
Separatrizes .....	1
O que é mais cobrado dentro do assunto .....	3
Roteiro de revisão e pontos do assunto que merecem destaque.....	3
Medidas de Tendência Central .....	3
Média Aritmética $\bar{X}$ .....	3
Moda .....	6
Mediana .....	11
Questões estratégicas .....	15
Questões FGV .....	15
Questões CEBRASPE .....	21
Questões FCC.....	31
Lista de Questões Estratégicas.....	33
Questões FGV .....	33
Gabarito - FGV .....	35
Questões CEBRASPE .....	36
Gabarito - CEBRASPE .....	39
Questões FCC.....	39
Gabarito - FCC.....	40



Medidas Separatrizes.....	41
Quartil .....	41
Decil .....	46
Percentil .....	48
Box Plot .....	50
Questões estratégicas .....	50
Lista de Questões Estratégicas.....	58
Gabarito .....	61



## O que é mais cobrado dentro do assunto

Vamos analisar agora como se comporta a incidência dos sub assuntos da nossa aula de hoje. Assim, você será melhor direcionado nos seus estudos, vejam:

MEDIDAS DE POSIÇÃO	Grau de incidência
MEDIANA	39,0%
MÉDIA	36,2%
MODA	20,6%
SEPARATRIZES	4,2%
TOTAL	100,00%

## ROTEIRO DE REVISÃO E PONTOS DO ASSUNTO QUE MERECEM DESTAQUE

A ideia desta seção é apresentar um roteiro para que você realize uma revisão completa do assunto e, ao mesmo tempo, destacar aspectos do conteúdo que merecem atenção.

Para revisar e ficar bem preparado no assunto, você precisa, basicamente, seguir os passos a seguir:

## MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Sabemos que essas medidas possuem como objetivo representar da melhor forma possível uma determinada população como um todo. A finalidade principal da Estatística é a tomada de decisões. Portanto, essas medidas de *tendência central* precisam ser confiáveis para que sua representatividade esteja muito próxima da realidade.

Iremos estudar as três medidas de tendência central a seguir:

### *Média, Moda e Mediana*

## *Média Aritmética $\bar{X}$*

Sabemos que esse conceito é bem simples e as provas não costumam complicar muito nas questões.



$$\underline{X} = \text{Média Aritmética} = \frac{\text{Soma dos Valores}}{\text{Quantidade de Valores}}$$

Uma observação importante é no cálculo da **Média Aritmética da Dados Agrupados em Classes**. Vamos pegar o nosso exemplo da aula 00. Vejam:

<u>IDADES</u>	<u>FREQUÊNCIA ABSOLUTA (fi)</u>	<u>PONTO MÉDIO (PM)</u>
<u>0┆10</u>	<b>12</b>	<u>5</u> = (0 + 10)/2
<u>10┆20</u>	<b>5</b>	<u>15</u> = (10 + 20)/2
<u>20┆30</u>	<b>13</b>	<u>25</u> = (20 + 30)/2
<u>30┆40</u>	<b>5</b>	<u>35</u> = (30 + 40)/2
<u>40┆50</u>	<b>6</b>	<u>45</u> = (40 + 50)/2
<u>50┆60</u>	<b>9</b>	<u>55</u> = (50 + 60)/2

É bem intuitivo a gente usar o **Ponto Médio** de cada classe como nosso valor de referência para o cálculo da Média Aritmética, correto? Logo, nossa Média Aritmética será dada por:

$$\underline{X} = \text{Média Aritmética} = \frac{12 \cdot 5 + 5 \cdot 15 + 13 \cdot 25 + 5 \cdot 35 + 6 \cdot 45 + 9 \cdot 55}{50} = 28$$

ou seja: **Média Arimética da Dados Agrupados em Classes é dada por:**

$$\underline{X} = \frac{\sum f_i \cdot PM}{n}$$

A galera geralmente não gosta dessa simbologia toda...rsrsrs, muita gente odeia **ESTATÍSTICA** por conta desse excesso de símbolos. Mas, vejam apenas como uma maneira de resumir a fórmula. O importante aqui é você saber como faz, ok?

Pessoal, temos algumas **Propriedades** da **Média Aritmética** que são importantes para a nossa prova, ok?

Se você achar que são muitas propriedades e que não vai conseguir entender todas, então deem atenção, primeiramente, a essas **duas**:

## Propriedades Importantes da

### Média Aritmética

Ao somar, ou subtrair, uma constante "k" a cada elemento do conjunto, a média será aumentada, ou subtraída, de "k"

Ao multiplicar, ou dividir, uma constante "k" a cada elemento do conjunto, a média será multiplicada, ou dividida, por "k"

Dá para perceber que as duas propriedades acima poderiam se resumir a apenas uma?



AO SOMAR, SUBTRAIR, MULTIPLICAR, OU DIVIDIR, uma constante "k" a cada elemento...

Vejam um exemplo simples:

A *média* entre 3 e 5 é **4**, ok?

Somando **1** a cada elemento, temos a *média* entre 4 e 6 que é **5**, ok?

Ou seja, somando 1 a cada elemento da média, a nova média passa a ser a anterior  $(4) + 1 = 5$ .

O mesmo vale para as demais operações, ok?

CUIDADO: essas propriedades não se aplicam à potenciação e à radiciação.

Uma terceira *Propriedade* simples de ser constatada é a da *Soma dos Desvios*.

Ainda sobre o nosso exemplo anterior, sabemos que a Média foi de 4 para os elementos 3 e 5, ok?

Tomando a média como referência, vemos que:

$$\text{Desvio}_1 = 3 - 4 = -1$$

$$\text{Desvio}_2 = 5 - 4 = 1$$

Somando os Desvios, eles se anulam:  $-1 + 1 = 0$

FIQUE  
ATENTO!



*Desvio* em relação à media nada mais é do que a *diferença* entre cada *elemento* de um conjunto de valores e sua *média aritmética*.

**A soma do Desvios será NULA.**

Uma quarta Propriedade, obviamente, decorrente do conceito de Média Aritmética, é a seguinte:

A Média entre 3 e 5 é **4**, ok?

E se adicionarmos mais um elemento a esse conjunto de valores, o que ocorrerá?

**Situação 1:** Se o elemento for *igual* à média (4), *nada mudará* em relação à Média.



A Média entre {3, 4 e 5} é 4.

**Situação 2:** Se o elemento for menor do que a média, então a média diminuirá;

**Situação 3:** Se o elemento for maior do que a média, então a média aumentará.

## Moda

A **moda** é uma medida de posição e de tendência central. Essa medida mostra o valor que mais se repete em um conjunto de observações. Sendo que, um conjunto de observações pode apresentar mais de uma ou até nenhuma moda. Logo, podemos ter um conjunto unimodal (uma moda), bimodal (duas modas), multimodal (mais de duas modas) e amodal (sem moda).

- Moda para Dados Não Agrupados

Quando temos um conjunto de valores não agrupados, a moda é o valor que aparece com maior frequência, mas como dito antes, pode haver mais de uma ou até nenhuma moda. Observem os exemplos abaixo.

<b>Amodal</b>	<u>Todos</u> os elementos do conjunto apresentam a <u>mesma</u> frequência. Ex: {1, 2, 3, 4, 5}
<b>Unimodal</b>	<u>Um</u> elemento do conjunto apresenta a maior frequência. Ex: {1, <b>2, 2</b> , 3, 4, 5}
<b>Bimodal</b>	<u>Dois</u> elementos do conjunto com a <u>mesma</u> frequência de observações. Ex: {1, <b>2, 2</b> , <b>3, 3</b> , 4, 5}
<b>Multimodal</b>	<u>Três ou mais</u> elementos do conjunto com a <u>mesma</u> frequência de observações. Ex: {1, <b>2, 2</b> , <b>3, 3</b> , 4, <b>5, 5</b> }

- Moda para Dados Agrupados sem intervalo de classe

Quando temos um conjunto de valores agrupados, a moda será o valor que apresentar a maior frequência absoluta. Observem a tabela abaixo.

<u>IDADES</u>	<u>FREQUÊNCIA ABSOLUTA (fi)</u>
10	12
20	5
30	<b>13</b>
40	5
50	6
60	9



Vejam que nesse exemplo, a moda será 30 anos, pois é o valor que apresenta a maior frequência absoluta (13).

- Moda para Dados Agrupados em classes

Quando os dados são agrupados em classes de mesma amplitude, a moda será o valor da classe que apresenta a maior frequência. Essa classe será chamada de classe modal. Existem alguns métodos de se calcular a moda em dados agrupados em classes. Esses métodos são os seguintes:

a) Moda de Czuber

A moda é calculada através da seguinte expressão:

$$M_o = l_{inf} + \left[ \frac{\Delta_a}{\Delta_a + \Delta_p} \right] \cdot h$$

Onde:

$\Delta_a$  = diferença anterior =  $f_{M_o} - f_{ant}$

$f_{M_o}$  = frequência absoluta da classe modal

$f_{ant}$  = frequência absoluta anterior a classe modal

$\Delta_p$  = diferença posterior =  $f_{M_o} - f_{post}$

$f_{post}$  = frequência absoluta posterior a classe modal

$h$  = amplitude da classe modal =  $l_{sup} - l_{inf}$

$l_{inf}$  = limite inferior da classe modal

$l_{sup}$  = limite superior da classe modal

ESCLARECENDO!



Se a classe modal for a primeira ou a última. A  $f_{ant}$  será zero (se for a primeira) ou  $f_{post}$  será zero (se for a última).

**Exemplo:** Qual a moda das Idades de uma grupo de pessoas?



<u>IDADES</u>	<u>FREQUÊNCIA ABSOLUTA (<math>f_i</math>)</u>
<u>0-10</u>	12
<u>10-20</u>	5
<u>20-30</u>	<b>13</b>
<u>30-40</u>	5
<u>40-50</u>	6
<u>50-60</u>	9

Nesse exemplo, temos que a frequência absoluta da classe modal é **13**. Sabendo disso, a primeira coisa a ser feita é calcular as diferenças anteriores e posteriores.

$$\Delta_a = \text{diferença anterior} = f_{M_o} - f_{ant} = 13 - 5 = 8$$

$$\Delta_p = \text{diferença posterior} = f_{M_o} - f_{post} = 13 - 5 = 8$$

Além disso, temos que os limites e amplitude são os seguintes:

$$l_{inf} = 20$$

$$l_{sup} = 30$$

$$h = l_{sup} - l_{inf} = 30 - 20 = 10$$

Aplicando a fórmula de Czuber:

$$M_o = l_{inf} + \left[ \frac{\Delta_a}{\Delta_a + \Delta_p} \right] \cdot h = 20 + \left[ \frac{8}{8 + 8} \right] \cdot 10 = 20 + \frac{8}{16} \cdot 10 = 20 + 5 = \mathbf{25}$$

#### b) Moda de King

A moda é calculada da seguinte forma:

$$M_o = l_{inf} + \left[ \frac{f_{post}}{f_{ant} + f_{post}} \right] \cdot h$$

Vejam que o cálculo da moda de King é semelhante ao da moda de Czuber. Sendo que, ao invés de se utilizar as diferenças anterior e posterior, utilizamos as frequências.

**Exemplo:** Qual a moda das Idades de um grupo de pessoas?

<u>IDADES</u>	<u>FREQUÊNCIA ABSOLUTA (<math>f_i</math>)</u>
---------------	---



<u>0-10</u>	12
<u>10-20</u>	5
<u>20-30</u>	<b>13</b>
<u>30-40</u>	5
<u>40-50</u>	6
<u>50-60</u>	9

Nesse exemplo, temos que a frequência absoluta da classe modal é **13**. Temos as seguintes informações:

$$f_{ant} = 5$$

$$f_{post} = 5$$

$$l_{inf} = 20$$

$$h = l_{sup} - l_{inf} = 30 - 20 = 10$$

Aplicando a fórmula de King, teremos o seguinte:

$$M_o = l_{inf} + \left[ \frac{f_{post}}{f_{ant} + f_{post}} \right] \cdot h = 20 + \left[ \frac{5}{5 + 5} \right] \cdot 10 = 20 + \frac{5}{10} \cdot 10 = 25$$

Coincidentemente, como as frequências anterior e posterior foram iguais, os valores da moda de King foi igual a moda de Czuber. Mas isso nem sempre ocorre.

ESCLARECENDO!



Se a classe modal for a primeira ou a última. A  $f_{ant}$  será zero (se for a primeira) ou  $f_{post}$  será zero (se for a última).

c) Moda de Pearson (*pouco explorado em prova*)



A moda é calculada através de uma relação empírica. Para isso, temos que conhecer o valor da média ( $\bar{X}$ ) e da mediana ( $M_d$ ). A expressão dessa relação é dada por:

$$M_o = 3 \cdot M_d - 2 \cdot \bar{X}$$

ESCLARECENDO!



A fórmula de Pearson só poderá ser utilizada quando a questão expressamente pedir a moda de Pearson.

d) Moda bruta (*raro em prova*)

A moda é obtida através do ponto médio da classe modal, isto é, a média entre limite inferior ( $l_{inf}$ ) e o limite superior ( $l_{sup}$ ) da classe modal.

$$M_o = \frac{l_{inf} + l_{sup}}{2}$$

Pessoal, assim como a Média Aritmética, também temos duas importantes Propriedades para Moda.

## Propriedades Importantes da

### Moda

Ao somar, ou subtrair, uma constante "k" a cada elemento do conjunto, a moda será aumentada, ou subtraída, de "k"

Ao multiplicar, ou dividir, uma constante "k" a cada elemento do conjunto, a moda será multiplicada, ou dividida, por "k"

Dá para perceber que as duas propriedades acima poderiam se resumir a apenas uma?

**AO SOMAR, SUBTRAIR, MULTIPLICAR, OU DIVIDIR, uma constante "k" a cada elemento...**



## Mediana

A **Mediana** é a medida de posição que se encontra no centro de um conjunto de observações. Sendo que, os valores do conjunto devem estar ordenados.

- Mediana para Dados em Rol

Considere os seguintes dados bruto:

1, 2, 9, 12, 5, 2, 6, 3, 5, 9, 4

A primeira coisa a ser feita é organizar esses dados em um Rol.

{1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 9, 9, 12}

Nesse caso, temos um número ímpar. E a mediana será exatamente o valor central (5). Mas nem sempre é fácil encontrar esse valor. Logo, podemos encontrar valor central da seguinte forma:

$$\frac{n + 1}{2} \text{ (posição da mediana)}$$

No nosso conjunto de dados temos 11 elementos.

$$\frac{11 + 1}{2} = \frac{12}{2} = 6^\circ \text{ posição}$$

Se tivermos um número par de elementos, a mediana será a média dos dois valores centrais.

{10, 20, 30, 40, 50, 60}

Nesse caso, fazendo a média dos elementos centrais temos que a mediana é 35. Sendo que, também podemos utilizar uma expressão para encontrar os elementos centrais.

Primeira posição central:  $\frac{n}{2}$

Segunda posição central:  $\frac{n}{2} + 1$

No nosso exemplo, temos o seguinte:

$$\frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3^\circ \text{ posição}$$

$$\frac{n}{2} + 1 = \frac{6}{2} + 1 = 4^\circ \text{ posição}$$



Fazendo a média dessas duas posições encontramos o valor da mediana:

$$M_d = \frac{30 + 40}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

- Mediana para Dados agrupados por valor

Para encontrar a mediana temos que utilizar a frequência acumulada.

<u>IDADES</u>	<u>FREQUÊNCIA ABSOLUTA (fi)</u>	<u>FREQUÊNCIA ACUMULADA (fac)</u>
10	12	12
20	5	17
30	13	30
40	5	35
50	6	41
60	9	50
TOTAL	50	

Para encontrar a posição da mediana, basta utilizar a seguinte expressão:

$$\frac{n}{2}$$

Também precisamos nos preocupar com número par ou ímpar de elementos. Aqui o "n" é 50 (par). Logo,

$$\frac{n}{2} = \frac{50}{2} = 25^\circ \text{ posição}$$

$$\frac{n}{2} + 1 = \frac{50}{2} + 1 = 26^\circ \text{ posição}$$

Portanto, observando a coluna das frequência acumuladas, podemos ver que as posições 25 e 26 correspondem a 30 anos cada. Fazendo a média teremos a mediana igual 30 anos.

$$\frac{30 + 30}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

- Mediana para Dados Agrupados em Classes

Para encontrar a mediana também utilizamos a frequência acumulada.

<u>IDADES</u>	<u>FREQUÊNCIA ABSOLUTA (fi)</u>	<u>FREQUÊNCIA ACUMULADA (fac)</u>
0-10	12	12



10 † 20	5	17
20 † 30	13	30
30 † 40	5	35
40 † 50	6	41
50 † 60	9	50
TOTAL	50	

De posse da coluna da frequência acumulada, a primeira coisa a ser feita é encontrar a classe mediana. Para isso, não precisamos nos preocupar com elementos par ou ímpar. Basta utilizar a seguinte expressão:

$$\frac{n}{2}$$

No nosso exemplo, o "n" é igual a 50. Logo, teremos a posição 25 e essa posição fica na classe de 20 a 30. Sabendo a classe modal, basta calcular a mediana através da fórmula.

A fórmula da mediana é a seguinte:

$$M_d = l_{inf} + \left[ \frac{\left(\frac{n}{2}\right) - f_{ac_{ant}}}{f_i} \right] \cdot h$$

Onde:

$n$  = número de elementos

$l_{inf}$  = limite inferior da classe mediana

$f_{ac_{ant}}$  = frequência acumulada anterior à classe mediana

$f_i$  = frequência absoluta simples da classe mediana

$h$  = amplitude da classe mediana =  $l_{sup} - l_{inf}$

Aplicando a fórmula no exemplo, teremos o seguinte:

$$M_d = l_{inf} + \left[ \frac{\left(\frac{n}{2}\right) - f_{ac_{ant}}}{f_i} \right] \cdot h = 20 + \left[ \frac{\left(\frac{50}{2} - 17\right)}{13} \right] \cdot 10 = 20 + \left[ \frac{25 - 17}{13} \right] \cdot 10 = 20 + \frac{8}{13} \cdot 10$$

$$M_d = 20 + 6,15 = 26,15$$



Pessoal, assim como a Média Aritmética, também temos duas importantes Propriedades para Mediana.

## Propriedades Importantes da

### Mediana

Ao somar, ou subtrair, uma constante "k" a cada elemento do conjunto, a mediana será aumentada, ou subtraída, de "k"

Ao multiplicar, ou dividir, uma constante "k" a cada elemento do conjunto, a mediana será multiplicada, ou dividida, por "k"

Dá para perceber que as duas propriedades acima poderiam se resumir a apenas uma?

AO SOMAR, SUBTRAIR, MULTIPLICAR, OU DIVIDIR, uma constante "k" a cada elemento...



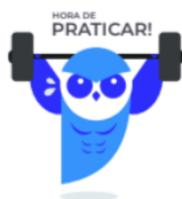
Apenas a Média Aritmética é afetada por valores extremos.



## QUESTÕES ESTRATÉGICAS

Nesta seção, apresentamos e comentamos uma amostra de questões objetivas selecionadas estrategicamente: são questões com nível de dificuldade semelhante ao que você deve esperar para a sua prova e que, em conjunto, abordam os principais pontos do assunto.

A ideia, aqui, não é que você fixe o conteúdo por meio de uma bateria extensa de questões, mas que você faça uma boa revisão global do assunto a partir de, relativamente, poucas questões.



### Questões FGV

Q.01 (FGV / SEFAZ-ES / 2022)

As notas de nove candidatos num certo exame foram:

54, 48, 46, 51, 38, 50, 44, 58, 32.

A mediana dessas notas é igual a

- a) 44.
- b) 46.
- c) 48.
- d) 50.
- e) 51.

**Comentários:**

O erro mais frequente cometido pelo candidato, nas questões que envolvem a mediana, é não organizar os dados brutos em Rol, ou seja, em ordem crescente ou decrescente. Felizmente, nessa questão, o examinador não colocou como opção nas alternativas o 38, senão alguns candidatos mais desatenciosos poderiam marcar essa opção, visto que o **termo central é o 5°**.

32, 38, 44, 46, **48**, 50, 51, 54, 58



**CONSELHO:** Sugiro que o candidato escreva todos os termos e não apenas até o 5° porque você pode esquecer de algum deles e perder a questão.

Gabarito: C

Q.02 (FGV / SEFAZ-ES / 2022)

Uma amostra de idades de usuários de determinado serviço forneceu os seguintes dados:

23; 34; 30; 22; 34; 53; 34; 28; 30; 22

A soma dos valores da média, da moda e da mediana desses dados é igual a

- a) 93.
- b) 94.
- c) 95.
- d) 96.
- e) 97.

Comentários:

Vamos colocá-los em ordem crescente:

22, 22, 23, 28, 30, 30, 34, 34, 34, 53

Para o cálculo da **Mediana**, precisaremos calcular a média aritmética entre o 5° e o 6° termos, pois a quantidade de termos é par, logo não existe um termo central.

22, 22, 23, 28, **30, 30**, 34, 34, 34, 53

**Mediana:** 30

**Moda:** 34 (o termo mais frequente)

**Média:**  $310/10 = 31$

A soma da Mediana, da Moda e da Média:  $30 + 34 + 31 = 95$

Gabarito: C

Q.03 (FGV / Pref. Salvador - BA /2019)



Em uma pequena empresa, a média salarial dos 12 funcionários era de R\$2400,00. Lúcio Mauro, que ganhava R\$3000,00, se aposentou e para ocupar sua vaga foi contratado Felipe, com um salário de R\$1800,00.

Assinale a opção que indica a nova média salarial dos 12 funcionários dessa empresa.

- a) R\$2350,00.
- b) R\$2300,00.
- c) R\$2280,00.
- d) R\$2250,00.
- e) R\$2200,00.

#### Comentários:

Pessoal, a soma de todos os salários é igual a:

$$\text{Soma dos Salários} = 12 \times 2400,00 = \text{R\$ } 28800,00$$

Após a aposentadoria de Lúcio Mauro, que ganhava R\$ 3000,00, a soma passou a ser de R\$ 28.800,00 – R\$ 3.000,00 = R\$ 25.800,00.

No entanto, entrou Felipe com um salário de R\$ 1.800,00 que será somado aos R\$ 25.800,00, perfazendo um total de R\$ 27.600,00. Logo, a nova média será de:

$$\underline{X} = \frac{27.600,00}{12} = \text{R\$ } 2.300,00$$

#### Gabarito: B

#### Q.04 (FGV/Analista de Patologia Clínica (FunSaúde CE) /2021)

Em um conjunto de 12 números, a média de 4 deles é 15 e a média dos outros 8 é 18.

A média dos 12 números é

- a) 17.
- b) 16,8.
- c) 16,5.
- d) 16.
- e) 15,5.

#### Comentários:



Pessoal, a banca quer saber a média do conjunto de 12 números. Para tanto, ela dar a média de 4 e 8 deles. Podemos resolver essa questão de duas formas.

Primeira forma:

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Encontrar o somatório do conjunto de 4.

$$\bar{X}_4 = 15$$

$$\bar{X}_4 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{n}$$

$$15 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 15 \cdot 4$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 60$$

Encontrar o somatório do conjunto de 8.

$$\bar{X}_8 = 18$$

$$\bar{X}_8 = \frac{X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12}}{n}$$

$$18 = \frac{X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12}}{8}$$

$$X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} = 18 \cdot 8$$

$$X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} = 144$$

Por fim, utilizar os dois somatórios para encontrar a média do conjunto de 12 números.

$$\bar{X}_{12} = \frac{(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + (X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12})}{n}$$



$$\bar{X}_{12} = \frac{60 + 144}{12} = \frac{204}{12}$$
$$\bar{X}_{12} = 17$$

Segunda forma: É a que faria na prova.

Utilizaria o conceito de média global.

$$\bar{X}_G = \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2 + \dots + n_n\bar{X}_n}{n_1 + n_2 + \dots + n_n}$$

Para nossa questão podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$\bar{X}_{12} = \frac{n_4\bar{X}_4 + n_8\bar{X}_8}{n_4 + n_8}$$

Onde,

$n_4 = 4$  (conjunto de 4 números);

$n_8 = 8$  (conjunto de 4 números);

$\bar{X}_4 = 15$  (média do conjunto de 4 números);

$\bar{X}_8 = 18$  (média do conjunto de 8 números);

$$\bar{X}_{12} = \frac{4 \cdot 15 + 8 \cdot 18}{4 + 8} = \frac{60 + 144}{12} = \frac{204}{12}$$
$$\bar{X}_{12} = 17$$

**Gabarito: A**

**Q.05 (FGV/Auxiliar Técnico Administrativo (IMBEL)/Almoxarife/2021)**

A lista a seguir representa a quantidade de itens de certo produto vendidos por uma loja nos 6 dias de certa semana, organizados em ordem crescente:

$N, 14, 15, 17, 20, 2N$ .

Sabe-se que a média desses números é 1 unidade maior que a mediana deles.

O número  $N$  é elemento do conjunto

a)  $\{1, 2, 3\}$ .



b) {4, 5, 6}.

c) {7, 8, 9}.

d) {10, 11}.

e) {12, 13}.

### Comentários:

Essa questão traz a lista quantidade de itens de certo produto vendidos em 6 dias. Além disso, diz que a lista está em ordem crescente.

$$N, 14, 15, 17, 20, 2N$$

Na questão também foi informado que a média é uma unidade maior que a mediana.

$$\bar{X} = M_d + 1$$

Vejam que temos um ROL com um número par de elementos. Logo, temos que encontrar os dois números centrais e fazer a média deles para descobrir a  $M_d$ .

$$N, 14, 15, 17, 20, 2N$$

$$M_d = \frac{15 + 17}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

Agora basta encontrar a média.

$$\bar{X} = 16 + 1 = 17$$

De posse da média podemos encontrar o valor do "N" através do somatório da fórmula da média.

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$17 = \frac{N + 14 + 15 + 17 + 20 + 2N}{6}$$

$$3N + 66 = 17 \cdot 6$$

$$3N = 102 - 66$$

$$3N = 36$$

$$N = 12$$



A questão quer saber qual conjunto o "N" pertence. Portanto, resposta alternativa "E" {12, 13}.

Gabarito: E

## Questões CEBRASPE

Q.01 (CESPE - CEBRASPE / Financiadora de Estudos e Projetos / 2009)

Um levantamento efetuado entre os 100 jovens inscritos em um projeto de inclusão social desenvolvido por uma instituição mostra a seguinte distribuição etária.

idade (X, em anos)	frequência
16	40
17	30
18	20
19	10

Com base nessas informações, assinale a opção incorreta.

- a) A mediana da distribuição etária é igual a 17,5 anos.
- b) A variável X apresentada na tabela de frequências é uma variável discreta.
- c) A média das idades dos jovens observados no levantamento é igual a 17 anos.
- d) A moda da distribuição etária é igual a 16 anos.
- e) Dos jovens inscritos no referido projeto de inclusão social, 30% possuem idades maiores ou iguais a 18 anos.

Comentários:

Alternativa A: **Errada**

A mediana da distribuição etária é igual a 17,5 anos.

Nossa população amostral é de 100 elementos, a mediana é a média da posição 50 e 51.

O elemento 50º é 17 e o 51º é 17 então a mediana é:



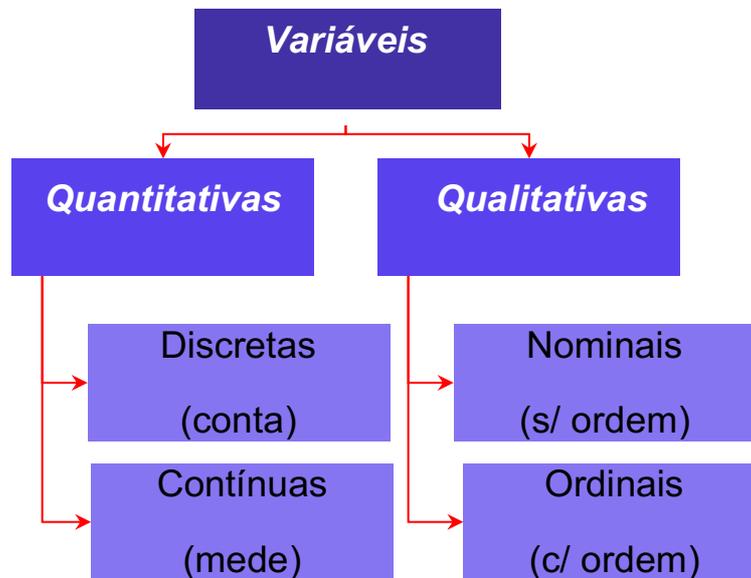
$$Md = \frac{17+17}{2}$$

$$Md = 17 \text{ anos}$$

Alternativa B: Correta

A variável X apresentada na tabela de frequências é uma variável discreta.

Vamos colocar nossa tabelinha para lembrarmos as diferenças entre as variáveis:



A idade além de ser uma variável quantitativa, também, é discreta.

Alternativa C: Correta

A média das idades dos jovens observados no levantamento é igual a 17 anos.

$$\text{Média Aritmética} = \frac{40 \cdot 16 + 30 \cdot 17 + 20 \cdot 18 + 10 \cdot 19}{100} = 17$$

Alternativa D: Correta

A moda da distribuição etária é igual a 16 anos.



idade (X, em anos)	frequência
16	40
17	30
18	20
19	10

Observando nossa tabela de frequências absolutas, vemos, facilmente, que a idade 16 anos é a nossa **moda**, visto que é o elemento com a maior frequência.

**Alternativa E: Correta**

Dos jovens inscritos no referido projeto de inclusão social, 30% possuem idades maiores ou iguais a 18 anos.

Maiores ou iguais a 18 anos são alunos com 18 ou 19 anos, que nesse caso somam  $(20 + 10) = 30$  anos. Logo, 30 de um total de 100, equivale a 30%.

**Gabarito: A**

**Q.02 (CESPE - CEBRASPE / ABIN / 2010)**

*Sabendo que X é variável aleatória discreta que pode assumir valores inteiros não negativos, julgue o próximo item.*

*A média de X é não negativa.*

**C - Certo.**

**E – Errado.**

**Comentários:**

Não é possível representar quantidade de filhos com números fracionários ou negativos, logo temos uma variável quantitativa discreta. Nessa linha, a média de uma variável discreta não pode assumir valores negativos.

**Gabarito: Certa**

**Q.03 (CESPE - CEBRASPE / Tribunal de Contas - RJ / 2021)**



X	frequência absoluta
0	5
1	10
2	20
3	15
total	50

Considerando que a tabela precedente mostra a distribuição de frequências de uma variável quantitativa  $X$ , julgue o item a seguir.

A moda e a mediana da variável  $X$  são, respectivamente, iguais a 2 e 1,5

C - Certo.

E - Errado.

#### Comentários:

Pessoal, de imediato, sabemos que, dentre todas as medidas de **tendência central**, a mais simples de ser calculada é a Moda.

Na nossa questão a **Moda (mo) é 2**, visto que é o valor com maior frequência (**20**), logo, até então, nosso item está correto.

Vamos agora atrás da **Mediana (md)**.

Um **erro** bastante frequente no cálculo da **Mediana (md)** é o de não organizar os dados em ordem crescente ou decrescente, mas que não será nosso caso, visto que as informações já estão na tabela de frequências.

A quantidade de dados é par (50), logo precisaremos determinar a **média aritmética** dos **valores centrais**, ou seja: o **25º** e **26º** termos.

Para o cálculo das posições dos valores centrais, basta dividirmos a quantidade de termos por 2, sendo o primeiro termo central (**25º**), e, em seguida, para determinar o 2º termo, somar 1 (**26º**).

Portanto, na tabela de frequências, vamos encontrar o 25º e 26º termos.



Se você não se sente seguro, para fazer a sequência de forma mental, reescreva os termos até chegar no 25º e 26º, o que vale é ganhar o ponto da questão. Mas, se você está de boa com sua mente, então, para ser mais rápido, vamos fazer assim:

$$0 - 05 \text{ vezes} / 1 - 10 \text{ vezes} / 2 - 20 \text{ vezes}$$

Como as variáveis 0 e 1 já somam 15 termos, e há 20 termos na 2, logo o 25º e 26º termos serão o número 2. Logo, sua Md será a Média Aritmética entre eles,  $Md = 2$ .

**Gabarito: Errado**

#### Q.04 (CESPE - CEBRASPE / SEFAZ - DF / 2020)

A partir de uma amostra aleatória simples de tamanho "n", sabe-se que a média aritmética de uma variável X foi igual a 3. Considerando que os valores possíveis para a variável X sejam -1 e +4, julgue os itens que se seguem.

A distribuição da variável X é simétrica em torno da sua média amostral.

C - Certo.

E - Errado.

#### Comentários:

A questão faz parte de uma sequência de 4 assertivas. Por isso, precisamos de informações constantes nas questões anteriores.

Considere a seguinte tabela:

Valores de X	Frequência Absoluta
-1	0,2n
4	0,8n
Total	n

Sabemos que uma distribuição será *simétrica* quando a Média *Aritmética*, a *Moda* e a *Mediana* forem *iguais*, ok?

Mas, Allan, não sabemos o valor de "n", e agora?

Meus caros, para ficar mais simples a resolução, devemos sugerir um valor qualquer para "n", lógico que faremos isso de forma que a solução fique mais simples, por isso irei considerar  $n = 10$ , ok?



Logo:

Valores de X	Frequência Absoluta
-1	2
4	8
Total	10

- $Mediana = \frac{4+4}{2} = 4$
- $Moda = 4$
- $Média = \frac{2 \cdot (-1) + 8 \cdot 4}{10} = 3$

Sendo assim, nossa *distribuição NÃO é simétrica*.

Gabarito: ERRADO

Q.05 (CESPE - CEBRASPE/ SEFAZ-DF / 2020)

A partir de uma amostra aleatória simples de tamanho "n", sabe-se que a média aritmética de uma variável X foi igual a 3. Considerando que os valores possíveis para a variável X sejam -1 e +4, julgue o item que se segue.

A mediana amostral da variável X foi igual a 2,5.

C - Certo.

E - Errado.

Comentários:

A questão faz parte de uma sequência de 4 assertivas. Por isso, precisamos de informações constantes nas questões anteriores.

Considere a seguinte tabela:

Valores de X	Frequência Absoluta
-1	0,2n
4	0,8n
Total	n



Meus caros, para ficar mais simples a resolução, devemos sugerir um valor qualquer para "n", lógico que faremos isso de forma que a solução fique mais simples, por isso irei considerar  $n = 10$ , ok?

Logo:

Valores de X	Frequência Absoluta
-1	2
4	8
Total	10

- $Mediana = \frac{4+4}{2} = 4$

Gabarito: ERRADO

Q.06 (CEBRASPE / Tribunal de Justiça do Pará / Analista Judiciário / 2019)

Uma amostra aleatória dos registros de furto no município de Abaetetuba, no ano de 2017, apresenta os valores 245, 247, 238, 282 e 261. Uma estimativa não tendenciosa e eficiente para a média de furtos ocorridos em Abaetetuba no ano de 2017, considerando os dados apresentados na amostra, é

- a) 238,0.
- b) 254,6.
- c) 260,0.
- d) 282,7.
- e) 308,5.

Comentários:

Uma questão que trata do assunto Média Aritmética, ok?

$$X = \frac{245 + 247 + 238 + 282 + 261}{5} = \frac{1273}{5} = 254,6$$

CURIOSIDADE



Pessoal, existe um método prático para efetuarmos uma **divisão por 5**.



1º: Basta **dobrar** o número a ser dividido:  $1273 \times 2 = 2546$

2º: Agora, divida o resultado obtido na multiplicação por 10: **254,6**

Gabarito: B

#### Q.07 (CEBRASPE / IPHAN / Analista / 2018)

Define-se estatística descritiva como a etapa inicial da análise utilizada para descrever e resumir dados. Em relação às medidas descritivas, julgue o item a seguir.

A mediana é o valor que ocupa a posição central da série de observações de uma variável, dividindo-se o conjunto de valores ordenados em partes assimétricas desiguais.

C - Certo.

E - Errado.

Comentários:

A mediana, conforme vimos em aula, é o valor que ocupa a posição central da série de observações de uma variável. Porém a mesma divide o conjunto de valores em partes simétricas iguais.

Gabarito: Errado

#### Q.08 (CEBRASPE / IPHAN / Analista / 2018)

Uma pesquisa a respeito das quantidades de teatros em cada uma de 11 cidades brasileiras selecionadas apresentou o seguinte resultado: {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4}.

Com referência a esses dados, julgue o item seguinte.

A mediana do conjunto é igual a 3.

C - Certo.

E - Errado.

Comentários:

Meus caros, mediana é o valor que separa a metade maior da metade menor de uma amostra, uma população ou uma distribuição de probabilidade.



A mediana pode ser o valor do meio de um conjunto de dados, caso a quantidade de dados seja um valor ímpar. No entanto, se houver um número par de observações, não há um único valor do meio. Portanto, a mediana é definida como a média dos dois valores centrais.

Como temos 11 observações em nossa questão, a mediana da amostra estará no 6º termo, sendo igual a 3, por representar o termo central.

{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4}

**Gabarito: Certo**

**Q.09 (CEBRASPE / Prof. Pref São Cristóvão /2019)**

*A tabela seguinte mostra a distribuição das idades dos 30 alunos da turma A do quinto ano de uma escola de ensino fundamental.*

Idade (em anos)	9	10	11	12	13	14
Quantidade de estudantes	6	22	0	1	0	1

*A partir dessa tabela, julgue o item.*

*Se, em outra turma B, as frequências das idades fossem respectivamente iguais ao dobro das frequências da turma A, então a média aritmética das idades da turma B seria igual ao dobro da média da turma A.*

**C - CERTO**

**E - ERRADO**

**Comentários:**

Pessoal, a banca forneceu uma tabela como os valores das idades e a quantidade (frequência) de um grupo de alunos da turma A e questiona sobre a média aritmética de outra turma, a turma B. Para isso, diz que a frequência será o dobro da turma A e que nesse caso a média aritmética de B seria o dobro de A.

A tabela apresentada da questão é a seguinte.

X	f	f · X
9	6	54
10	22	220
11	0	0
12	1	12



13	0	0
14	1	14
<b>Tota l</b>	<b>30</b>	<b>300</b>

Onde "f" é a quantidade de alunos e "X" é a idade. A primeira coisa a ser feita é calcular a média da turma A, para isso temos que construir uma coluna f · X (ver tabela acima) e em seguida fazer o somatório. Temos que a média pode ser obtida da seguinte forma:

$$\underline{X} = \frac{\sum f \cdot X_i}{n}$$

$$\underline{X}_A = \frac{300}{30} = 10$$

De posse dessa média, calculamos a média da turma B (com as frequências em dobro) e fazemos a comparação para saber se será o dobro como afirma a banca.

X	f	f · X
9	12	108
10	44	440
11	0	0
12	2	24
13	0	0
14	4	28
<b>Tota l</b>	<b>60</b>	<b>600</b>

$$\underline{X}_B = \frac{600}{60} = 10$$

Vejam que as médias são iguais. Nessa questão nem precisaríamos fazer conta alguma, pois se a frequência for dobrada em consequência será dobrada a quantidade de alunos e o valor de f · X. Desta forma, os valores se anulam e as médias ficam iguais. Portanto, errada a questão.

A banca tentou enganar o candidato com as propriedades da média. Como sabemos a média é afetada pelas quatro operações. Se a banca afirmasse que ao invés da frequência fosse dobrada as idades, aí sim teríamos a média das idades em dobro. Senão vejamos.

Tabela com as idades em dobro:

X	f	f · X
18	6	108
20	22	440



22	0	0
24	1	24
26	0	0
28	1	28
<b>Tota l</b>	<b>30</b>	<b>60 0</b>

$$\underline{X} = \frac{600}{30} = 20$$

Gabarito: Errado

## Questões FCC

Q.01 (FCC / TRT – 18ª / Oficial de Justiça / 2023)

Em uma turma de 60 alunos, 10 foram reprovados. Sabendo-se que a média dos alunos aprovados foi 8,5 e a média dos alunos reprovados foi de 3,4, a média da turma foi

- a) 8,35
- b) 7,65
- c) 7,95
- d) 6,95
- e) 7,05

Comentários:

- Total de Alunos: 60
- Reprovados: 10
- Aprovados: 50

Para determinarmos a média da turma basta somarmos todas as notas dos aprovados com as dos reprovados e dividirmos pelo total de alunos.

Apesar de não termos as notas de cada um, o enunciado nos informou as respectivas médias, logo:

- Somatório dos **Aprovados**:  $50 \times 8,5 = 425$
- Somatório dos **Reprovados**:  $10 \times 3,4 = 34$

Logo, a **média** será dada por:



$$\bar{X} = \frac{425 + 34}{60} = 7,65$$

Gabarito: B

Q.02 (FCC / COPERGÁS / Analista / 2023)

Quatro trabalhadores executam uma tarefa em tempos diferentes. Os tempos gastos para realizar essa tarefa foram 1h35min, 1h40min, 1h33min e 1h43min. Um novo trabalhador, sabendo do tempo de seus colegas, garante que o tempo médio para realizar essa tarefa será de 1h35min com a sua participação. O tempo desse novo trabalhador é

- a) 1h22min.
- b) 1h34min.
- c) 1h24min.
- d) 1h20min.
- e) 1h30min

Comentários:

Tempo do novo trabalhador: "x"

Vamos transformar todos os intervalos de tempo para minutos, assim ficará mais fácil:

$$\bar{X} = \frac{95 + 100 + 93 + 103 + X}{5} = 95$$

$$391 + X = 95 \cdot 5$$

$$X = 475 - 391$$

$$X = 84 \text{ minutos que equivale a } 1\text{h}24\text{min}$$

Gabarito: C

Q.03 (FCC / Procuradoria – PGE-AM / Analista / 2022)

Uma ginasta executa três vezes uma determinada prova. Suas notas, na primeira e segunda tentativas foram, respectivamente, metade e dois terços da nota da terceira tentativa. A média aritmética das notas das três tentativas foi de 32,5 pontos. A nota da primeira prova foi

- a) 20,5 pontos.
- b) 30,0 pontos.
- c) 22,5 pontos.
- d) 45,0 pontos.



e) 20,0 pontos.

### Comentários:

A ideia aqui é representar a terceira nota por uma incógnita, ok?

Geralmente a chamamos de "X". Mas, dessa vez, vamos fazer diferente:

- o **3ª Nota:** 6X
- o **1ª Nota:** 1/2 de 6X = 3X
- o **2ª Nota:** 2/3 de 6X = 4X

Ao determinarmos o valor de "6X" para a 3ª nota evitamos frações indesejáveis para efetuarmos as nossas contas, beleza?

$$\bar{X} = \frac{6X + 3X + 4X}{3} = 32,5$$

$$13 X = 3 \cdot 32,5$$

$$13 X = 97,5$$

$$X = 7,5$$

A NOTA DA 1ª PRIMEIRA PROVA É DADA POR:

$$= 3X =$$

$$= 3 \cdot 7,5 =$$

$$= 22,5 =$$

Gabarito: C

## LISTA DE QUESTÕES ESTRATÉGICAS

### Questões FGV

Q.01 (FGV / SEFAZ-ES / 2022)

As notas de nove candidatos num certo exame foram:



54, 48, 46, 51, 38, 50, 44, 58, 32.

A mediana dessas notas é igual a

- a) 44.
- b) 46.
- c) 48.
- d) 50.
- e) 51.

#### Q.02 (FGV / SEFAZ-ES / 2022)

Uma amostra de idades de usuários de determinado serviço forneceu os seguintes dados:

23; 34; 30; 22; 34; 53; 34; 28; 30; 22

A soma dos valores da média, da moda e da mediana desses dados é igual a

- a) 93.
- b) 94.
- c) 95.
- d) 96.
- e) 97.

#### Q.03 (FGV / Pref. Salvador - BA /2019)

Em uma pequena empresa, a média salarial dos 12 funcionários era de R\$2400,00. Lúcio Mauro, que ganhava R\$3000,00, se aposentou e para ocupar sua vaga foi contratado Felipe, com um salário de R\$1800,00.

Assinale a opção que indica a nova média salarial dos 12 funcionários dessa empresa.

- a) R\$2350,00.
- b) R\$2300,00.
- c) R\$2280,00.
- d) R\$2250,00.
- e) R\$2200,00.

#### Q.04 (FGV/Analista de Patologia Clínica (FunSaúde CE) /2021)

Em um conjunto de 12 números, a média de 4 deles é 15 e a média dos outros 8 é 18.

A média dos 12 números é



- a) 17.
- b) 16,8.
- c) 16,5.
- d) 16.
- e) 15,5.

Q.05 (FGV/Auxiliar Técnico Administrativo (IMBEL)/Almoxarife/2021)

A lista a seguir representa a quantidade de itens de certo produto vendidos por uma loja nos 6 dias de certa semana, organizados em ordem crescente:

$N, 14, 15, 17, 20, 2N.$

Sabe-se que a média desses números é 1 unidade maior que a mediana deles.

O número  $N$  é elemento do conjunto

- a) {1, 2, 3}.
- b) {4, 5, 6}.
- c) {7, 8, 9}.
- d) {10, 11}.
- e) {12, 13}.

**Gabarito - FGV**

GABARITO



<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>
C	C	A	C	E



## Questões CEBRASPE

Q.01 (CESPE - CEBRASPE / Financiadora de Estudos e Projetos / 2009)

Um levantamento efetuado entre os 100 jovens inscritos em um projeto de inclusão social desenvolvido por uma instituição mostra a seguinte distribuição etária.

idade (X, em anos)	frequência
16	40
17	30
18	20
19	10

Com base nessas informações, assinale a opção incorreta.

- a) A mediana da distribuição etária é igual a 17,5 anos.
- b) A variável X apresentada na tabela de frequências é uma variável discreta.
- c) A média das idades dos jovens observados no levantamento é igual a 17 anos.
- d) A moda da distribuição etária é igual a 16 anos.
- e) Dos jovens inscritos no referido projeto de inclusão social, 30% possuem idades maiores ou iguais a 18 anos.

Q.02 (CESPE - CEBRASPE / ABIN / 2010)

Sabendo que X é variável aleatória discreta que pode assumir valores inteiros não negativos, julgue o próximo item.

A média de X é não negativa.

C - Certo.

E – Errado.

Q.03 (CESPE - CEBRASPE / Tribunal de Contas - RJ / 2021)



X	frequência absoluta
0	5
1	10
2	20
3	15
total	50

Considerando que a tabela precedente mostra a distribuição de frequências de uma variável quantitativa  $X$ , julgue o item a seguir.

A moda e a mediana da variável  $X$  são, respectivamente, iguais a 2 e 1,5

C - Certo.

E - Errado.

**Q.04 (CESPE - CEBRASPE / SEFAZ - DF / 2020)**

A partir de uma amostra aleatória simples de tamanho " $n$ ", sabe-se que a média aritmética de uma variável  $X$  foi igual a 3. Considerando que os valores possíveis para a variável  $X$  sejam -1 e +4, julgue os itens que se seguem.

A distribuição da variável  $X$  é simétrica em torno da sua média amostral.

C - Certo.

E - Errado.

**Q.05 (CESPE - CEBRASPE/ SEFAZ-DF / 2020)**

A partir de uma amostra aleatória simples de tamanho " $n$ ", sabe-se que a média aritmética de uma variável  $X$  foi igual a 3. Considerando que os valores possíveis para a variável  $X$  sejam -1 e +4, julgue o item que se segue.

A mediana amostral da variável  $X$  foi igual a 2,5.

C - Certo.

E - Errado.



Q.06 (CEBRASPE / Tribunal de Justiça do Pará / Analista Judiciário / 2019)

Uma amostra aleatória dos registros de furto no município de Abaetetuba, no ano de 2017, apresenta os valores 245, 247, 238, 282 e 261. Uma estimativa não tendenciosa e eficiente para a média de furtos ocorridos em Abaetetuba no ano de 2017, considerando os dados apresentados na amostra, é

- a) 238,0.
- b) 254,6.
- c) 260,0.
- d) 282,7.
- e) 308,5.

Q.07 (CEBRASPE / IPHAN / Analista / 2018)

Define-se estatística descritiva como a etapa inicial da análise utilizada para descrever e resumir dados. Em relação às medidas descritivas, julgue o item a seguir.

A mediana é o valor que ocupa a posição central da série de observações de uma variável, dividindo-se o conjunto de valores ordenados em partes assimétricas desiguais.

C - Certo.

E - Errado.

Q.08 (CEBRASPE / IPHAN / Analista / 2018)

Uma pesquisa a respeito das quantidades de teatros em cada uma de 11 cidades brasileiras selecionadas apresentou o seguinte resultado: {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4}.

Com referência a esses dados, julgue o item seguinte.

A mediana do conjunto é igual a 3.

C - Certo.

E - Errado.

Q.09 (CEBRASPE / Prof. Pref São Cristóvão /2019)

A tabela seguinte mostra a distribuição das idades dos 30 alunos da turma A do quinto ano de uma escola de ensino fundamental.



Idade (em anos)	9	10	11	12	13	14
Quantidade de estudantes	6	22	0	1	0	1

A partir dessa tabela, julgue o item.

Se, em outra turma B, as frequências das idades fossem respectivamente iguais ao dobro das frequências da turma A, então a média aritmética das idades da turma B seria igual ao dobro da média da turma A.

C - CERTO

E - ERRADO

## Gabarito - CEBRASPE

GABARITO



<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>
E	E	B	E	C	E	B	A	E

## Questões FCC

Q.01 (FCC / TRT – 18ª / Oficial de Justiça / 2023)

Em uma turma de 60 alunos, 10 foram reprovados. Sabendo-se que a média dos alunos aprovados foi 8,5 e a média dos alunos reprovados foi de 3,4, a média da turma foi

- a) 8,35
- b) 7,65
- c) 7,95
- d) 6,95
- e) 7,05



Q.02 (FCC / COPERGÁS / Analista / 2023)

Quatro trabalhadores executam uma tarefa em tempos diferentes. Os tempos gastos para realizar essa tarefa foram 1h35min, 1h40min, 1h33min e 1h43min. Um novo trabalhador, sabendo do tempo de seus colegas, garante que o tempo médio para realizar essa tarefa será de 1h35min com a sua participação. O tempo desse novo trabalhador é

- a) 1h22min.
- b) 1h34min.
- c) 1h24min.
- d) 1h20min.
- e) 1h30min

Q.03 (FCC / Procuradoria – PGE-AM / Analista / 2022)

Uma ginasta executa três vezes uma determinada prova. Suas notas, na primeira e segunda tentativas foram, respectivamente, metade e dois terços da nota da terceira tentativa. A média aritmética das notas das três tentativas foi de 32,5 pontos. A nota da primeira prova foi

- a) 20,5 pontos.
- b) 30,0 pontos.
- c) 22,5 pontos.
- d) 45,0 pontos.
- e) 20,0 pontos.

**Gabarito - FCC**

GABARITO



<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>
B	C	C



## MEDIDAS SEPARATRIZES

Sabemos que as *medidas separatrizes* servem para dividir o conjunto de dados ordenados (crescente ou decrescente) em duas ou mais partes. O nome da medida separatriz é definido de acordo com a quantidade de partes em que o conjunto de dados é dividido.

As principais medidas separatrizes as seguintes: mediana, quartis, decis e percentis.

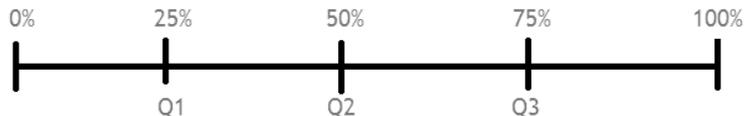
Iremos estudar as três medidas de separatrizes a seguir:

### Quartil, Decil e Percentil

A *mediana* já foi estudada em aula anterior.

#### Quartil

Os *quartis* dividem os dados em *quatro partes* de mesma frequência. Desta forma, teremos sempre *três quartis* e cada um deles corresponderá a **25%** do conjunto de dados. Observem a figura abaixo.



#### Observações importantes:

- 1)  $Q_1$  = *primeiro quartil* = valor situado de tal forma que uma quarta parte (25%) dos dados é menor que ele e as três quartas partes restantes (75%) são os maiores;
- 2)  $Q_2$  = *segundo quartil* = coincide com a mediana e separa os 50% menores dos 50% maiores;
- 3)  $Q_3$  = *terceiro quartil* = valor situado de tal forma que as três quartas partes (75%) dos dados é menor que ele e uma quarta parte restante (25%) é maior;



- 4)  $Q_1$  será a mediana dos valores que sobraram à esquerda da mediana ( $Q_2$ );
- 5)  $Q_3$  será a mediana dos valores que sobraram à direita da mediana ( $Q_2$ );
- 6) A amplitude interquartílica é dada por:  $Q_3 - Q_1$
- 7) A amplitude semi-interquartílica ou desvio quartílico é dado por:  $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

Considere o seguinte o conjunto de dados {1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 9, 9, 12}. Calcule os quartis?

**Primeira forma:** calculando primeiro a mediana e depois disso utilizar as observações 4 e 5.

Nesse caso, temos um número ímpar. Logo, podemos encontrar valor central da seguinte forma:

$$\frac{n + 1}{2} \text{ (posição da mediana)}$$

No nosso conjunto de dados temos 11 elementos.

$$\frac{11 + 1}{2} = \frac{12}{2} = 6^\circ \text{ posição}$$

{1, 2, 2, 3, 4, **5**, 5, 6, 9, 9, 12}

Portanto, a mediana é **5** e conseqüentemente  $Q_2$  também será **5**.

Utilizando a observação (4) podemos encontrar  $Q_1$ , achando a mediana dos elementos que sobraram à esquerda mediana que encontramos. Nesse caso, temos 5 elementos no conjunto de dados.

{1, 2, 2, 3, 4, ~~5~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~9~~, ~~9~~, ~~12~~}

Temos um número ímpar novamente.

$$\frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3^\circ \text{ posição}$$

{1, 2, **2**, 3, 4}

Portanto,  $Q_1$  será **2**.

Utilizando a observação (5) podemos encontrar  $Q_3$ , achando a mediana dos elementos que sobraram à direita mediana que encontramos. Neste caso, temos 5 elementos no conjunto de dados.

{~~1~~, ~~2~~, ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, **5**, 5, 6, 9, 9, 12}



Temos um número ímpar novamente.

$$\frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3^{\circ} \text{ posição}$$

{5, 6, 9, 9, 12}

Portanto,  $Q_3$  será 9.

Desta forma, para Rol em análise temos as seguintes quantis.

{1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 9, 9, 12}

↑            ↑            ↑  
 $Q_1$          $Q_2$          $Q_3$

=  
Mediana

**Observação:** se o número de elementos for par, temos que utilizar as seguintes expressões para encontrar a mediana.

Primeira posição central:  $\frac{n}{2}$

Segunda posição central:  $\frac{n}{2} + 1$

Depois é só fazer a média das duas posições.

**Segunda forma:** aqui utilizamos a seguinte expressão para calcular a posição dos quantis:

$$P_{Q_k} = \frac{k}{4} \cdot n$$

Onde:

$k$  pode assumir o valor 1, 2 ou 3. Vai depender do quartil que se deseja calcular.

$n$  é o número de elementos do conjunto de dados

Pessoal, se o valor da posição não der um valor exato, temos que arredondar para cima.

Considere o seguinte o conjunto de dados {1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 9, 9, 12}. Calcule a posição dos quantis?

1) Cálculo de  $P_{Q_1}$



$$P_{Q_1} = \frac{1}{4} \cdot 11 = 2,75 \approx 3^\circ \text{ posição}$$

2) Cálculo de  $P_{Q_2}$

$$P_{Q_2} = \frac{2}{4} \cdot 11 = 5,5 \approx 6^\circ \text{ posição}$$

2) Cálculo de  $P_{Q_3}$

$$P_{Q_3} = \frac{3}{4} \cdot 11 = 8,25 \approx 9^\circ \text{ posição}$$

Superada essa parte, temos que aprender a calcular os quartis para dados agrupados e agrupados em classes. A forma de se calcular é semelhante ao cálculo da mediana (vista em aula anterior).

- Quartil para Dados agrupados por valor

Para encontrar os quartis temos que utilizar a frequência acumulada.

<i>idades</i>	<i>frequência Absoluta (fi)</i>	<i>Frequência Acumulada (fac)</i>
10	12	12
20	5	17
30	13	30
40	5	35
50	6	41
60	9	50
<i>Total</i>	<b>50</b>	

Para encontrar a posição dos quartis, basta utilizar a seguinte expressão:

$$P_{Q_k} = \frac{k}{4} \cdot n$$

Onde:

$k$  pode assumir o valor 1, 2 ou 3. Vai depender do quartil que se deseja calcular.

$n$  é o número de elementos do conjunto de dados.

Para  $Q_2$  temos o seguinte:



$$P_{Q_1} = \frac{1}{4} \cdot 50 = 12,5 \approx 13^{\circ} \text{posição}$$

Portanto, observando a coluna das frequências acumuladas, podemos ver que a posição 13 corresponde a **20** anos. Logo,  $Q_1$  corresponde a 20 anos.

Para  $Q_2$  temos o seguinte:

$$P_{Q_2} = \frac{2}{4} \cdot 50 = 25^{\circ} \text{posição}$$

Portanto, observando a coluna das frequências acumuladas, podemos ver que a posição 25 corresponde a **30** anos. Logo,  $Q_2$  corresponde a 30 anos.

Para  $Q_3$  temos o seguinte:

$$P_{Q_3} = \frac{3}{4} \cdot 50 = 37,5 \approx 38^{\circ} \text{posição}$$

Portanto, observando a coluna das frequências acumuladas, podemos ver que a posição 38 corresponde a **50** anos. Logo,  $Q_3$  corresponde a 50 anos.

- Quartil para Dados Agrupados em Classes

Para encontrar os quartis também utilizamos a frequência acumulada.

<i>idades</i>	<i>frequência Absoluta (fi)</i>	<i>Frequência Acumulada (fac)</i>
0 † 10	12	12
10 † 20	5	17
20 † 30	13	30
30 † 40	5	35
40 † 50	6	41
50 † 60	9	50
Total	50	

De posse da coluna das frequências acumulada, a primeira coisa a ser feita é encontrar a posição da classe do quartil desejado. Para isso, basta utilizar a seguinte expressão:

$$P_{Q_k} = \frac{k}{4} \cdot n$$

A fórmula do quartil é a seguinte:



$$Q_k = l_{inf} + \left[ \frac{\left(\frac{k}{4} \cdot n\right) - f_{ac_{ant}}}{f_i} \right] \cdot h$$

Onde:

$n$  = número de elementos

$l_{inf}$  = limite inferior da classe do quartil

$f_{ac_{ant}}$  = frequência acumulada anterior à classe do quartil

$f_i$  = frequência absoluta simples da classe do quartil

$h$  = amplitude da classe do quartil =  $l_{sup} - l_{inf}$

$k$  = (1, 2 ou 3), vai depender do quartil desejado

Para exemplificar, iremos calcular o  $Q_2$ . No nosso exemplo, o "n" é igual a 50 e "h" é 10.

A posição de  $Q_2$  será a seguinte:

$$P_{Q_2} = \frac{2}{4} \cdot 50 = 25^\circ \text{ posição}$$

Desta forma, a classe do  $Q_2$  fica entre 20 e 30. Sendo, portanto, 13 o valor da frequência absoluta simples e 17 a frequência acumulada anterior a classe do quartil. Aplicando a fórmula, ficamos com o seguinte:

$$Q_2 = l_{inf} + \left[ \frac{\left(\frac{2}{4} \cdot n\right) - f_{ac_{ant}}}{f_i} \right] \cdot h = 20 + \left[ \frac{\left(\frac{2}{4} \cdot 50 - 17\right)}{13} \right] \cdot 10 = 20 + \left[ \frac{25 - 17}{13} \right] \cdot 10Q$$

$$Q_2 = 20 + \frac{8}{13} \cdot 10$$

$$M_d = 20 + 6,15 = 26,15$$

## Decil

Os **decis** dividem os dados em **dez partes** de mesma frequência. Desta forma, teremos sempre **nove decis** e cada um deles corresponderá a **10%** do conjunto de dados. Observem a figura abaixo.





$D_5 = \text{quinto decil} = \text{coincide com a mediana e separa os 50\% \text{ menores dos 50\% maiores;}}$

- Decil para Dados em Rol ou Agrupados

Os cálculos dos decis são semelhantes aos dos quartis. Logo, para calcular a posição do decil, utilizamos a seguinte expressão:

$$P_{Dk} = \frac{k}{10} \cdot n$$

Onde:

$k$  pode assumir o valor 1, 2, 3, ..., 9. Vai depender do decil que se deseja calcular.

$n$  é o número de elementos do conjunto de dados.

- Quartil para Dados agrupados em classe

Os cálculos são semelhantes aos do quartis. Sendo a posição do decil encontrada pela seguinte expressão:

$$P_{Dk} = \frac{k}{10} \cdot n$$

$k$  pode assumir o valor 1, 2, 3, ..., 9. Vai depender do decil que se deseja calcular.

$n$  é o número de elementos do conjunto de dados.

De posse, da posição do decil podemos localizar a classe do decil e com isso calcular ele através da seguinte fórmula:



$$D_k = l_{inf} + \left[ \frac{\left( \frac{k}{10} \cdot n \right) - f_{ac_{ant}}}{f_i} \right] \cdot h$$

Onde:

$n$  = número de elementos

$l_{inf}$  = limite inferior da classe do decil

$f_{ac_{ant}}$  = frequência acumulada anterior à classe do decil

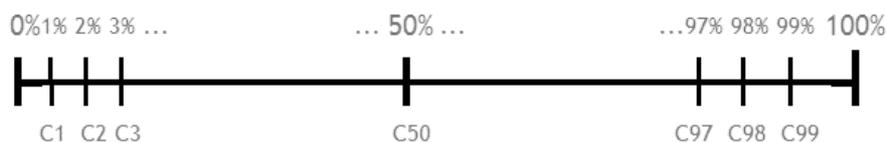
$f_i$  = frequência absoluta simples da classe do decil

$h$  = amplitude da classe do decil =  $l_{sup} - l_{inf}$

$k = (1, 2, 3, \dots, 9)$ , vai depender do decil desejado

## Percentil

Os **percentis (ou centil)** dividem os dados em **100 partes** de mesma frequência. Desta forma, teremos sempre **noventa e nove percentis** e cada um deles corresponderá a **1%** do conjunto de dados. Observem a figura abaixo.



$P_{50}$  = **quincuagésimo decil** = coincide com a mediana e separa os 50% menores dos 50% maiores;

- Percentil para Dados em Rol ou Agrupados

Os cálculos dos decis são semelhantes aos dos quartis. Logo, para calcular a posição do decil, utilizamos a seguinte expressão:

$$P_{Pk} = \frac{k}{100} \cdot n$$



Onde:

$k$  pode assumir o valor 1, 2, 3, ..., 99. Vai depender do decil que se deseja calcular.

$n$  é o número de elementos do conjunto de dados.

- Percentil para Dados agrupados em classe

Os cálculos são semelhantes aos do quantis. Sendo a posição do decil encontrada pela seguinte expressão:

$$P_{Pk} = \frac{k}{100} \cdot n$$

$k$  pode assumir o valor 1, 2, 3, ..., 99. Vai depender do decil que se deseja calcular.

$n$  é o número de elementos do conjunto de dados.

De posse, da posição do decil podemos localizar a classe do decil e com isso calcular ele através da seguinte fórmula:

$$P_k = l_{inf} + \left[ \frac{\left( \frac{k}{100} \cdot n \right) - f_{ac_{ant}}}{f_i} \right] \cdot h$$

Onde:

$n$  = número de elementos

$l_{inf}$  = limite inferior da classe do percentil

$f_{ac_{ant}}$  = frequência acumulada anterior à classe do percentil

$f_i$  = frequência absoluta simples da classe do percentil

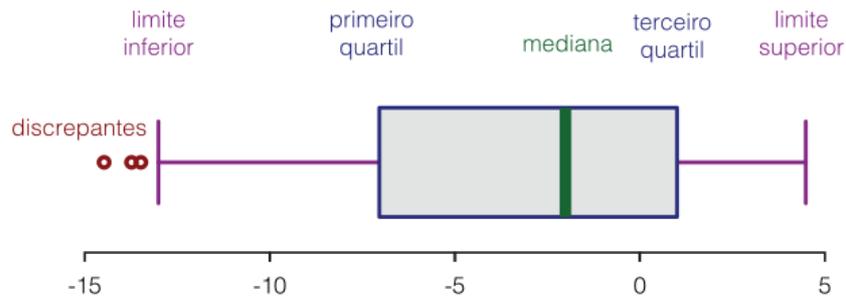
$h$  = amplitude da classe do percentil =  $l_{sup} - l_{inf}$

$k$  = (1, 2, 3, ..., 99), vai depender do percentil desejado



## BOX PLOT

Pessoal, o *box plot* (diagrama de caixas) é um gráfico que utiliza os quartis para representar o conjunto de dados. Sua representação pode ser tanto horizontal como vertical. Observem a figura abaixo.



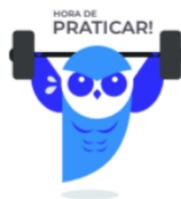
De posse de uma box plot, podemos encontrar as seguintes medidas:

- Limite inferior = valor mínimo;
- Limite superior = valor máximo;
- Valores discrepantes = outliers;
- Os quartis ( $Q_1$ ,  $Q_2=M_d$  e  $Q_3$ );
- Amplitude interquartílica =  $Q_3 - Q_1$
- Amplitude semi- interquartílica ou desvio quartílico =  $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

## QUESTÕES ESTRATÉGICAS

Nesta seção, apresentamos e comentamos uma amostra de questões objetivas selecionadas estrategicamente: são questões com nível de dificuldade semelhante ao que você deve esperar para a sua prova e que, em conjunto, abordam os principais pontos do assunto.

A ideia, aqui, não é que você fixe o conteúdo por meio de uma bateria extensa de questões, mas que você faça uma boa revisão global do assunto a partir de, relativamente, poucas questões.



Q.01 (IBFC/Supervisor de Pesquisas (IBGE)/Suporte Gerencial/2021)



Marcos pretende determinar a mediana referente aos dados brutos coletados e relacionados abaixo:

23 - 22 - 21 - 22 - 32 - 33

41 - 21 - 20 - 32 - 42 - 38

De acordo com os dados, o resultado encontrado por Marcos é igual a:

- a) 37.
- b) 33.
- c) 41.
- d) 27,5.
- e) 28.

#### Comentários:

Pessoal, aqui a banca dar dados brutos é pede a mediana. A primeira coisa a ser feita é organizar os dados em um Rol.

{20, 21, 21, 22, 22, 23, 32, 32, 33, 38, 41, 42}

Temos 12 elementos nesse Rol, logo um número par de elementos. Desta forma, temos que encontrar as duas posições centrais.

Primeira posição central:  $\frac{n}{2} = \frac{12}{2} = 6^\circ$  posição

Segunda posição central:  $\frac{n}{2} + 1 = \frac{12}{2} + 1 = 7^\circ$  posição

Portanto, a mediana será a média dessas duas posições centrais.

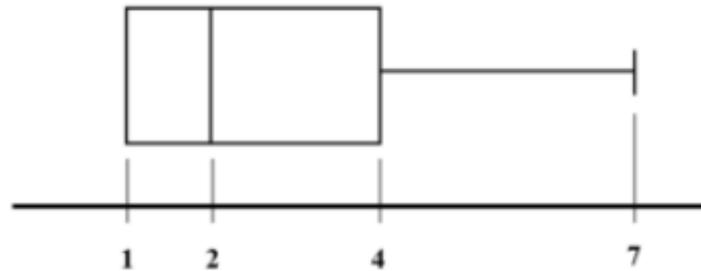
{20, 21, 21, 22, 22, 23, 32, 32, 33, 38, 41, 42}

$$M_d = \frac{23 + 32}{2} = \frac{55}{2} = 27,5$$

Gabarito: D



Q.02 (CEBRASPE - Analista de Controle Externo (TCE-RJ)/Controle Externo/Tecnologia da Informação/2021)



Considerando que uma variável quantitativa discreta  $X$  se distribui conforme o diagrama boxplot anterior, julgue o item seguinte.

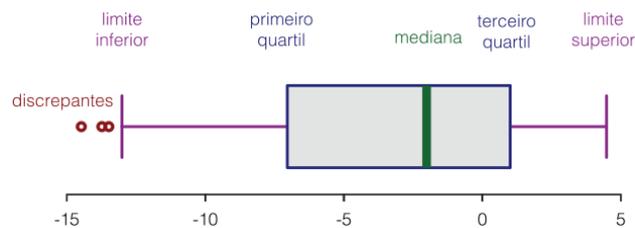
A mediana da variável  $X$  é igual a 4.

C – CERTO

E - ERRADO

Comentários:

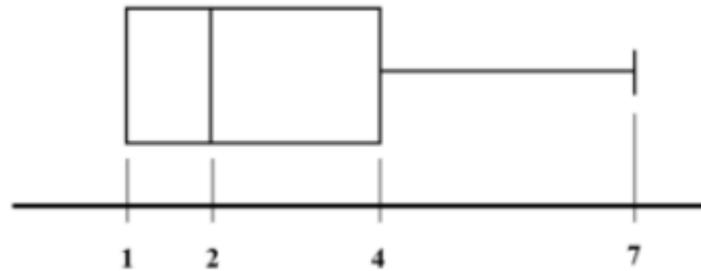
Pessoal, nessa questão temos que conhecer a estrutura do box plot. Conforme estudado na aula, podemos facilmente observar que está errado. Pois, o valor da mediana corresponde a 2. O valor 4 corresponde ao  $Q_3$ . Façam uma comparação da figura apresentada pela banca com a que vimos na aula.



Gabarito: Errado

Q.03 (CEBRASPE - Analista de Controle Externo (TCE-RJ)/Controle Externo/Tecnologia da Informação/2021)





Considerando que uma variável quantitativa discreta  $X$  se distribui conforme o diagrama boxplot anterior, julgue o item seguinte.

O diagrama boxplot indica que o intervalo interquartil (ou interquartílico) da distribuição da variável  $X$  é igual a 3.

C – CERTO

E - ERRADO

**Comentários:**

A amplitude interquartílica é dada pela diferença entre  $Q_3$  e  $Q_1$ . Logo,

$$Q_1 = 1$$

$$Q_3 = 4$$

$$\text{amplitude interquartílica} = Q_3 - Q_1 = 4 - 1 = 3$$

Portanto, correto o item.

**Gabarito: Certo**

**Q.04 (COMPERVE (UFRN) - Profissional Analista Superior (CRECI 17 RN)/Agente Fiscal/2021)**

O quadro abaixo descreve os cinco imóveis comerciais de um mesmo dono, mostrando os valores, em reais, dos aluguéis de apenas quatro deles.

Imóvel 1	Imóvel 2	Imóvel 3	Imóvel 4	Imóvel 5
2.500	4.300	1.250	1.700	x

Se a mediana dos valores dos aluguéis desses cinco imóveis é 1,7 mil reais, conclui-se que

a) o valor do aluguel do Imóvel 5 é 3 mil reais.



- b) o Imóvel 5 é aquele cujo aluguel tem maior valor.
- c) o valor do aluguel do Imóvel 5 é, no máximo, 1,7 mil reais.
- d) o aluguel do Imóvel 5 custa mais de 2,5 mil reais.

**Comentários:**

Pessoal, nessa questão a banca dá um quadro com os valores de aluguéis de 5 imóveis e quer saber o valor do aluguel do imóvel 5. Além disso, diz que o valor da média é 1.700. Com base nessas informações, podemos organizar os dados da seguinte forma:

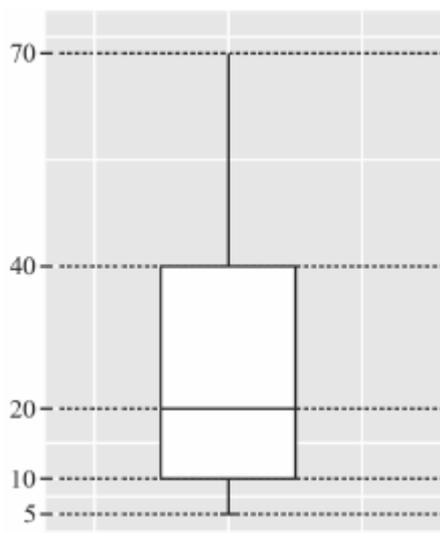
		1.700	2.500	4.300
		Mediana = imóvel 4	Imóvel 1	Imóvel 2

Vejam que com as informações que temos não podemos afirmar que o imóvel 3 (1.250) irá ocupar a posição 1 ou 2.

Fazendo uma análise nas alternativas, podemos observar que a única resposta possível é a Letra C, pois o valor do imóvel 5, com certeza, será um valor, no máximo, igual a 1.700.

**Gabarito: C**

**Q.05 (CEBRASPE (CESPE) - Analista Judiciário (TJ PA)/Estatística/2020)**



Considerando que o desenho esquemático (boxplot) antecedente se refere a uma variável quantitativa X, assinale a opção correta.

- a) O intervalo interquartil é igual a 65.



b) Metade da distribuição da variável  $X$  se encontra entre os valores 20 e 40.

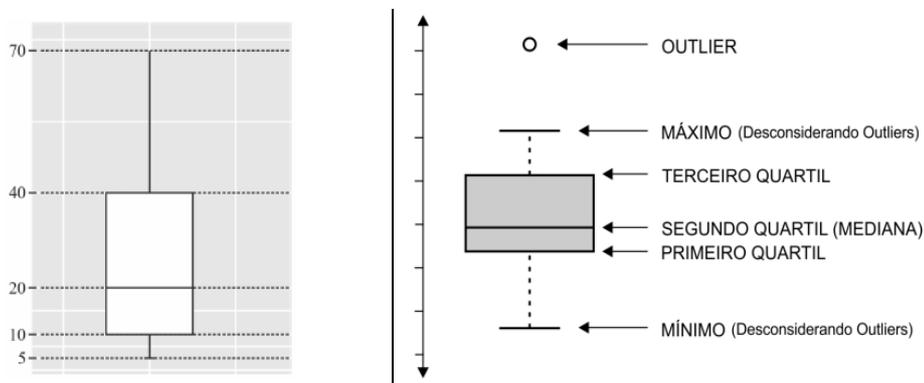
c) Os valores da variável  $X$  que se encontram no intervalo  $[5;10]$  representam 5% da distribuição de  $X$ .

d) A mediana de  $X$  é igual a 25.

e) O primeiro quartil da distribuição de  $X$  é igual a 10.

### Comentários:

Pessoal, nessa questão iremos analisar cada alternativa tendo como base o boxplot dado. Além disso, essa questão exige o conhecimento da estrutura de uma boxplot. Logo, iremos comparar a gráfico dado na questão como o gráfico abaixo:



**Letra (A)** – Errada

A amplitude interquartílica é dada pela diferença entre  $Q_3$  e  $Q_1$ . Logo,

$$Q_1 = 10$$

$$Q_3 = 40$$

$$\text{amplitude interquartílica} = Q_3 - Q_1 = 40 - 10 = 30$$

**Letra (B)** – Errada, pois como a mediana é 20, metade encontra-se entre 5 e 20 e outra metade entre 20 e 70.

**Letra (C)** – Errada. Pois, entre 5 e 10 temos 25% dos dados. Nesse intervalo, temos os valores inferiores ao  $Q_1$ .

**Letra (D)** – Errada. Podemos observar que a mediana é 20.  $M_d = Q_2$ .

**Letra (E)** – Correta. Pois, o  $Q_1$  é igual a 10.



Gabarito: E

Q.06 (CEBRASPE / Prefeitura de Imbé / 2019)

Uma pesquisa a respeito das quantidades de teatros em cada uma de 11 cidades brasileiras selecionadas apresentou o seguinte resultado: {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4}.

Com referência a esses dados, julgue o item seguinte.

O valor do primeiro quartil do conjunto de dados ( $Q_{1/4}$ ) é igual a 3.

C – CERTO

E - ERRADO

Comentários:

$$Md = \frac{11+1}{2} = 6^{\circ} \text{ termo } \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4\}$$

O elemento de 6ª posição é o número 3, o qual será o nosso 2º quartil.

Logo, o nosso primeiro quartil será representado pelo número 2:

{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4}

Ou:

$$\text{Posição do quartil inferior } (Q_1) = \frac{n+1}{4}$$

O conjunto de dados do enunciado é:

{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4}

O conjunto possui 11 elementos, portanto  $n = 11$ . Assim,

$$\text{Posição do quartil inferior } (Q_1) = \frac{11+1}{4} = 3^{\circ} \text{ termo } \{1, 2, \underline{2}, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4\}$$

Portanto,  $Q_1$  é o elemento cuja posição no conjunto (ordenado) é 3.

Logo,  $Q(1/4) = 2$

Gabarito: Errado

Q.07 (CEBRASPE / IPHAN / Analista / 2018)



Uma pesquisa a respeito das quantidades de teatros em cada uma de 11 cidades brasileiras selecionadas apresentou o seguinte resultado: {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4}.

Com referência a esses dados, julgue o item seguinte.

O valor do terceiro quartil do conjunto de dados ( $Q_{3/4}$ ) é igual a 4.

C – CERTO

E - ERRADO

### Comentários:

Pessoal, se você conhece o conceito de Quartil, não será necessário nem fazer conta.

Percebe-se, visualmente, que o ( $Q_{3/4}$ ) será o número 4, ok?

Mas, vamos à solução técnica:

O segundo quartil é a mediana da sequência apresentada.

Sequência = {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4}

Como o número de elementos é ímpar (11), para descobrir a posição do elemento que será a mediana, adicionamos 1 e dividimos o resultado por dois.

$Md = \frac{11+1}{2} = 6^{\circ}$  termo {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4}

O elemento de 6ª posição é o número 3, o qual será o nosso 2º quartil.

O 3º quartil pode ser obtido pela mediana dos números que estiverem à direita do 2º quartil.

{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4}

Como há 5 elementos:

$Md = \frac{5+1}{2} = 3$  {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4}

Logo,  $Q_{3/4} = 4$

Gabarito: Certo



## LISTA DE QUESTÕES ESTRATÉGICAS

Q.01 (IBFC/Supervisor de Pesquisas (IBGE) /Suporte Gerencial/2021)

Marcos pretende determinar a mediana referente aos dados brutos coletados e relacionados abaixo:

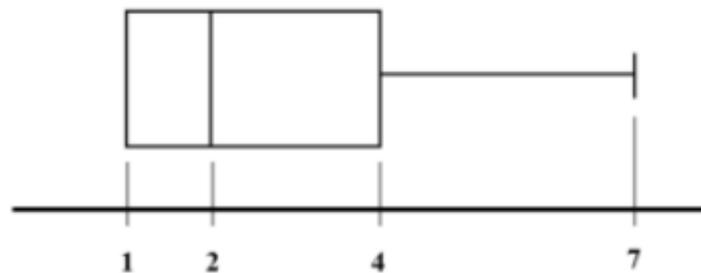
23 - 22 - 21 - 22 - 32 - 33

41 - 21 - 20 - 32 - 42 - 38

De acordo com os dados, o resultado encontrado por Marcos é igual a:

- a) 37.
- b) 33.
- c) 41.
- d) 27,5.
- e) 28.

Q.02 (CEBRASPE - Analista de Controle Externo (TCE-RJ)/Controle Externo/Tecnologia da Informação/2021)



Considerando que uma variável quantitativa discreta  $X$  se distribui conforme o diagrama boxplot anterior, julgue o item seguinte.

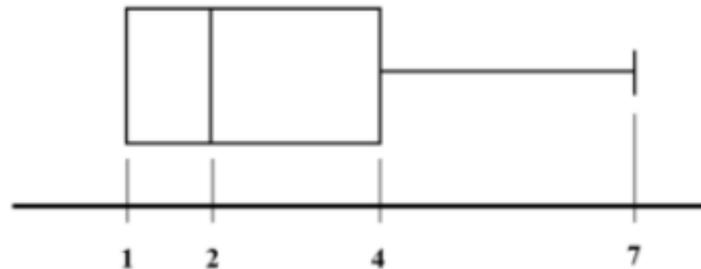
A mediana da variável  $X$  é igual a 4.

C – CERTO



E - ERRADO

Q.03 (CEBRASPE - Analista de Controle Externo (TCE-RJ)/Controle Externo/Tecnologia da Informação/2021)



Considerando que uma variável quantitativa discreta  $X$  se distribui conforme o diagrama boxplot anterior, julgue o item seguinte.

O diagrama boxplot indica que o intervalo interquartil (ou interquartílico) da distribuição da variável  $X$  é igual a 3.

C – CERTO

E - ERRADO

Q.04 (COMPERVE (UFRN) - Profissional Analista Superior (CRECI 17 RN)/Agente Fiscal/2021)

O quadro abaixo descreve os cinco imóveis comerciais de um mesmo dono, mostrando os valores, em reais, dos aluguéis de apenas quatro deles.

Imóvel 1	Imóvel 2	Imóvel 3	Imóvel 4	Imóvel 5
2.500	4.300	1.250	1.700	x

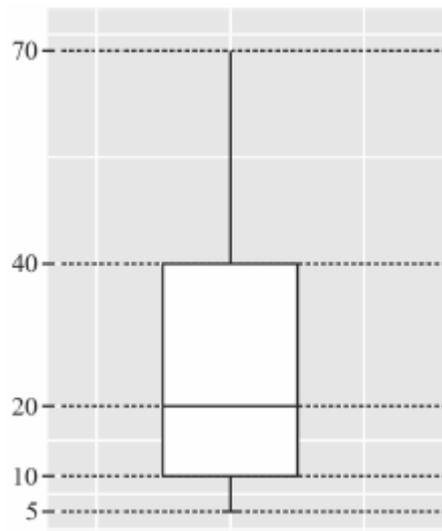
Se a mediana dos valores dos aluguéis desses cinco imóveis é 1,7 mil reais, conclui-se que

- a) o valor do aluguel do Imóvel 5 é 3 mil reais.
- b) o Imóvel 5 é aquele cujo aluguel tem maior valor.
- c) o valor do aluguel do Imóvel 5 é, no máximo, 1,7 mil reais.



d) o aluguel do Imóvel 5 custa mais de 2,5 mil reais.

Q.05 (CEBRASPE (CESPE) - Analista Judiciário (TJ PA)/Estatística/2020)



Considerando que o desenho esquemático (boxplot) antecedente se refere a uma variável quantitativa  $X$ , assinale a opção correta.

- a) O intervalo interquartil é igual a 65.
- b) Metade da distribuição da variável  $X$  se encontra entre os valores 20 e 40.
- c) Os valores da variável  $X$  que se encontram no intervalo  $[5;10]$  representam 5% da distribuição de  $X$ .
- d) A mediana de  $X$  é igual a 25.
- e) O primeiro quartil da distribuição de  $X$  é igual a 10.

Q.06 (CEBRASPE / Prefeitura de Imbé / 2019)

Uma pesquisa a respeito das quantidades de teatros em cada uma de 11 cidades brasileiras selecionadas apresentou o seguinte resultado:  $\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4\}$ .

Com referência a esses dados, julgue o item seguinte.

O valor do primeiro quartil do conjunto de dados ( $Q1/4$ ) é igual a 3.

C – CERTO

E – ERRADO



Q.07 (CEBRASPE / IPHAN / Analista / 2018)

Uma pesquisa a respeito das quantidades de teatros em cada uma de 11 cidades brasileiras selecionadas apresentou o seguinte resultado: {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4}.

Com referência a esses dados, julgue o item seguinte.

O valor do terceiro quartil do conjunto de dados (Q3/4) é igual a 4.

C – CERTO

E - ERRADO

**Gabarito**

GABARITO



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	E	C	C	E	E	C	*	*	*



# VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

## Sumário

<i>Roteiro de revisão e pontos do assunto que merecem destaque</i> .....	2
<i>Variáveis Aleatórias Discretas</i> .....	2
<i>Esperança Matemática</i> .....	2
<i>Moda</i> .....	6
<i>Função de Distribuição Acumulada</i> .....	7
<i>Mediana</i> .....	7
<i>Variância e Desvio Padrão</i> .....	9
<i>Covariância e Correlação</i> .....	11
<i>Variância da Soma e da Diferença</i> .....	15
<i>Coeficiente de Variação e Variância Relativa</i> .....	16
<i>Questões estratégicas</i> .....	17
<i>Lista de Questões Estratégicas</i> .....	30
<i>Gabarito</i> .....	35



## ROTEIRO DE REVISÃO E PONTOS DO ASSUNTO QUE MERECEM DESTAQUE

A ideia desta seção é apresentar um roteiro para que você realize uma revisão completa do assunto e, ao mesmo tempo, destacar aspectos do conteúdo que merecem atenção.

Para revisar e ficar bem preparado no assunto, você precisa, basicamente, seguir os passos a seguir:

### VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

O estudo das **variáveis aleatórias** é fundamental na estatística inferencial. Essas variáveis podem ser discretas ou contínuas. As **discretas** podem assumir apenas certos valores, e são fruto da contagem. Já a **contínua** resulta de uma medida e pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo.

Na aula de hoje, iremos estudar a **variável aleatória discreta**. Esse tipo de variável está associada a uma distribuição de probabilidade.

#### Esperança Matemática

A **esperança matemática** é também chamada de valor médio ou simplesmente média. Sua representação é dada por:

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P(X_i)$$

Portanto, a esperança de uma variável aleatória discreta é dada pela multiplicação de cada valor da variável pela sua probabilidade. Depois disso, basta fazer o somatório.

Para exemplificar o cálculo da esperança, iremos utilizar o exemplo clássico de um lançamento de um dado honesto. Um dado honesto tem 6 faces e as probabilidades são iguais a 1/6.

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

$X_i$	$P(X_i)$	$X_i \cdot P(X_i)$
1	1/6	$1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$



2	1/6	$2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$
3	1/6	$3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$
4	1/6	$4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$
5	1/6	$4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
6	1/6	$6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{6}$
<b>Total</b>	<b>1</b>	<b>21/6</b>

Portanto, a  $E(X)$  será

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P(X_i) = \frac{21}{6}$$

### Propriedades da Esperança Matemática

As propriedades descritas a seguir são aplicadas tanto para variáveis aleatórias discretas quanto para contínua. O conhecimento dessas propriedades é fundamental para resolver de forma rápida uma questão. Além disso, elas podem ser utilizadas de maneira conjunta.

1)  $E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$

ou

$$E\left(\frac{X}{k}\right) = \frac{E(X)}{k}$$

2)  $E(X + k) = E(X) + k$

ou

$$E(X - k) = E(X) - k$$

As propriedades (1) e (2) são iguais às vistas quando estudamos as propriedades da média aritmética.

- Se for multiplicada/dividida uma variável aleatória "k", a esperança ficará multiplicada/dividida por "k".
- Se for somada/subtraída uma variável aleatória "k", a esperança ficará somada/subtraída a "k".





### Exemplo!

Considere a seguinte tabela:

X	P(X)	X.P(X)
1	0,25	0,25
2	0,10	0,20
3	0,35	1,05
4	0,30	1,20
Total	1,00	2,70

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P(X_i) = 2,70$$

a) Se for multiplicada uma variável aleatória "2" a E(X) também ficará multiplicada por essa variável.

$$E(k \cdot X) = k \cdot E(X) = 2 \cdot 2,70 = 5,40$$

Provando:

X	P(X)	X.P(X)
1.2=2	0,25	0,50
2.2=4	0,10	0,40
3.2=6	0,35	2,10
4.2=8	0,30	2,40
Total	1,00	5,40

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P(X_i) = 5,40$$

b) Se for adicionada uma variável aleatória "2" a E(x) também ficará somada a essa variável.

$$E(X + k) = E(X) + k = 2,70 + 2 = 4,70$$

Provando:

X	P(X)	X.P(X)
1+2=3	0,25	0,75
2+2=4	0,10	0,40
3+2=5	0,35	1,75



4+2=6	0,30	1,80
Total	1,00	4,70

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P(X_i) = 4,70$$

3)  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

ou

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

A esperança da soma/subtração de duas variáveis é igual a soma/subtração das esperanças das variáveis.



### Exemplo!

Considere as seguintes tabelas: Observem que as variáveis possuem a mesma probabilidade.

X	P(X)	X.P(X)
1	0,25	0,25
2	0,10	0,20
3	0,35	1,05
4	0,30	1,20
Total	1,00	2,70

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P(X_i) = 2,70$$

Y	P(Y)	Y.P(Y)
5	0,25	1,25
6	0,10	0,60
7	0,35	2,45
8	0,30	2,40
Total	1,00	6,70

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n Y_i \cdot P(Y_i) = 6,70$$

Se for feita a soma das variáveis a esperança será igual a soma das esperanças das variáveis individualmente.

$$E(X) = 2,70$$

$$E(Y) = 6,70$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2,70 + 6,70 = 9,40$$

Provando:



$(X+Y)$	$P(X)$	$X.P(X)$
$1+5=6$	0,25	1,50
$2+6=8$	0,10	0,80
$3+7=10$	0,35	3,50
$4+8=12$	0,30	3,60
Total	1,00	9,40

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P(X_i) = 9,40$$

4)  $E(k) = k$

A esperança de uma constante é a própria constante.

5) Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias independentes, então  $E(X.Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Essa propriedade só vale se as variáveis forem independentes. Porém, o fato de se saber  $E(X.Y) = E(X) \cdot E(Y)$  não é garantia que as variáveis são independentes. Isto é, elas podem ser dependentes ou independentes.

## Moda

Sabemos que a **moda** é o valor com maior frequência em uma distribuição. Fazendo uma analogia para a distribuição de probabilidade, a **moda** será o maior valor de probabilidade. Mas, se os valores das probabilidades forem iguais, temos uma distribuição **amodal**.

Uma moda, **5**. Pois, a maior probabilidade foi 0,30 ou 30%.

$X_i$	$P(X_i)$
1	0,10
2	0,25
3	0,15
4	0,03
<b>5</b>	0,30
6	0,17

Duas modas, **2 e 5**. Pois, a maior probabilidade foi 0,25 ou 25%.

$X_i$	$P(X_i)$
1	0,10
<b>2</b>	0,25
3	0,15
4	0,13
<b>5</b>	0,25
6	0,12

Amodal, pois todas as probabilidades foram iguais.

$X_i$	$P(X_i)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6



Total	1
-------	---

Total	1
-------	---

Total	1
-------	---

## Função de Distribuição Acumulada

A **função de distribuição acumulada** de uma variável aleatória discreta mostra a probabilidade acumulada de todos os valores menores ou iguais a determinado valor. Essa função é dada por:

$$F(X) = P(X \leq x)$$

Considerem a seguinte distribuição de frequência:

x	P(X)
1	0,25
2	0,10
3	0,35
4	0,30

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 1) = 0,25$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,25 + 0,10 = 0,35$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,25 + 0,10 + 0,35 = 0,70$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,25 + 0,10 + 0,35 + 0,30 = 1$$

Portanto, se for incluída uma coluna para a frequência acumulada, a tabela ficara da seguinte forma:

x	P(X)	F(X) = P(X ≤ x)
1	0,25	0,25
2	0,10	0,35
3	0,35	0,70
4	0,30	1,00

Nas questões de prova a frequência de distribuição acumulada vem da seguinte forma:

$$F(x) = \{0, \text{ se } x < 1 \quad 0,25, \text{ se } 1 \leq x < 2 \quad 0,35, \text{ se } 2 \leq x < 3 \quad 0,70, \text{ se } 3 \leq x < 4 \quad 1, \text{ se } x \leq 4$$

## Mediana

A **mediana**, como já sabemos, divide a distribuição em duas partes iguais. Portanto, na distribuição acumulada de frequência ela é igual a **50%**. Além disso, temos os quartis que dividem a distribuição em quatro partes iguais de **25%** cada. O que dá origem ao  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ .



Na **função de distribuição acumulada** de uma variável aleatória discreta, podemos encontrar os valores de  $X$  para os quais a função de distribuição acumulada apresenta valores maiores ou iguais aos percentuais da mediana e quartis.

$$F(x_{Q_1}) \geq 25\%$$

$$F(x_{Q_2}) = F(x_{\text{mediana}}) \geq 50\%$$

$$F(x_{Q_3}) \geq 75\%$$



No cálculo tanto a mediana quanto os quartis temos que calcular a coluna de distribuição acumulada de probabilidade. Sendo que, existiram casos em que teremos exatamente a porcentagem desses parâmetros e outros em que não teremos essa coincidência. Como definimos acima, a  $F(x) \geq \%$ , logo temos duas formas de encontrar a mediana e os quartis:

Se tivermos exatamente a %, teremos que fazer a média do valor de  $X$  correspondente a % e o valor do próximo  $X$ ;

Se não tivermos exatamente a %, basta considerar o valor da mediana ou quartis o valor de  $X$  que ultrapassar a %.

Como os exemplos que faremos a seguir ficará melhor essa observação.

**Exemplo (1):** Considere a seguinte distribuição:

$x$	$P(X)$	$F(X) = P(X \leq x)$
1	0,20	0,20
2	0,15	0,35
3	0,35	0,70
4	0,30	1,00

$$M_d = Q_2 = 2$$

$$Q_1 = 3$$

$$Q_3 = 4$$



Vejam que nesse exemplo, na coluna das frequências acumuladas ultrapassaram os valores dos parâmetros que queríamos encontrar.

**Exemplo (2):** Considere a seguinte distribuição:

x	P(X)	F(X) = P(X ≤ x)
1	0,15	0,15
2	0,10	0,25
3	0,25	0,50
4	0,30	0,80
5	0,20	1,00

$$M_d = Q_2 = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$Q_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$Q_3 = 4$$

Nesse exemplo, as porcentagens da mediana/ $Q_2$  e  $Q_1$  foram exatamente as suas respectivas porcentagens, logo tivemos que fazer a média do valor de X correspondente a porcentagem e o X próximo.

## Variância e Desvio Padrão

A **variância** é uma medida de dispersão que mede o grau de dispersão da distribuição em torno da média. Desta forma, a variância de uma variável aleatória X, para uma população finita, é dada por:

$$\sigma^2 = V(X) = Var(X) = E(X - E(X))^2$$

Já o **desvio padrão** é a raiz quadrada da variância.

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Além disso,  $E(X)$  pode ser representado por  $\mu$ .

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2$$

Se for feito o desenvolvimento dessa equação, chegamos a seguinte expressão:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$





## Exemplo!

Considere a seguinte tabela:

X	P(X)
1	0,25
2	0,10
3	0,35
4	0,30

A primeira a ser feita é construir a coluna de  $X.P(X)$  e em seguida calcular a esperança.

X	P(X)	X.P(X)
1	0,25	0,25
2	0,10	0,20
3	0,35	1,05
4	0,30	1,20
Total	1,00	2,70

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P(X_i) = 2,70$$

Para calcular a variância utilizaremos a seguinte fórmula.

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Desta forma, teremos que construir uma coluna para o  $E(X^2)$ .

X	P(X)	X.P(X)	X <sup>2</sup>	X <sup>2</sup> .P(X)
1	0,25	0,25	1 <sup>2</sup> = 1	0,25 . 1 = 0,25
2	0,10	0,20	2 <sup>2</sup> = 4	0,10 . 4 = 0,40
3	0,35	1,05	3 <sup>2</sup> = 9	0,35 . 9 = 3,15
4	0,30	1,20	4 <sup>2</sup> = 16	0,30 . 16 = 4,80
Total	1,00	2,70		8,60

Aplicando a fórmula,

$$\sigma^2 = 8,60 - (2,70)^2 = 8,60 - 7,29 = 1,31$$



A desvio padrão será

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1,31}$$

## Propriedades

$$1) \text{Var}(X + k) = \text{Var}(X)$$

ou

$$\text{Var}(X - k) = \text{Var}(X)$$

$$2) \text{Var}(k \cdot X) = k^2 \cdot \text{Var}(X)$$

ou

$$\text{Var}\left(\frac{1}{k} \cdot X\right) = \frac{1}{k^2} \cdot \text{Var}(X)$$

As propriedades (1) e (2) podem ser descritas da seguinte forma:

- A soma ou subtração de uma constante "k" a todos os valores de um conjunto de dados, variância e o desvio padrão não se alteram;
- A multiplicação ou divisão de uma constante "k" a todos os valores de um conjunto de dados, a variância fica multiplicada ou dividida peelo quadrado dessa constante.

$$3) \text{Var}(k) = 0$$

A variância de uma constante "k" é zero.

$$4) \text{Se } X \text{ e } Y \text{ são variáveis aleatórias independentes, então } \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

Essa propriedade só vale se as variáveis forem independentes. Porém, o fato de se saber  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$  não é garantia que as variáveis são independentes. Isto é, elas podem ser dependentes ou independentes. Além disso, se X e Y forem independentes, a diferença  $X - Y$  também será a soma das variâncias.

$$\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

## Covariância e Correlação

Sabemos que duas variáveis aleatórias podem ser dependentes ou independentes. Sendo que é necessário também saber como se dá essa relação, isto é, se é forte ou fraca. Aqui entra em cena a covariância e a correlação.



A **covariância** é uma medida de variação entre duas variáveis aleatórias. Por exemplo, se os maiores/menores valores de uma variável corresponde principalmente aos maiores/menores valores da outra, essas variáveis tendem a mostrar um comportamento semelhante. E nesse caso, teremos uma covariância positiva. No entanto, se os maiores valores de uma variável corresponde principalmente aos menores valores da outra, essas variáveis tendem a mostrar um comportamento oposto. E nesse caso, teremos uma covariância negativa.

Vejam que, o sinal da variância é muito importante para mostrar a tendência na relação linear entre duas variáveis aleatórias.

- Se o sinal **for positivo**, temos uma relação positiva, isto é, quando uma variável aumenta, a outra também aumenta;
- Se o sinal **for negativo**, temos uma relação negativa, isto é, quando uma variável aumenta, a outras diminui.

Sendo que, o aumento ou diminuição não necessariamente ocorre na mesma magnitude, pois a covariância pode assumir qualquer valor e isso torna difícil a interpretação.

A **covariância** entre duas variáveis aleatórias é dada por:

$$cov(X, Y) = E(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)$$

Onde,

$\mu_X$  é a média (esperança de X)

$$\mu_X = E(X)$$

$\mu_Y$  é a média (esperança de Y)

$$\mu_Y = E(Y)$$

Pessoal, a fórmula da covariância pode ser desenvolvida para chegar à seguinte expressão:

$$cov(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

ou

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

Sendo,  $E(XY)$  correspondente ao seguinte:



$$E(XY) = \frac{\sum X \cdot Y}{N}$$

Onde, N é a soma dos elementos de X e Y.

Desta forma, a covariância procura mostrar se existe um comportamento de interdependência linear entre duas variáveis, mas é uma medida dimensional, sendo, portanto, afetada pelas unidades de medida de X e Y. Para corrigir esse problema, utiliza-se a medida de **correlação**. Uma vez que, a correlação é uma medida adimensional e só assume valores entre -1 e 1.

A **correlação** (ou coeficiente linear de Pearson) entre as variáveis aleatórias é dada por:

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Onde,

$\sigma_X$  é o desvio padrão de X

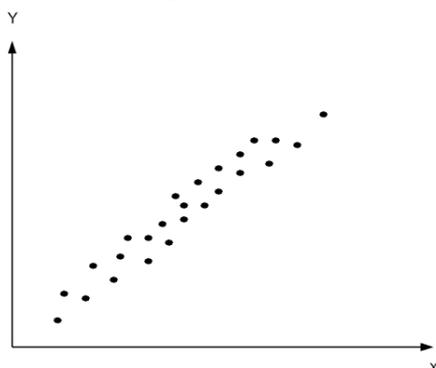
$\sigma_Y$  é o desvio padrão de Y

A interpretação do coeficiente de correlação é dada da seguinte forma:

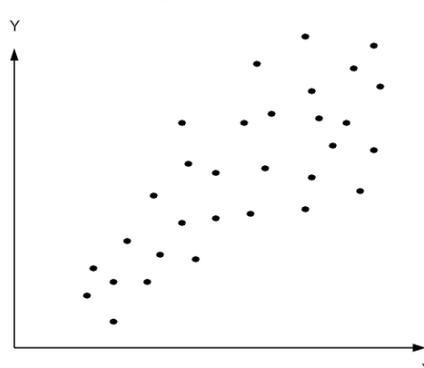
- Se  $\rho(X, Y) = -1$ , significa que as variáveis possuem correlação negativa perfeita. Se X aumentar em uma unidade, Y diminui na mesma magnitude;
- Se  $\rho(X, Y) = 0$ , significa que as variáveis não são linearmente correlacionadas. Uma variação em X não está associada a uma variação em Y de forma linear;
- Se  $\rho(X, Y) = 1$ , significa que as variáveis possuem correlação positiva perfeita. Se X aumentar em uma unidade, X aumenta na mesma magnitude;

Para ilustrar, as figuras abaixo mostram a correlação forte de positiva **(A)** e a correlação fraca e positiva **(B)**.

**(A) Correlação Forte e Positiva**



**(B) Correlação Fraca e Positiva**





$\rho(X, Y) = 1$ , relação linear perfeita e positiva;

$\rho(X, Y) = 0$ , relação linear inexistente;

$\rho(X, Y) = -1$ , relação linear perfeita e negativa;

$\rho(X, Y) > 0$ , relação linear positiva;

$\rho(X, Y) < 0$ , relação linear negativa.



Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias independentes, então  $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$ . Logo,  $cov(X, Y) = \rho(X, Y) = 0$ . Mas se  $cov(X, Y) = \rho(X, Y) = 0$  não significa que as variáveis são independentes ou dependentes.

### Propriedades da Covariância

Considere que  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são variáveis aleatórias e que " $k$ " é uma constante. É possível as seguintes relações:

1)  $cov(X, Y) = cov(Y, X)$

Aqui a covariância entre  $X$  e  $Y$  é igual à covariância entre  $Y$  e  $X$ .

2)  $cov(X, X) = Var(X)$

Na realidade, a variância de  $X$  é igual a covariância entre  $X$  e  $X$ .

3)  $cov(k, Y) = cov(X, k) = 0$



A covariância entre uma variável e uma constante é sempre zero.

$$4) \text{cov}(X + Y, Z) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z)$$

Aqui temos o desmembramento de uma soma dentro da covariância.

$$5) \text{cov}(kX, Y) = \text{cov}(X, kY) = k \cdot \text{cov}(X, Y)$$

Se uma constante estiver multiplicando uma das variáveis, ela pode sair multiplicando a variância.

## Variância da Soma e da Diferença

Quando estudamos a esperança, vimos que a soma/diferença das esperanças de duas variáveis aleatórias era dada por:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

Para a variância, a soma/diferença entre duas variáveis aleatórias é dada por:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \cdot \text{cov}(X, Y)$$

$$\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2 \cdot \text{cov}(X, Y)$$

Vejam que essas expressões são parecidas com os produtos notáveis.

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

Sendo assim, como a variância pode ser dada por:

$$\text{Var}(X) = E(X - \mu_X)^2$$

Podemos dizer que,

$$\text{Var}(X + Y) = E[(X + Y) - (\mu_X + \mu_Y)]^2$$

ou

$$\text{Var}(X + Y) = E[(X - \mu_X) + (Y - \mu_Y)]^2$$

Aplicando o produto notável, podemos chegar a seguinte expressão:

$$\text{Var}(X + Y) = E(X - \mu_X)^2 + E(Y - \mu_Y)^2 + 2 \cdot E[(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)]$$



Sendo,

$$E(X - \mu_X)^2 = Var(X)$$

$$E(Y - \mu_Y)^2 = Var(Y)$$

$$E[(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)] = cov(X, Y)$$

Portanto,

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot cov(X, Y)$$

Além disso, se as variáveis aleatórias forem multiplicadas por constantes. Por exemplo, "a" e "b", respectivamente. Teremos o seguinte:

$$Var(aX + bY) = a^2 \cdot Var(X) + b^2 \cdot Var(Y) + 2ab \cdot cov(X, Y)$$

$$Var(aX - bY) = a^2 \cdot Var(X) + b^2 \cdot Var(Y) - 2ab \cdot cov(X, Y)$$

## Coeficiente de Variação e Variância Relativa

O **Coeficiente de variação** de uma variável aleatória X relaciona o desvio-padrão com a média.

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}$$

Vejam que é a mesma fórmula que estudamos na estatística descritiva. O coeficiente de variação representa uma normalização do desvio padrão pela média. Essa normalização é feita para transformar determinados valores em escala comum e com isso comparar dispersões de variáveis com médias distintas.



### Coeficiente de Variação

É uma medida adimensional, pois o desvio-padrão e média possuem a mesma unidade;  
Normalmente é expresso em porcentagem;  
Quanto menor o CV, mais homogêneo será o conjunto de dados, ou seja, menor será a dispersão em torno da média.



Outra medida de dispersão relativa é a **Variância Relativa**. Essa medida é simplesmente o quadrado do CV.

$$VR = \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

## QUESTÕES ESTRATÉGICAS

*Nesta seção, apresentamos e comentamos uma amostra de questões objetivas selecionadas estrategicamente: são questões com nível de dificuldade semelhante ao que você deve esperar para a sua prova e que, em conjunto, abordam os principais pontos do assunto.*

*A ideia, aqui, não é que você fixe o conteúdo por meio de uma bateria extensa de questões, mas que você faça uma boa revisão global do assunto a partir de, relativamente, poucas questões.*



Q.01 (IBFC - Analista Administrativo (EBSERH)/Estatística/2020)

Numa distribuição de probabilidade discreta a variável  $X$  representa a quantidade de relógios que uma pessoa(adulta) possui:

$X =$ quantidade de relógios	$P(X)$
0	27%
1	36%
2	18%
3	16%
4	3%

De acordo com a tabela, assinale a alternativa que apresenta o valor esperado para a quantidade de relógios.

- a) 1,23.
- b) 1,18.
- c) 1,46.
- d) 1,52.
- e) 1,32.

**Comentários:**

Nessa questão, pede-se o valor esperado para a quantidade de relógio e fornece uma tabela com as quantidades de relógios ( $X$ ) e a  $P(X)$ . A esperança é dada por:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P(X_i)$$

Desta forma, basta construir uma coluna de  $X.P(X)$  e depois disso fazer o somatório e teremos a esperança.

$X$	$P(X)$	$X.P(X)$
0	27%=0,27	0 . 0,27 = 0
1	36%=0,36	1 . 0,36 = 0,36
2	18%=0,18	2 . 0,18 = 0,36
3	16%=0,16	3 . 0,16 = 0,48



4	3%=0,03	4 . 0,03 = 0,12
Total	1	1,32

Portanto, o valor esperado é **1,32**.

**Gabarito: E**

**Q.02 (CEBRASPE (CESPE) - Profissional de TI (ME)/Ciência de Dados/2020)**

		A			
		-1	0	1	total (%)
B	-1	10	5	5	20
	0	0	60	0	60
	1	10	5	5	20
	total(%)	20	70	10	100

Considerando que a tabela precedente mostra o cruzamento de duas variáveis categorizadas A e B, que foram codificadas em três níveis numéricos de resposta: -1, 0 e 1, julgue o item que se segue.

A média da variável A é negativa.

C – CERTO

E - ERRADO

**Comentários:**

Pessoal, como sabemos a média é dada por:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P(X_i)$$

A banca quer saber se a média A é negativa. Podemos dispor a tabela de valores de A da seguinte forma.

A	P(1)	P(2)	P(3)	P(total)
-1	10	0	10	20%=0,2



0	5	60	5	70%=0,7
1	5	0	5	10%=0,1
Total				100%=1

A esperança será a seguinte:

$$E(X) = (-1) \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,7 + 1 \cdot 0,1 = -0,2 + 0 + 0,1 = -0,1$$

Portanto, correta a questão.

**Gabarito: Certo**

**Q.03 (CEBRASPE (CESPE) - Profissional de TI (ME)/Ciência de Dados/2020)**

		A			
		-1	0	1	total (%)
B	-1	10	5	5	20
	0	0	60	0	60
	1	10	5	5	20
	total(%)	20	70	10	100

Considerando que a tabela precedente mostra o cruzamento de duas variáveis categorizadas A e B, que foram codificadas em três níveis numéricos de resposta: -1, 0 e 1, julgue o item que se segue.

As modas e as medianas das variáveis A e B são iguais a zero.

**C – CERTO**

**E - ERRADO**

**Comentários:**

Nessa questão, a banca quer saber se as modas e as medianas de A e B são zero. A primeira coisa a ser feita é colocar a tabela da outra forma para melhor visualização. Além disso, fazer a coluna da probabilidade acumulada.

Para variável A.

A	P(1)	P(2)	P(3)	P(total)	P(A) acum
-1	10	0	10	20%=0,2	0,2
0	5	60	5	70%=0,7	0,9



1	5	0	5	10%=0,1	0,1
Total				100%=1	

Analisando a tabela, podemos observar que na coluna de P(total) que a maior probabilidade é de 70% e corresponde a um valor de A de **zero**.

Já na mediana, basta analisar a coluna da probabilidade acumulada. Como a mediana representa 50% dos valores, podemos observar que a mediana é **zero** (pois os 0,9 ultrapassou os 50%).

Para a variável B.

B	P(1)	P(2)	P(3)	P(total)	P(B) acum
-1	10	5	5	20%=0,2	0,2
0	0	60	0	60%=0,6	0,8
1	10	5	5	20%=0,2	1,0
Total				100%=1	

Analisando a tabela, podemos observar que na coluna de P(total) que a maior probabilidade é de 60% e corresponde a um valor de B de **zero**.

Já na mediana, basta analisar a coluna da probabilidade acumulada. Como a mediana representa 50% dos valores, podemos observar que a mediana é **zero** (pois os 0,8 ultrapassou os 50%).

Desta forma, as modas e medianas são zero.

**Gabarito: Certo**

#### Q.04 (IBFC - Engenheiro (EBSERH)/Mecânico/2020)

Analise as afirmativas abaixo sobre Probabilidade e Estatística e dê valores Verdadeiro (V) ou Falso (F).

( ) São classificadas como variáveis discretas as funções para as quais é possível associar um único número real a cada evento de uma partição do espaço amostral.

( ) São classificadas como variáveis contínuas as funções para as quais é possível associar infinitos valores a um intervalo (a, b), sendo que para valores que não pertencem ao intervalo no qual se limita o experimento, a probabilidade de ocorrência é zero.

( ) A variância, ou seja, a medida estatística que concentra as probabilidades em torno da média é indicada por  $Var(x)$  ou  $\sigma^2$  e dada por:  $Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

( ) O desvio padrão indicado por  $DP(x) = \sigma$  é a raiz quadrada da variância.



**Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta de cima para baixo.**

- a) F, F, F, F.
- b) F, V, V, F.
- c) V, F, F, V.
- d) V, V, F, F.
- e) V, V, V, V.

**Comentários:**

Pessoal, essa é uma questão teórica e todas as afirmações estão verdadeiras. Sendo, portanto, muito boa para revisar o assunto.

**(V) São classificadas como variáveis discretas as funções para as quais é possível associar um único número real a cada evento de uma partição do espaço amostral.**

Pois, as [discretas](#) podem assumir apenas certos valores, e é fruto da contagem.

**(V) São classificadas como variáveis contínuas as funções para as quais é possível associar infinitos valores a um intervalo  $(a, b)$ , sendo que para valores que não pertencem ao intervalo no qual se limita o experimento, a probabilidade de ocorrência é zero.**

Pois, a [contínua](#) resulta de uma medida e pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo.

**(V) A variância, ou seja, a medida estatística que concentra as probabilidades em torno da média é indicada por  $Var(x)$  ou  $\sigma^2$  e dada por:  $Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$**

O item descreve exatamente a variância.

**(V) O desvio padrão indicado por  $DP(x) = \sigma$  é a raiz quadrada da variância.**

O item descreve exatamente a desvio padrão.

**Gabarito: E**

**Q.05 (IDECAN - Professor Efetivo de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico (IF PB)/Matemática/2019)**

**Admita que  $X$  é uma variável aleatória discreta que assume os valores 5, 10, 15 e 20. Sua função de distribuição acumulada é:**



$$\begin{cases} 0 & \text{se } x < 5 \\ 0,4 & \text{se } 5 \leq x < 10 \\ 0,7 & \text{se } 10 \leq x < 15 \\ 0,9 & \text{se } 15 \leq x < 20 \\ 1 & \text{se } x \geq 20. \end{cases}$$

O desvio padrão é

- a) 5.
- b) 6,5.
- c) 10.
- d) 25.
- e) 41,7.

**Comentários:**

Nessa questão, temos uma função de distribuição acumulada e a banca quer saber o valor do desvio padrão. Para calcular o desvio padrão, temos que calcular  $E(X)$ ,  $E(X^2)$  e a variância.

Pessoal, a função acumulada dada pela banca foi a seguinte:

$$\begin{cases} 0 & \text{se } x < 5 \\ 0,4 & \text{se } 5 \leq x < 10 \\ 0,7 & \text{se } 10 \leq x < 15 \\ 0,9 & \text{se } 15 \leq x < 20 \\ 1 & \text{se } x \geq 20. \end{cases}$$

Desta forma, a função probabilidade é dada por:

$$p(x) = P(X = x) = \{0 \text{ se } x < 5, 0,4 \text{ se } 5 \leq x < 10, 0,3 \text{ se } 10 \leq x < 15, 0,2 \text{ se } 15 \leq x < 20, 0,1 \text{ se } \geq 20\}$$

Cálculo de  $E(X)$  e  $E(X^2)$ :

$$E(X) = \sum X_i \cdot P(X)$$

$$E(X) = 5 \cdot P(X = 5) + 10 \cdot P(X = 10) + 15 \cdot P(X = 15) + 20 \cdot P(X = 20)$$

$$E(X) = 5 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,3 + 15 \cdot 0,2 + 20 \cdot 0,1$$



$$E(X) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10$$

$$E(X^2) = \sum X_i^2 \cdot P(X)$$

$$E(X^2) = 5^2 \cdot P(X = 5) + 10^2 \cdot P(X = 10) + 15^2 \cdot P(X = 15) + 20^2 \cdot P(X = 20)$$

$$E(X^2) = 25 \cdot 0,4 + 100 \cdot 0,3 + 225 \cdot 0,2 + 400 \cdot 0,1$$

$$E(X^2) = 10 + 30 + 45 + 40 = 125$$

Sendo a variância dada por:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$Var(X) = 125 - 10^2 = 125 - 100 = 25$$

Portanto, o desvio padrão será:

$$S = \sqrt{Var(X)}$$

$$S = \sqrt{25} = 5$$

**Gabarito: A**

#### Q.06 (VUNESP - Analista Administrativo (EBSERH HC-UFU)/Estatística/2020)

**Sendo  $var(x)$  a variância de uma variável aleatória  $x$  e  $cov(x,y)$  a covariância entre duas variáveis aleatórias  $x$  e  $y$ , tem-se que**

- a)  $var(ax - by) = a var(x) - b var(y)$ .
- b)  $var(ax - by) = a^2 var(x) - b^2 var(y)$ .
- c)  $var(ax - by) = a^2 var(x) + b^2 var(y)$ .
- d)  $var(ax - by) = a^2 var(x) + b^2 var(y) - 2ab cov(x,y)$ .
- e)  $var(ax - by) = a^2 var(x) + b^2 var(y) + 2ab cov(x,y)$ .

**Comentários:**

Vejam que banca que saber a fórmula variância da subtração duas variáveis aleatórias multiplicadas por constantes.

$$Var(aX - bY) = a^2 \cdot Var(X) + b^2 \cdot Var(Y) - 2ab \cdot cov(X, Y)$$



Portanto, letra D resposta da questão.

**Gabarito: D**

**Q.07 (VUNESP - Analista Técnico Científico (MPE SP)/Economista/2019)**

Uma variável  $x$  tem distribuição normal com média 5 e desvio padrão igual a 3. Já a variável  $y$  também tem distribuição normal, mas com média 10 e desvio padrão igual a 4. Sabe-se que  $x$  e  $y$  são independentes. A variável  $z=x+y$  tem

- a) normal com média 15 e desvio padrão igual a 5.
- b) normal com média 15 e desvio padrão igual a 7.
- c) desconhecida com média 15 e desvio padrão igual a 7.
- d)  $t$ , de Student com média 7,5 e desvio padrão igual a 5.
- e) qui-quadrado com dois graus de liberdade.

**Comentários:**

Pessoal, as variáveis  $X$  e  $Y$  são normais e independentes. Como a variável  $Z$  é a soma de  $X$  e  $Y$ , podemos calcular a média dessa nova variável. Logo, descartamos a alternativa C.

Como  $X$  e  $Y$  é normal,  $Z$  também será normal. Logo, já descartamos a alternativa D. A letra E não temos como analisar (extrapolação). Portanto, ficamos com as alternativas A e B que pedem a média e desvio padrão de  $Z$ , isto é,  $X+Y$ .

A esperança da soma de duas variáveis é dada por:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Onde,

$$E(X) = 5$$

$$E(Y) = 10$$

$$E(X + Y) = 5 + 10 = 15$$

Já para calcular o desvio padrão da soma de duas variáveis, temos primeiro que encontrar a variância e depois extrair a raiz quadrada.

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$



Sendo,

$$S(X) = 3$$

$$\text{Var}(X) = 9$$

$$S(Y) = 4$$

$$\text{Var}(Y) = 16$$

$$\text{Var}(X + Y) = 9 + 16 = 25$$

Portanto,

$$S(X) = \sqrt{\text{Var}(X + Y)}$$

$$S(X) = \sqrt{25} = 5$$

Portanto, teremos uma variável normal com média igual a 15 e desvio padrão igual a 5.

**Gabarito: A**

**Q.08 (IBFC - Analista Administrativo (EBSERH)/Estatística/2020)**

**Com relação ao coeficiente de correlação linear ( $r$ ), é incorreto afirmar que:**

- a) Se  $r$  for um número próximo de 1, então  $x$  e  $y$  têm forte correlação linear.
- b) Se  $r = 0,2$ , então  $x$  e  $y$  têm forte correlação linear.
- c) Se  $r$  for um número próximo de -1, então  $x$  e  $y$  têm forte correlação linear.
- d) Se  $r$  for um número próximo de 0, então  $x$  e  $y$  têm fraca correlação linear.
- e) Se  $r = -0,8$ , então  $x$  e  $y$  têm forte correlação linear.

**Comentários:**

Nessa questão, temos que saber interpretar os valores do coeficiente de correlação. Na nossa aula apresentamos um quadro dessa interpretação. Como sabemos, o coeficiente de correlação varia de -1 a 1. E quanto mais próximo de -1 ou 1 mais forte será a correlação.

$\rho(X, Y) = 1$ , relação linear perfeita e positiva;

$\rho(X, Y) = 0$ , relação linear inexistente;



$\rho(X, Y) = -1$ , relação linear perfeita e negativa;

$\rho(X, Y) > 0$ , relação linear positiva;

$\rho(X, Y) < 0$ , relação linear negativa.

Comparando as alternativas com esse quadro, podemos observar que a alternativa B está errada, pois uma correlação de 0,2 linear positiva, mas não fortemente. As demais alternativas estão corretas.

**Gabarito: B**

**Q.09 (VUNESP - Analista Administrativo (EBSERH HC-UFU)/Estatística/2020)**

**Dados para responder à questão.**

**A variável x tem média 4 e desvio padrão 2, enquanto a variável y tem média 3 e desvio padrão 1. A covariância entre x e y é -1.**

**O coeficiente de correlação entre x e y é**

- a) 0,5.
- b) -0,5.
- c) 1.
- d) -1.
- e) -0,25.

**Comentários:**

Nessa questão, queremos o coeficiente de correlação. E como sabemos ele é dado por:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

A questão forneceu as seguintes informações:

$$\text{cov}(X, Y) = -1$$

$$\sigma_X = 2$$

$$\sigma_Y = 1$$



Logo,

$$\rho(X, Y) = \frac{-1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

**Gabarito: B**

**Q.10 (VUNESP - Curso de Formação de Oficiais do Quadro Complementar (EsFCEX)/Estatística/2020)**

**Dados mensais sobre a despesa com publicidade (em milhares de dólares) e a receita (em milhares de dólares) do Four Seasons Restaurant são apresentados a seguir.**

Despesas (x)	1	2	3,5	4,5	5	7
Receitas (y)	5	9				29

**Assinale a alternativa que contém os três valores da Receita que completam, respectivamente, a tabela apresentada para que a correlação entre essas duas variáveis seja 1.**

- a) 15, 19, 21.
- b) 13, 19, 21.
- c) 15, 19, 25.
- d) 13, 17, 21.
- e) 17, 21, 25.

**Comentários:**

Pessoal, nessa questão a banca traz uma tabela que mostra a correlação entre as variáveis X e Y. E pede para completar os espaços da variável Y.

A reta de regressão linear entre X e Y é dada por:

$$Y = a \cdot X + b$$

Onde,

“a” é o coeficiente linear

“b” é o coeficiente angular.



Vejam que temos os dois primeiros valores de X e Y. Com isso, podemos encontrar os valores de "a" e "b".

$$5 = a \cdot 1 + b \quad (1)$$

$$9 = a \cdot 2 + b \quad (2)$$

Podemos isolar, por exemplo, b na equação (1) e obter a equação (3).

$$b = 5 - a \quad (3)$$

Agora podemos substituir a equação (3) na equação (2) e obter o valor de "a".

$$9 = 2a + 5 - a$$

$$9 - 5 = 2a - a$$

$$a = 4$$

Para encontrar "b", basta substituir o valor de "a" na equação (3).

$$b = 5 - 4$$

$$b = 1$$

De posse dos valores dos coeficientes, basta substituir na equação da reta.

$$Y = a \cdot X + b$$

$$Y = 4 \cdot X + 1$$

Agora é só calcular os valores de Y que correspondem aos valores X (3,5; 4,5; 5).

Para X = 3,5

$$Y = 4 \cdot 3,5 + 1 = 15$$

Para X = 4,5

$$Y = 4 \cdot 4,5 + 1 = 19$$

Para X = 5

$$Y = 4 \cdot 5 + 1 = 21$$

**Gabarito: A**



## Allan Maux

### LISTA DE QUESTÕES ESTRATÉGICAS

Q.01 (IBFC - Analista Administrativo (EBSERH)/Estatística/2020)

Numa distribuição de probabilidade discreta a variável  $X$  representa a quantidade de relógios que uma pessoa(adulta) possui:

$X =$ quantidade de relógios	$P(X)$
0	27%
1	36%
2	18%
3	16%
4	3%

De acordo com a tabela, assinale a alternativa que apresenta o valor esperado para a quantidade de relógios.

- a) 1,23.
- b) 1,18.
- c) 1,46.
- d) 1,52.
- e) 1,32.



Q.02 (CEBRASPE (CESPE) - Profissional de TI (ME)/Ciência de Dados/2020)

		A			
		-1	0	1	total (%)
B	-1	10	5	5	20
	0	0	60	0	60
	1	10	5	5	20
total(%)		20	70	10	100

Considerando que a tabela precedente mostra o cruzamento de duas variáveis categorizadas A e B, que foram codificadas em três níveis numéricos de resposta: -1, 0 e 1, julgue o item que se segue.

A média da variável A é negativa.

C – CERTO

E - ERRADO

Q.03 (CEBRASPE (CESPE) - Profissional de TI (ME)/Ciência de Dados/2020)

		A			
		-1	0	1	total (%)
B	-1	10	5	5	20
	0	0	60	0	60
	1	10	5	5	20
total(%)		20	70	10	100

Considerando que a tabela precedente mostra o cruzamento de duas variáveis categorizadas A e B, que foram codificadas em três níveis numéricos de resposta: -1, 0 e 1, julgue o item que se segue.

As modas e as medianas das variáveis A e B são iguais a zero.

C – CERTO

E - ERRADO

Q.04 (IBFC - Engenheiro (EBSERH)/Mecânico/2020)



Analise as afirmativas abaixo sobre Probabilidade e Estatística e dê valores Verdadeiro (V) ou Falso (F).

( ) São classificadas como variáveis discretas as funções para as quais é possível associar um único número real a cada evento de uma partição do espaço amostral.

( ) São classificadas como variáveis contínuas as funções para as quais é possível associar infinitos valores a um intervalo  $(a, b)$ , sendo que para valores que não pertencem ao intervalo no qual se limita o experimento, a probabilidade de ocorrência é zero.

( ) A variância, ou seja, a medida estatística que concentra as probabilidades em torno da média é indicada por  $\text{Var}(x)$  ou  $\sigma^2$  e dada por:  $\text{Var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

( ) O desvio padrão indicado por  $DP(x) = \sigma$  é a raiz quadrada da variância.

Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta de cima para baixo.

a) F, F, F, F.

b) F, V, V, F.

c) V, F, F, V.

d) V, V, F, F.

e) V, V, V, V.

Q.05 (IDECAN - Professor Efetivo de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico (IF PB)/Matemática/2019)

Admita que  $X$  é uma variável aleatória discreta que assume os valores 5, 10, 15 e 20. Sua função de distribuição acumulada é:

$$\begin{cases} 0 & \text{se } x < 5 \\ 0,4 & \text{se } 5 \leq x < 10 \\ 0,7 & \text{se } 10 \leq x < 15 \\ 0,9 & \text{se } 15 \leq x < 20 \\ 1 & \text{se } x \geq 20. \end{cases}$$

O desvio padrão é

a) 5.

b) 6,5.



- c) 10.
- d) 25.
- e) 41,7.

**Q.06 (VUNESP - Analista Administrativo (EBSERH HC-UFU)/Estatística/2020)**

Sendo  $\text{var}(x)$  a variância de uma variável aleatória  $x$  e  $\text{cov}(x,y)$  a covariância entre duas variáveis aleatórias  $x$  e  $y$ , tem-se que

- a)  $\text{var}(ax - by) = a \text{var}(x) - b \text{var}(y)$ .
- b)  $\text{var}(ax - by) = a^2 \text{var}(x) - b^2 \text{var}(y)$ .
- c)  $\text{var}(ax - by) = a^2 \text{var}(x) + b^2 \text{var}(y)$ .
- d)  $\text{var}(ax - by) = a^2 \text{var}(x) + b^2 \text{var}(y) - 2ab \text{cov}(x,y)$ .
- e)  $\text{var}(ax - by) = a^2 \text{var}(x) + b^2 \text{var}(y) + 2ab \text{cov}(x,y)$ .

**Q.07 (VUNESP - Analista Técnico Científico (MPE SP)/Economista/2019)**

Uma variável  $x$  tem distribuição normal com média 5 e desvio padrão igual a 3. Já a variável  $y$  também tem distribuição normal, mas com média 10 e desvio padrão igual a 4. Sabe-se que  $x$  e  $y$  são independentes. A variável  $z=x+y$  tem

- a) normal com média 15 e desvio padrão igual a 5.
- b) normal com média 15 e desvio padrão igual a 7.
- c) desconhecida com média 15 e desvio padrão igual a 7.
- d)  $t$ , de Student com média 7,5 e desvio padrão igual a 5.
- e) qui-quadrado com dois graus de liberdade.

**Q.08 (IBFC - Analista Administrativo (EBSERH)/Estatística/2020)**

Com relação ao coeficiente de correlação linear ( $r$ ), é incorreto afirmar que:

- a) Se  $r$  for um número próximo de 1, então  $x$  e  $y$  têm forte correlação linear.
- b) Se  $r = 0,2$ , então  $x$  e  $y$  têm forte correlação linear.



- c) Se  $r$  for um número próximo de  $-1$ , então  $x$  e  $y$  têm forte correlação linear.
- d) Se  $r$  for um número próximo de  $0$ , então  $x$  e  $y$  têm fraca correlação linear.
- e) Se  $r = -0,8$ , então  $x$  e  $y$  têm forte correlação linear.

**Q.09 (VUNESP - Analista Administrativo (EBSERH HC-UFU)/Estatística/2020)**

Dados para responder à questão.

A variável  $x$  tem média  $4$  e desvio padrão  $2$ , enquanto a variável  $y$  tem média  $3$  e desvio padrão  $1$ . A covariância entre  $x$  e  $y$  é  $-1$ .

O coeficiente de correlação entre  $x$  e  $y$  é

- a)  $0,5$ .
- b)  $-0,5$ .
- c)  $1$ .
- d)  $-1$ .
- e)  $-0,25$ .

**Q.10 (VUNESP - Curso de Formação de Oficiais do Quadro Complementar (EsFCEX)/Estatística/2020)**

Dados mensais sobre a despesa com publicidade (em milhares de dólares) e a receita (em milhares de dólares) do Four Seasons Restaurant são apresentados a seguir.

Despesas ( $x$ )	1	2	3,5	4,5	5	7
Receitas ( $y$ )	5	9				29

Assinale a alternativa que contém os três valores da Receita que completam, respectivamente, a tabela apresentada para que a correlação entre essas duas variáveis seja  $1$ .

- a)  $15, 19, 21$ .
- b)  $13, 19, 21$ .
- c)  $15, 19, 25$ .
- d)  $13, 17, 21$ .



e) 17, 21, 25.

## Gabarito

GABARITO



<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>
E	C	C	E	A	D	A	B	B	A



## VARIABILIDADE / MEDIDAS DE DISPERSÃO

### Sumário

<i>variabilidade / Medidas de Dispersão.....</i>	1
<i>O que é mais cobrado dentro do assunto.....</i>	2
<i>Roteiro de revisão e pontos do assunto que merecem destaque .....</i>	2
<i>Medidas de Variabilidade .....</i>	2
<i>Medidas de Dispersão Absoluta .....</i>	3
<i>Amplitude Total .....</i>	3
<i>Amplitude Interquartílica .....</i>	4
<i>Desvios em Relação à Média Aritmética e Mediana .....</i>	5
<i>Desvio Absoluto Médio .....</i>	6
<i>Variância e Desvio-Padrão .....</i>	9
<i>Medidas de Dispersão Absoluta .....</i>	13
<i>Coeficiente de Variação e Variância Relativa.....</i>	13
<i>Questões estratégicas.....</i>	14
<i>Questões CEBRASPE.....</i>	15
<i>Questões VUNESP.....</i>	21
<i>Questões Bancas Diversas .....</i>	24
<i>Questões FGV.....</i>	26
<i>Lista de Questões Estratégicas .....</i>	30
<i>Questões CEBRASPE .....</i>	30
<i>Questões VUNESP.....</i>	32



Questões Bancas Diversas .....	33
Questões FGV.....	34
Gabarito.....	36

## O que é mais cobrado dentro do assunto

Vamos analisar agora como se comporta a incidência dos sub assuntos da nossa aula de hoje. Assim, você será melhor direcionado nos seus estudos, vejam:

MEDIDAS DE DISPERSÃO	Grau de incidência
DESVIO PADRÃO E VARIÂNCIA	73,5%
COEFICIENTES DE VARIAÇÃO / VARIAÇÃO RELATIVA	20,9%
INTERVALO INTERQUARTÍLICO	2,8%
AMPLITUDE	2,8%
TOTAL	100,00%

## ROTEIRO DE REVISÃO E PONTOS DO ASSUNTO QUE MERECEM DESTAQUE

A ideia desta seção é apresentar um roteiro para que você realize uma revisão completa do assunto e, ao mesmo tempo, destacar aspectos do conteúdo que merecem atenção.

Para revisar e ficar bem preparado no assunto, você precisa, basicamente, seguir os passos a seguir:

## MEDIDAS DE VARIABILIDADE

Pessoal, as **Medidas de Variabilidade** ou **Medidas de Dispersão** têm a finalidade de medir a dispersão dos valores de um conjunto em torno de um valor médio. Essas medidas são divididas em dois grupos: **Medidas de dispersão Absoluta** e **Medida de dispersão Relativa**.



## MEDIDAS DE DISPERSÃO ABSOLUTA

### Amplitude Total

A **Amplitude total** é a diferença entre os valores extremos de um conjunto de dados. Essa medida é muito pobre, pois não mostra o grau de dispersão existente no conjunto de dados, pois apenas leva em conta o valor máximo e mínimo.

$$AT = X_{m\acute{a}x} - X_{m\acute{i}n}$$

Portanto, como são desconsiderados os valores entre os extremos, essa medida pode nos levar a uma conclusão errada dos dados em análise. Além disso, é sensível ao tamanho da amostra, uma vez que, pode apresentar muita variação de uma amostra para outra, isso considerando uma mesma população.

A tabela abaixo mostra exemplos do cálculo da Amplitude Total.

<i>Amplitude Total em dados não agrupados</i>	<i>Amplitude Total em dados agrupados sem intervalo de classe</i>	<i>Amplitude Total em dados agrupados em classe</i>																												
{1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 9, 9, 12}	<table border="1"> <thead> <tr> <th><i>Idades</i></th> <th><i>Frequência Absoluta (fi)</i></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>10</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>20</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>30</td> <td>13</td> </tr> <tr> <td>40</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>50</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>60</td> <td>9</td> </tr> </tbody> </table>	<i>Idades</i>	<i>Frequência Absoluta (fi)</i>	10	12	20	5	30	13	40	5	50	6	60	9	<table border="1"> <thead> <tr> <th><i>Idades</i></th> <th><i>Frequência Absoluta (fi)</i></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0 + 10</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>10 + 20</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>20 + 30</td> <td>13</td> </tr> <tr> <td>30 + 40</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>40 + 50</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>50 + 60</td> <td>9</td> </tr> </tbody> </table>	<i>Idades</i>	<i>Frequência Absoluta (fi)</i>	0 + 10	12	10 + 20	5	20 + 30	13	30 + 40	5	40 + 50	6	50 + 60	9
<i>Idades</i>	<i>Frequência Absoluta (fi)</i>																													
10	12																													
20	5																													
30	13																													
40	5																													
50	6																													
60	9																													
<i>Idades</i>	<i>Frequência Absoluta (fi)</i>																													
0 + 10	12																													
10 + 20	5																													
20 + 30	13																													
30 + 40	5																													
40 + 50	6																													
50 + 60	9																													
Diferença entre o valor máximo e o mínimo.	Diferença entre o valor máximo e o mínimo.	<p>Duas formas:</p> <p><b>1)</b> Diferença entre o limite superior da última classe e o limite inferior da primeira classe.</p> <p><b>2)</b> Diferença entre o ponto médio da última classe e o</p>																												



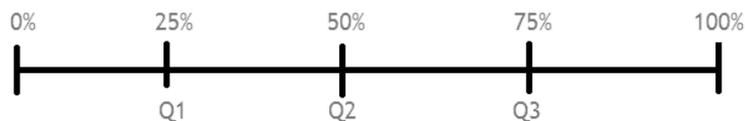
		ponto médio da primeira classe.
$AT = X_{máx} - X_{mín}$	$AT = X_{máx} - X_{mín}$	1) $AT = l_{sup} - l_{inf}$
$AT = 12 - 1 = 11$	$AT = 60 - 10 = 50$	$AT = 60 - 0 = 60$
		2) $AT = PM_{últ} - PM_{prin}$
		$AT = 55 - 5 = 50$

### Propriedades da Amplitude Total

- A soma ou subtração de uma constante "k" a todos os valores de um conjunto de dados, a Amplitude Total não se altera;
- A multiplicação ou divisão de uma constante "k" a todos os valores de um conjunto de dados, a Amplitude Total fica multiplicada ou dividida por essa constante.

## Amplitude Interquartílica

A **Amplitude Interquartílica**, assim como a Amplitude Total, é uma medida de dispersão pobre. Como sabemos, os **quartis** dividem os dados em quatro partes de mesma frequência. Desta forma, teremos sempre três quartis e cada um deles corresponderá a **25%** do conjunto de dados. Observem a figura abaixo.



A Amplitude interquartílica é dada pela diferença entre o terceiro quartil ( $Q_3$ ) e o primeiro quartil ( $Q_1$ ).

$$\text{Amplitude interquartílica} = Q_3 - Q_1$$

Além disso, a metade dessa amplitude é chamada de Amplitude semi-interquartílica ou desvio quartílico.

$$\text{Amplitude semi-interquartílica} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

### Propriedades da Amplitude Interquartílica



- A soma ou subtração de uma constante “k” a todos os valores de um conjunto de dados, a Amplitude Interquartílica não se altera;
- A multiplicação ou divisão de uma constante “k” a todos os valores de um conjunto de dados, a Amplitude Interquartílica fica multiplicada ou dividida por essa constante.



Fiquem atentos, pois as fórmulas da Amplitude Interquartílica e semi-interquartílica são semelhantes.

As propriedades da Amplitude Interquartílica e Amplitude Total são iguais.

## *Desvios em Relação à Média Aritmética e Mediana*

Pessoal, um **desvio** é a distância entre qualquer observação de um conjunto de dados e uma medida descritiva desse conjunto. Normalmente, calcula-se os desvios em relação à média e à mediana.

$$d_i = X - \underline{X}$$

ou

$$d_i = X - M_d$$

Onde,

$\underline{X}$  é a média.

$M_d$  é a mediana.





Quando os desvios em relação a uma medida descritiva são pequenos, e como as observações estão concentradas em torno dessa medida, a variabilidade dos dados é pequena.

Quando os desvios em relação a uma medida descritiva são maiores, as observações estão mais dispersas, a variabilidade dos dados é grande.

### Propriedades dos Desvios em Relação à Média Aritmética e Mediana

- A soma dos desvios em relação à média é nula;
- A soma dos quadrados dos desvios da sequência de números, em relação a número "k", é mínima se "k" for a média aritmética dos números;
- A soma dos desvios absolutos de uma sequência de números, em relação a um número "k", é mínima quando "k" é a mediana dos números.

## Desvio Absoluto Médio

O **Desvio Absoluto Médio** ou **Desvio Médio**, mede a dispersão entre os valores da distribuição e a média dos dados calculados.

Pessoal, se tivermos uma distribuição muito grande e quiséssemos calcular os desvios, teríamos que calcular desvios para cada número dessa distribuição e depois tirar conclusões desses valores encontrados. Logo, isso não seria viável.

Desta forma, uma solução seria calcular um único número que representasse toda a distribuição. Para isso, poderíamos calcular a média de todos os desvios, isto é, somar todos os desvios e dividir pela quantidade de observações (n). Sendo que, temos desvios positivos, negativos e nulos. Os positivos anulam os negativos e o resultado da soma será sempre zero.

$$\underline{d} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \underline{X})}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

Portanto, uma solução para esse problema seria colocar cada desvio em módulo, surgindo assim o **Desvio Absoluto Médio** ou **Desvio Médio**.



$$\underline{d} = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i - \underline{X}|}{n}$$

O **Desvio Médio** é uma medida de dispersão mais robusta do que a Amplitude Total e a Amplitude interquartilica, pois são considerados todos os valores da distribuição.

Para dados agrupados, a fórmula é a seguinte:

$$\underline{d} = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i - \underline{X}| \cdot f_i}{\sum f_i}$$

Onde:

$f_i$  é a frequência absoluta simples.

Já para dados agrupados em classe, a fórmula é a seguinte:

$$\underline{d} = \frac{\sum_{i=1}^n |PM - \underline{X}| \cdot f_i}{\sum f_i}$$

Onde:

$PM$  é o ponto médio.

Iremos fazer um exemplo para os dados agrupados em classe, para exemplificar o cálculo do **Desvio Médio**.

**Exemplo:** Calcule o desvio médio das idades de um conjunto de pessoas:

A primeira coisa a ser feita é calcular os pontos médios e em seguida a média.

<u>idades</u>	<u>frequência Absoluta (<math>f_i</math>)</u>	<u>PM</u>	<u>PM.<math>f_i</math></u>
0 † 10	12	5	60
10 † 20	5	15	75
20 † 30	13	25	325
30 † 40	5	35	175
40 † 50	6	45	270
50 † 60	9	55	495
<b>Total</b>	<b>50</b>		<b>1.400</b>

Logo, a média será



$$\underline{x} = \frac{\sum PM \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{1.400}{50} = 28$$

De posse da média, podemos calcular o módulo do desvio em relação à média.

idades	frequência Absoluta (fi)	PM	PM.fi	$ PM - \underline{x} $
0 † 10	12	5	60	23
10 † 20	5	15	75	13
20 † 30	13	25	325	3
30 † 40	5	35	175	7
40 † 50	6	45	270	17
50 † 60	9	55	495	27
Total	<b>50</b>		<b>1.400</b>	<b>90</b>

Agora, basta multiplicar os módulos dos desvios pela frequência absoluta simples.

idades	frequência Absoluta (fi)	PM	PM.fi	$ PM - \underline{x} $	$ PM - \underline{x}  \cdot f_i$
0 † 10	12	5	60	23	276
10 † 20	5	15	75	13	65
20 † 30	13	25	325	3	39
30 † 40	5	35	175	7	35
40 † 50	6	45	270	17	102
50 † 60	9	55	495	27	243
Total	<b>50</b>		<b>1.400</b>		<b>760</b>

Aplicando a fórmula, teremos o seguinte:

$$\underline{d} = \frac{\sum_{i=1}^n |PM - \underline{x}| \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{760}{50} = 15,2$$

### Propriedades do Desvio Médio

- A soma ou subtração de uma constante “k” a todos os valores de um conjunto de dados, o desvio médio não se altera;
- A multiplicação ou divisão de uma constante “k” a todos os valores de um conjunto de dados, o desvio médio fica multiplicado ou dividido por essa constante.





As propriedades da Amplitude Interquartílica, Amplitude Total e Desvio Médio são iguais.

## Variância e Desvio-Padrão

Quando introduzimos o assunto **desvios médios** observamos que não era viável calcular uma medida de dispersão que simplesmente calcula a média dos desvios, pois essa medida sempre seria zero.

Para resolver esse problema, calculamos a média do módulo dos desvios. Sendo que, outra forma de ser resolvido esse problema é calcular, ao invés de calcular a média do módulo dos desvios, a média do quadrado dos desvios. Com isso, obteremos a **variância**, isto é, a média aritmética do quadrado dos desvios.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n}$$

Onde:

$\mu$  é a média populacional

$X_i$  é a variável em análise

$n$  é o número de elementos da população

Pessoal, como os desvios são elevados ao quadrado, a unidade da variável em análise também é elevada ao quadrado. Por exemplo, se estivermos calculando a variância das idades (anos) de um conjunto de pessoas, essa medida ficará anos ao quadrado (anos<sup>2</sup>). Logo, essa medida não terá sentido físico. Para acabar com esse inconveniente, utilizamos o conceito de **Desvio-Padrão**, que nada mais é que a raiz quadrada da **variância**.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n}}$$



É importante salientar que temos variância e desvio-padrão populacional e amostral. O que tratamos até o momento é o populacional. Logo, para o amostral temos que fazer uma modificação na fórmula, ficando da seguinte forma:

$$\text{Variância amostral: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X - \bar{X})^2}{n-1}$$

$$\text{Desvio-padrão amostral: } S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X - \bar{X})^2}{n-1}}$$

Outra forma de calcular a variância populacional é através da seguinte fórmula:

$$\sigma^2 = \underline{X^2} - (\underline{X})^2$$

Onde:

$\underline{X^2}$  é a média dos quadrados.

$(\underline{X})^2$  é o quadrado da média.

Para uma amostra essa fórmula fica da seguinte forma:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot [\underline{X^2} - (\underline{X})^2]$$



### Variância e Desvio-Padrão

A variância/desvio-padrão de um conjunto será zero quando todos os elementos forem iguais;  
Sempre será maior ou igual a zero;  
No cálculo da variância/desvio-padrão haverá uma pequena diferença entre o cálculo populacional e amostral.

Para dados agrupados, as fórmulas são as seguintes:

1) Populacional



$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \cdot f_i}{n}$$

ou

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i \cdot f_i)^2}{n}}{n}$$

2) Amostral

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \cdot f_i}{n - 1}$$

ou

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i^2 \cdot f_i) - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i \cdot f_i)^2}{n}}{n - 1}$$

Onde:

$f_i$  é a frequência absoluta simples.

Pessoal, para calcular o desvio-padrão, basta encontrar a raiz quadrada da variância.

Já para dados agrupados em classe, a fórmula é a seguinte:

1) Populacional

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (PM_i - \mu)^2 \cdot f_i}{n}$$

ou

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n PM_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n PM_i \cdot f_i)^2}{n}}{n}$$

2) Amostral

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (PM_i - \bar{X})^2 \cdot f_i}{n - 1}$$

ou



$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (PM_i^2 \cdot f_i) - \frac{(\sum_{i=1}^n PM_i \cdot f_i)^2}{n}}{n - 1}$$

Onde:

$PM$  é o ponto médio.

Pessoal, para calcular o desvio-padrão, basta encontrar a raiz quadrada da variância.

Iremos fazer um exemplo para os dados agrupados em classe, para exemplificar o cálculo da **Variância** e **Desvio- Padrão**.

**Exemplo:** Calcule a variância amostral e desvio padrão amostral das idades de um conjunto de pessoas:

A primeira coisa a ser feita é calcular os pontos médios e em seguida a média.

<u>idades</u>	<u>frequência Absoluta (<math>f_i</math>)</u>	<u>PM</u>	<u>PM.<math>f_i</math></u>
0 † 10	12	5	60
10 † 20	5	15	75
20 † 30	13	25	325
30 † 40	5	35	175
40 † 50	6	45	270
50 † 60	9	55	495
<i>Total</i>	<b>50</b>		<b>1.400</b>

Logo, a média será

$$\underline{x} = \frac{\sum PM \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{1.400}{50} = 28$$

De posse da média, podemos calcular os quadrados dos desvios em relação à média.

<u>idades</u>	<u>frequência Absoluta (<math>f_i</math>)</u>	<u>PM</u>	<u>PM.<math>f_i</math></u>	<u><math>(PM - \underline{x})</math></u>	<u><math>(PM - \underline{x})^2</math></u>
0 † 10	12	5	60	-23	529
10 † 20	5	15	75	-13	169
20 † 30	13	25	325	-3	9
30 † 40	5	35	175	7	49
40 † 50	6	45	270	17	289
50 † 60	9	55	495	27	729



Total	50		1.400		1.774
-------	----	--	-------	--	-------

Agora, basta multiplicar os quadrados dos desvios em relação à média pela frequência absoluta simples.

idades	frequência Absoluta (fi)	PM	PM.fi	$(PM - \underline{x})$	$(PM - \underline{x})^2$	$(PM - \underline{x})^2 \cdot f_i$
0 † 10	12	5	60	-23	529	6.348
10 † 20	5	15	75	-13	169	845
20 † 30	13	25	325	-3	9	117
30 † 40	5	35	175	7	49	245
40 † 50	6	45	270	17	289	1.734
50 † 60	9	55	495	27	729	6.561
Total	50		1.400			15.850

Aplicando a fórmula, teremos o seguinte:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (PM_i - \underline{X})^2 \cdot f_i}{n - 1} = \frac{15.850}{50 - 1} = \frac{15.850}{49} \approx 324 \text{ anos}^2$$

O desvio-padrão será a raiz desse valor. Logo,

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{324} = 18 \text{ anos}$$

### Propriedades do Variância e Desvio-Padrão

- A soma ou subtração de uma constante "k" a todos os valores de um conjunto de dados, variância e o desvio padrão não se alteram;
- A multiplicação ou divisão de uma constante "k" a todos os valores de um conjunto de dados, a variância fica multiplicada ou dividida pelo quadrado dessa constante.
- A multiplicação ou divisão de uma constante "k" a todos os valores de um conjunto de dados, o desvio-padrão fica multiplicado ou dividido por essa constante.

## MEDIDAS DE DISPERSÃO ABSOLUTA

### Coeficiente de Variação e Variância Relativa

O Coeficiente de Variação é uma medida de dispersão que relaciona o desvio-padrão com a média.



$$CV = \frac{\sigma}{\mu}$$

Isso para uma população. Se for uma amostra a fórmula é a seguinte:

$$CV = \frac{S}{\underline{X}}$$



### Coeficiente de Variação

É uma medida adimensional, pois o desvio-padrão e média possuem a mesma unidade;  
Normalmente é expresso em porcentagem;  
Quanto menor o CV, mais homogêneo será o conjunto de dados, ou seja, menor será a dispersão em torno da média.

Outra medida de dispersão relativa é a **Variância Relativa**. Essa medida é simplesmente o quadrado do CV.

$$VR = \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

Isso para uma população. Se for uma amostra a fórmula é a seguinte:

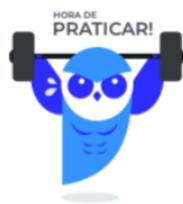
$$VR = \left(\frac{S}{\underline{X}}\right)^2 = \frac{S^2}{\underline{X}^2}$$

## QUESTÕES ESTRATÉGICAS

*Nesta seção, apresentamos e comentamos uma amostra de questões objetivas selecionadas estrategicamente: são questões com nível de dificuldade semelhante ao que você deve esperar para a sua prova e que, em conjunto, abordam os principais pontos do assunto.*

*A ideia, aqui, não é que você fixe o conteúdo por meio de uma bateria extensa de questões, mas que você faça uma boa revisão global do assunto a partir de, relativamente, poucas questões.*





## Questões CEBRASPE

Q.01 (CEBRASPE (CESPE) /ACE (TCE-RJ) / Controle Externo/TI/2021)

X	frequência absoluta
0	5
1	10
2	20
3	15
total	50

Considerando que a tabela precedente mostra a distribuição de frequências de uma variável quantitativa X, julgue o item a seguir.

A variância amostral de X é superior a 0,89.

C - CERTO

E – ERRADO

Comentários:

Nessa questão a banca quer saber se a variância amostral é superior a 0,89. Para isso, temos que saber a fórmula da variância. Aqui utilizaremos a seguinte:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[ \left( \sum f \cdot X_i^2 \right) - \frac{(\sum f \cdot X_i)^2}{n} \right]$$

Para resolver essa questão teremos que calcular duas colunas, a "f.X" e a "f.X<sup>2</sup>" e em seguida fazer o somatório delas.

X	Frequência absoluta	f.X	f.X <sup>2</sup>
---	---------------------	-----	------------------



0	5	0	0
1	10	10	10
2	20	40	80
3	15	45	135
<b>tota</b>	<b>50</b>	<b>95</b>	<b>225</b>
<b>I</b>			

Aplicando os valores na fórmula teremos o seguinte:

$$S^2 = \frac{1}{50 - 1} \left( 225 - \frac{95^2}{50} \right)$$

$$S^2 = \frac{1}{49} \left( 225 - \frac{9025}{50} \right)$$

$$S^2 = \frac{1}{49} (225 - 180,5)$$

$$S^2 = \frac{44,5}{49}$$

$$S^2 = 0,908$$

Logo, a variância foi superior a 0,89 como diz a questão. Correta a questão.

**Gabarito: Certo**

#### Q.02 (CEBRASPE (CESPE) / Profissional de Tecnologia da Informação (ME) /2020)

Considerando que  $R$  representa uma variável quantitativa cuja média, mediana e variância são, respectivamente, iguais a 70, 80 e 100, e que  $U = \frac{R}{10} - 7$ , julgue o próximo item, acerca das variáveis  $U$  e  $R$ .

O desvio padrão da variável  $U$  é igual a 1.

C - CERTO

E - ERRADO

Comentários:



Aqui a banca traz os valores da média, mediana e variância de uma variável  $R$  e pede o valor do desvio padrão da  $U$ . Sendo  $U$  obtido da seguinte forma:

$$U = \frac{R}{10} - 7$$

Como desejamos o valor do desvio padrão e nos foi dada a variância de  $R$ . Basta calcular o desvio padrão de  $R$  e em seguida aplicar a expressão dada.

Variância de  $R = 100$ .

$$S = \sqrt{S^2}$$

Desvio padrão de  $R = 10$ .

O Desvio padrão é afetado pela multiplicação e pela divisão. Logo, a expressão fica da seguinte forma:

$$U = \frac{R}{10}$$

Aplicando o valor de  $R$ , ficamos com o seguinte:

$$U = \frac{10}{10}$$

$$U = 1$$

Desta forma, o desvio padrão é igual a 1 como afirma a banca.

**Gabarito: Certo**

**Q.03 (CEBRASPE (CESPE) / Professor (Pref São Cristóvão)/Matemática/Educação Básica/2019)**

**A tabela seguinte mostra a distribuição das idades dos 30 alunos da turma A do quinto ano de uma escola de ensino fundamental.**

idade (em anos)	9	10	11	12	13	14	
quantidade de estudantes	2	6	2	0	1	0	1

**A partir dessa tabela, julgue o item.**

**O desvio padrão das idades é inferior a 1 ano.**



C - Certo.

E – Errado.

**Comentários:**

Pessoal, a banca forneceu uma tabela com os valores das idades e a quantidade (frequência) de um grupo de alunos da turma A e pergunta se o desvio padrão das idade é inferior a 1 ano.

A tabela apresentada da questão é a seguinte.

X	f	f · X
9	6	54
10	22	220
11	0	0
12	1	12
13	0	0
14	1	14
<b>Tota l</b>	<b>30</b>	<b>300</b>

Onde “f” é a quantidade de alunos e “X” é a idade. A primeira coisa a ser feita é calcular a média da turma A, para isso temos que construir uma coluna f · X (ver tabela acima) e em seguida fazer o somatório. Temos que a média pode ser obtida da seguinte forma:

$$\underline{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \cdot f}{n}$$

$$\underline{X} = \frac{300}{30} = 10$$

De posse da média, podemos calcular os quadrados dos desvios em relação a média e depois multiplicar pela frequência.

X	f	f · X	$(X_i - \underline{X})$	$(X_i - \underline{X})^2$	$(X_i - \underline{X})^2 \cdot f_i$
9	6	54	9-10=-1	1	6
10	22	220	10-10=0	0	0
11	0	0	11-10=1	1	0
12	1	12	12-10=2	4	4
13	0	0	13-10=3	9	0
14	1	14	14-10=4	16	16
<b>Tota l</b>	<b>30</b>	<b>300</b>			<b>26</b>



O desvio padrão é dado por:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \cdot f_i}{n - 1}} = \sqrt{\frac{26}{30 - 1}} = \sqrt{\frac{26}{29}} < 1$$

Para tirar a prova, podemos elevar ao quadrado, os dois lados.

$$\left(\sqrt{\frac{26}{29}}\right)^2 < (1)^2$$

$$\frac{26}{29} < 1$$

$$0,89 < 1$$

Portanto, certa a questão.

**Gabarito: Certa**

#### Q.04 (CEBRASPE / IPHAN / Analista / 2018)

*Cinco municípios de um estado brasileiro possuem as seguintes quantidades de patrimônios históricos: {2, 3, 5, 3, 2}.*

*Admitindo que a média e o desvio-padrão desse conjunto de valores sejam iguais a 3 e 1,2, respectivamente, julgue o item seguinte.*

*O coeficiente de variação é superior a 0,3 e inferior a 0,5.*

**C – CERTO**

**E – ERRADO**

#### Comentários:

Vamos lá.

- Média = 3
- Desvio Padrão = 1,2

$$0,3 < \text{Coeficiente de Variação} < 0,5$$



$$\text{Coeficiente de Variação} = \frac{\text{Desvio Padrão}}{\text{Média}} = \frac{1,2}{3} = 0,4$$

Gabarito: Certo

**Q.05 (CEBRASPE / IPHAN / Analista / 2018)**

Cinco municípios de um estado brasileiro possuem as seguintes quantidades de patrimônios históricos: {2, 3, 5, 3, 2}.

Admitindo que a média e o desvio-padrão desse conjunto de valores sejam iguais a 3 e 1,2, respectivamente, julgue o item seguinte.

Para esse conjunto de valores, a variância é igual a 3.

C – CERTO

E – ERRADO

**Comentários:**

Opa!!

Cuidado aí para não vacilar e perder um tempo precioso, hein!!

A variância corresponde ao quadrado do desvio padrão. Como o DP foi fornecido no enunciado da questão. Logo:

$$\text{Variância} = 1,2^2 = 1,44$$

**Gabarito: Errado**

**Q.06 (CEBRASPE - Analista (SERPRO) /Ciência de Dados/2021)**

Considerando que o número  $X$  de erros registrados em determinado tipo de código computacional siga uma distribuição binomial com média igual a 4 e variância igual a 3, julgue o item a seguir.

O coeficiente de variação da distribuição de erros  $X$  é igual a 3.

C – CERTO

E – ERRADO



### Comentários:

Os dados fornecidos na questão são os seguintes:

Média = 4

Variância = 3

E a banca deseja saber se o coeficiente de variação é 3.

$$CV = \frac{\text{desvio padrão}}{\text{média}}$$

O desvio padrão é  $\sqrt{3} \approx 1,73$ . Logo,

$$CV = \frac{1,73}{4} = 0,43$$

**Gabarito: Errado**

## Questões VUNESP

### Q.07 (VUNESP - Analista Administrativo (EBSERH HC-UFU) / Estatística/2020)

Um aluno tirou as seguintes notas ao longo do semestre: 4, 8, 6, 1 e 6. A média, a mediana e o desvio padrão foram, respectivamente:

- a) 5; 6 e 5,6.
- b) 5; 5 e 5,6.
- c) 5; 6 e 2,4.
- d) 5; 6 e 31,6.
- e) 6; 6 e 5,6.

### Comentários:

Pessoal, os dados fornecidos na questão foram os seguintes:

**4, 8, 6, 1 e 6**

A primeira coisa a ser feita é ordenar em um ROL.



{1, 4, 6, 6, 8}

Temos 5 elementos e facilmente podemos observar que a mediana é 6.

{1, 4, 6, 6, 8}

Com isso, podemos eliminar a alternativa B.

Agora iremos calcular a média, para isso, basta somar todos os valores e dividir por 5.

$$\underline{X} = \frac{1 + 4 + 6 + 6 + 8}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

Com isso, podemos eliminar a alternativa E e ficamos com as letras A, C e D.

Para calcular o desvio padrão, temos que encontrar a média dos quadrados dos desvios em relação à média.

$X$	$(X_i - \underline{X})$	$(X_i - \underline{X})^2$
1	$1-5=-4$	16
4	$4-5=-1$	1
6	$6-5=1$	1
6	$6-5=1$	1
8	$8-5=3$	9
<b>Tota l</b>		<b>28</b>

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \underline{X})^2}{n}} = \sqrt{\frac{28}{5}} = \sqrt{5,6}$$

Analisando as alternativas A, C e D. Podemos perceber que a resposta só pode ser a letra C.

$$\sigma \approx 2,4$$

**Gabarito: C**

**Q.08 (VUNESP - Analista de Gestão (FITO) /Contabilidade/2020)**

**Na análise de um conjunto de valores, é muito importante calcular as medidas de tendência central e de dispersão, para se ter uma ideia das características dessa distribuição de dados. Em relação a essas medidas, é correto afirmar que**



- a) a moda, a média aritmética e a mediana nunca coincidem em valor.
- b) se somarmos uma constante arbitrária maior que zero a cada elemento desse conjunto de valores, a média aritmética e a variância ficam inalteradas.
- c) se multiplicarmos uma constante arbitrária maior que zero a cada elemento desse conjunto de valores, a nova variância fica multiplicada pelo quadrado dessa constante.
- d) a soma dos desvios de cada valor do conjunto em relação à média apresenta normalmente um valor maior que zero.
- e) se dividirmos cada elemento desse conjunto de valores por uma constante arbitrária maior que zero, o novo desvio padrão fica dividido pelo valor da constante ao quadrado.

### Comentários:

Pessoal, essa é uma questão de propriedade das medidas de tendência central e de dispersão.

Vamos analisar cada alternativa:

**Letra a)** a moda, a média aritmética e a mediana **nunca** coincidem em valor.

**Errada**, pois eles podem sim coincidir, basta lembrar, por exemplo, de uma distribuição simétrica em que a média e mediana são iguais.

**Letra b)** se somarmos uma constante arbitrária maior que zero a cada elemento desse conjunto de valores, a média aritmética e a variância ficam inalteradas.

**Errada** em relação à média. A média aritmética ficará somada a essa variável, mas a variância ficará inalterada.

**Letra c)** se multiplicarmos uma constante arbitrária maior que zero a cada elemento desse conjunto de valores, a nova variância fica multiplicada pelo quadrado dessa constante.

**Correta**, pois a variância fica multiplicada pelo quadrado da constante.

**Letra d)** a soma dos desvios de cada valor do conjunto em relação à média apresenta normalmente um valor **maior que** zero.

**Errada**, pois sabemos que a soma dos desvios em relação à média é sempre zero.

**Letra e)** se dividirmos cada elemento desse conjunto de valores por uma constante arbitrária maior que zero, o novo desvio padrão fica dividido pelo valor da constante **ao quadrado**.



Errada, pois o desvio padrão ficará dividido pela constante. Quem fica dividido pela constante ao quadrado é a variância.

**Gabarito: C**

## Questões Bancas Diversas

**Q.09 (IBFC - Supervisor de Pesquisas (IBGE) /Suporte Gerencial/2021)**

**Em dois grupos formados pela mesma quantidade de pessoas constatou-se que a média de idade do primeiro grupo é igual a 25 com variância de 16, e a média de idade do segundo grupo é igual a 40, com variância de 36. Nessas condições, é correto afirmar que o coeficiente de variação:**

- a) do primeiro grupo é maior que o do segundo grupo.**
- b) do primeiro grupo é menor que o do segundo grupo.**
- c) é igual para ambos os grupos.**
- d) é igual a 0,64 para o primeiro grupo e igual a 0,90 para o segundo grupo.**
- e) é igual a 1,6 para o primeiro grupo e igual a 1,5 para o segundo grupo.**

**Comentários:**

Pessoal, essa é uma questão para comparar o coeficiente de variação de dois grupos.

$$CV = \frac{\text{desvio padrão}}{\text{média}}$$

**Grupo 1:**

Média = 25

Variância = 16

Desvio padrão =  $\sqrt{\text{variância}} = \sqrt{16} = 4$

$$CV_{\text{Grupo 1}} = \frac{4}{25} = 0,16$$

**Grupo 2:**

Média = 40



Variância = 36

Desvio padrão =  $\sqrt{\text{variância}} = \sqrt{36} = 6$

$$CV_{\text{Grupo 2}} = \frac{6}{40} = 0,15$$

Analisando as alternativas podemos observar que a resposta é a **letra A**, pois o CV foi maior para o primeiro grupo.

**Gabarito: A**

**Q.10 (IBADE - Analista Público de Gestão (Pref Vila Velha)/Economista/2020)**

**Exemplos comuns de medidas de dispersão estatística são:**

**I – média;**

**II – mediana;**

**III – variância;**

**IV - desvio padrão;**

**V - amplitude interquartil.**

**Está(ão) correta(s):**

**a) somente V.**

**b) somente V e IV.**

**c) somente V, IV e III.**

**d) somente V, IV, III e II.**

**e) I, II, III, IV e V.**

**Comentários:**

Pessoal, a média e a mediana são medidas de tendência central. Já a variância, desvio padrão e amplitude interquartil são medidas de dispersão absoluta, como vimos em aula. Logo, a letra C é a resposta.



Gabarito: C

## Questões FGV

Q.11 (FGV/ Analista de Pesquisa e Informações (FunSaúde CE)/Estatística/2021)

Uma variável aleatória discreta  $X$  tem os seguintes valores possíveis e probabilidades associadas:

$x$	-1	1	3
$p(x)$	0,4	0,2	0,4

A variância de  $X$  é igual a

- a) 2,0.
- b) 2,4.
- c) 2,8.
- d) 3,2.
- e) 3,6.

**Comentários:**

Considere a seguinte tabela:

$X$	$P(X)$
-1	0,4
1	0,2
3	0,4
Total	1,0

A primeira a ser feita é construir a coluna de  $X.P(X)$  e em seguida calcular a média.

$X$	$P(X)$	$X.P(X)$
-1	0,4	-0,4
1	0,2	0,2
3	0,4	1,2



Total	1,0	1,0
-------	-----	-----

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P(X_i) = 1,0$$

Para calcular a variância utilizaremos a seguinte fórmula.

$$Var(X) = \sum_{i=1}^n X_i^2 \cdot P(X_i) - \bar{X}^2$$

X	P(X)	X.P(X)	X <sup>2</sup>	X <sup>2</sup> . P(X)
-1	0,4	-0,4	1 <sup>2</sup> =1	0,4
1	0,2	0,2	1 <sup>2</sup> =1	0,2
3	0,4	1,2	3 <sup>2</sup> =9	3,6
Total	1,0	1,0		4,2

Portanto, a variância será

$$Var(X) = 4,2 - 1,0^2$$

$$Var(X) = 4,2 - 1,0$$

$$Var(X) = 3,2$$

**Gabarito: D**

**Q.12 (FGV/ Estatístico (SUSAM) / 2014)**

Uma variável aleatória X tem média 4 e desvio padrão igual a 2. Se  $Y = 3X - 2$  então a média e o desvio padrão de Y são, respectivamente,

- a) 12 e 16.
- b) 12 e 4.
- c) 10 e 18.



d) 10 e 6.

e) 10 e 36.

### Comentários:

Aqui temos uma questão de transformação de variável. Para resolver essa questão é bom ter o conhecimento das propriedades da média e desvio padrão.

As propriedades para a **média**:

- A soma ou subtração de uma variável aleatória "k" a todos os valores de um conjunto de dados, a média ficará somada ou subtraída por essa constante;
- A multiplicação ou divisão uma variável aleatória "k" a todos os valores de um conjunto de dados, a média fica multiplicado ou dividido por essa constante.

As propriedades para o **desvio padrão**:

- A soma ou subtração de uma constante "k" a todos os valores de um conjunto de dados, o desvio padrão não se alteram;
- A multiplicação ou divisão de uma constante "k" a todos os valores de um conjunto de dados, o desvio padrão fica multiplicado ou dividido por essa constante.

A variável X tem as seguintes medidas:

Média = 4

Desvio padrão = 2

A variável Y é a seguinte:

$$Y = 3X - 2$$

Para encontrar a média e o desvio padrão de Y, basta utilizar as propriedades.

A média é afetada pelas 4 operações matemáticas.

$$\text{Média de } Y = 3 \cdot 4 - 2 = 12 - 2 = \mathbf{10}$$

O desvio padrão é afetado apenas pela multiplicação e divisão.

$$\text{Desvio padrão de } Y = 3 \cdot 2 - 2 = 6 = \mathbf{6}$$



Gabarito: D

Q.13 (FGV / Analista Judiciário / 2022)

Os dados a seguir são uma amostra de idades:

26 28 30 32 32 34 36 38

O desvio padrão dessas idades é igual a

- a) 2.
- b) 3.
- c) 4.
- d) 5.
- e) 6.

Comentários:

Percebam que a distribuição 26 28 30 32 32 34 36 38 é simétrica, portanto a Média é o termo central (ou os termos centrais), logo a nossa média é 32.

Ou simplesmente:

$$\bar{X} = \frac{26+28+30+32+32+34+36+38}{8} = 32$$

Fiquem atentos ao fato de termos uma **AMOSTRA**, portanto, para o cálculo do **desvio padrão**, precisaremos **dividir por (n - 1)**.

$$s^2 = \frac{(26 - 32)^2 + (28 - 32)^2 + (30 - 32)^2 + (32 - 32)^2 + (32 - 32)^2 + (34 - 32)^2 + (36 - 32)^2 + (38 - 32)^2}{8 - 1}$$

$$s^2 = 16$$

$$s = 4$$

Gabarito: C

Q.14 (FGV / Pref. Paulínia / 2021)

Em uma turma de 10 alunos, as notas dos alunos em uma avaliação foram:

6	7	7	8	8	8	8	9	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

O desvio padrão dessa lista de notas é, aproximadamente,



- a) 0,8.
- b) 0,9.
- c) 1,1.
- d) 1,3.
- e) 1,5.

**Comentários:**

Sabemos que o desvio padrão é a raiz quadrada da variância, ok?

A Média Aritmética das notas é igual 8.

$$S^2 = \frac{(6 - 8)^2 + (7 - 8)^2 + (7 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (9 - 8)^2 + (9 - 8)^2 + (10 - 8)^2}{10}$$

$$S^2 = 1,2$$

$$S = 1,1$$

**Gabarito: C**

## LISTA DE QUESTÕES ESTRATÉGICAS



### Questões CEBRASPE

Q.01 (CEBRASPE (CESPE) /ACE (TCE-RJ) / Controle Externo/TI/2021)

X	frequência absoluta
0	5
1	10
2	20
3	15
<b>total</b>	<b>50</b>



Considerando que a tabela precedente mostra a distribuição de frequências de uma variável quantitativa  $X$ , julgue o item a seguir.

A variância amostral de  $X$  é superior a 0,89.

C - CERTO

E - ERRADO

**Q.02 (CEBRASPE (CESPE) / Profissional de Tecnologia da Informação (ME) /2020)**

Considerando que  $R$  representa uma variável quantitativa cuja média, mediana e variância são, respectivamente, iguais a 70, 80 e 100, e que  $U = \frac{R}{10} - 7$ , julgue o próximo item, acerca das variáveis  $U$  e  $R$ .

O desvio padrão da variável  $U$  é igual a 1.

C - CERTO

E - ERRADO

**Q.03 (CEBRASPE (CESPE) / Professor (Pref São Cristóvão)/Matemática/Educação Básica/2019)**

A tabela seguinte mostra a distribuição das idades dos 30 alunos da turma A do quinto ano de uma escola de ensino fundamental.

idade (em anos)	9	10	11	12	13	14
quantidade de estudantes	6	2	0	1	0	1

A partir dessa tabela, julgue o item.

O desvio padrão das idades é inferior a 1ano.

C - Certo.

E - Errado.

**Q.04 (CEBRASPE / IPHAN / Analista / 2018)**



Cinco municípios de um estado brasileiro possuem as seguintes quantidades de patrimônios históricos: {2, 3, 5, 3, 2}.

Admitindo que a média e o desvio-padrão desse conjunto de valores sejam iguais a 3 e 1,2, respectivamente, julgue o item seguinte.

O coeficiente de variação é superior a 0,3 e inferior a 0,5.

C – CERTO

E – ERRADO

#### Q.05 (CEBRASPE / IPHAN / Analista / 2018)

Cinco municípios de um estado brasileiro possuem as seguintes quantidades de patrimônios históricos: {2, 3, 5, 3, 2}.

Admitindo que a média e o desvio-padrão desse conjunto de valores sejam iguais a 3 e 1,2, respectivamente, julgue o item seguinte.

Para esse conjunto de valores, a variância é igual a 3.

C – CERTO

E – ERRADO

#### Q.06 (CEBRASPE - Analista (SERPRO) /Ciência de Dados/2021)

Considerando que o número  $X$  de erros registrados em determinado tipo de código computacional siga uma distribuição binomial com média igual a 4 e variância igual a 3, julgue o item a seguir.

O coeficiente de variação da distribuição de erros  $X$  é igual a 3.

C – CERTO

E – ERRADO

## Questões VUNESP

#### Q.07 (VUNESP - Analista Administrativo (EBSERH HC-UFU) / Estatística/2020)



Um aluno tirou as seguintes notas ao longo do semestre: 4, 8, 6, 1 e 6. A média, a mediana e o desvio padrão foram, respectivamente:

- a) 5; 6 e 5,6.
- b) 5; 5 e 5,6.
- c) 5; 6 e 2,4.
- d) 5; 6 e 31,6.
- e) 6; 6 e 5,6.

#### Q.08 (VUNESP - Analista de Gestão (FITO) /Contabilidade/2020)

Na análise de um conjunto de valores, é muito importante calcular as medidas de tendência central e de dispersão, para se ter uma ideia das características dessa distribuição de dados. Em relação a essas medidas, é correto afirmar que

- a) a moda, a média aritmética e a mediana nunca coincidem em valor.
- b) se somarmos uma constante arbitrária maior que zero a cada elemento desse conjunto de valores, a média aritmética e a variância ficam inalteradas.
- c) se multiplicarmos uma constante arbitrária maior que zero a cada elemento desse conjunto de valores, a nova variância fica multiplicada pelo quadrado dessa constante.
- d) a soma dos desvios de cada valor do conjunto em relação à média apresenta normalmente um valor maior que zero.
- e) se dividirmos cada elemento desse conjunto de valores por uma constante arbitrária maior que zero, o novo desvio padrão fica dividido pelo valor da constante ao quadrado.

### Questões Bancas Diversas

#### Q.09 (IBFC - Supervisor de Pesquisas (IBGE) /Suporte Gerencial/2021)

Em dois grupos formados pela mesma quantidade de pessoas constatou-se que a média de idade do primeiro grupo é igual a 25 com variância de 16, e a média de idade do segundo grupo é igual a 40, com variância de 36. Nessas condições, é correto afirmar que o coeficiente de variação:

- a) do primeiro grupo é maior que o do segundo grupo.



- b) do primeiro grupo é menor que o do segundo grupo.
- c) é igual para ambos os grupos.
- d) é igual a 0,64 para o primeiro grupo e igual a 0,90 para o segundo grupo.
- e) é igual a 1,6 para o primeiro grupo e igual a 1,5 para o segundo grupo.

**Q.10 (IBADE - Analista Público de Gestão (Pref Vila Velha)/Economista/2020)**

Exemplos comuns de medidas de dispersão estatística são:

I – média;

II – mediana;

III – variância;

IV - desvio padrão;

V - amplitude interquartil.

Está(ão) correta(s):

- a) somente V.
- b) somente V e IV.
- c) somente V, IV e III.
- d) somente V, IV, III e II.
- e) I, II, III, IV e V.

## Questões FGV

**Q.11 (FGV/ Analista de Pesquisa e Informações (FunSaúde CE)/Estatística/2021)**

Uma variável aleatória discreta  $X$  tem os seguintes valores possíveis e probabilidades associadas:

$x$	-1	1	3
$p(x)$	0,4	0,2	0,4

A variância de  $X$  é igual a



- a) 2,0.
- b) 2,4.
- c) 2,8.
- d) 3,2.
- e) 3,6.

**Q.12 (FGV/ Estatístico (SUSAM) / 2014)**

Uma variável aleatória  $X$  tem média 4 e desvio padrão igual a 2. Se  $Y = 3X - 2$  então a média e o desvio padrão de  $Y$  são, respectivamente,

- a) 12 e 16.
- b) 12 e 4.
- c) 10 e 18.
- d) 10 e 6.
- e) 10 e 36.

**Q.13 (FGV / Analista Judiciário / 2022)**

Os dados a seguir são uma amostra de idades:

26 28 30 32 32 34 36 38

O desvio padrão dessas idades é igual a

- a) 2.
- b) 3.
- c) 4.
- d) 5.
- e) 6.

**Q.14 (FGV / Pref. Paulínia / 2021)**

Em uma turma de 10 alunos, as notas dos alunos em uma avaliação foram:

6	7	7	8	8	8	8	9	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----



O desvio padrão dessa lista de notas é, aproximadamente,

- a) 0,8.
- b) 0,9.
- c) 1,1.
- d) 1,3.
- e) 1,5.

## Gabarito

GABARITO



<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>
CC	CC	CC	CC	ERR	ERR	C	C	A	C
<u>11</u>	<u>12</u>	<u>13</u>	<u>14</u>	<u>15</u>	<u>16</u>	<u>17</u>	<u>18</u>	<u>19</u>	<u>20</u>
D	D	C	C						



# ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE: PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.



**1** Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.



**2** Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).



**3** Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).



**4** Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).



**5** Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).



**6** Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).



**7** Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.



**8** O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.



Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.