Aula 00

SES-DF (Técnico em Enfermagem) Bizu Estratégico - 2023 (Pós-Edital)

Autor:

Elizabeth Menezes de Pinho Alves, Késia Vieira Ramos de Oliveira, Leonardo Mathias, Paulo Júnior

20 de Junho de 2023

Bizu Estratégico de Raciocínio Lógico e Matemática SES-DF (Técnico em Enfermagem)

Olá, prezado aluno. Tudo certo?

Neste material, traremos uma seleção de *bizus* da disciplina de **Raciocínio Lógico e Matemática** para o concurso da **SES-DF (Técnico em Enfermagem)**.

O objetivo é proporcionar uma revisão rápida e de alta qualidade aos alunos por meio de tópicos que possuem as maiores chances de incidência em prova.

Todos os *bizus* destinam-se a alunos que já estejam na fase bem final de revisão (que já estudaram bastante o conteúdo teórico da disciplina e, nos últimos dias, precisam revisar por algum material bem curto e objetivo).

Leonardo Mathias

@profleomathias

ANÁLISE ESTATÍSTICA

Segue abaixo uma análise estatística dos assuntos mais exigidos pela banca examinadora, para mandarmos super bem na prova!

Raciocínio Lógico e Matemática	
Assunto	**% de cobrança**
Fração, Razão, Proporção e Regra de Três	19,37%
Operações Básicas; Potenciação, Radiciação e Problemas	15,55%
Geometria Plana	12,31%
Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos	11,58%
Porcentagem	9,57%
Probabilidade	8,82%
Análise Combinatória	6,27%

Com essa análise, podemos verificar quais são os temas mais exigidos pela banca e, por meio disso, focaremos nos principais pontos da disciplina em nossa revisão!

Segue índice da aula e baterias de questões, elaboradas em nosso Sistema de Questões, para que você possa praticar após a leitura desse bizu.

Como não temos questões suficientes da banca examinadora, elaboramos cadernos com questões de bancas similares.

Raciocínio Lógico e Matemática – SES-DF		
Assunto	**Bizus**	**Caderno de Questões**
Fração, Razão, Proporção e Regra de Três	1 a 4	http://questo.es/etloyx
Operações Básicas; Potenciação, Radiciação e Problemas	5	http://questo.es/l60k3v
Porcentagem	6 a 10	http://questo.es/0idajb
Geometria Plana	11 a 15	http://questo.es/ghml4i
Probabilidade	16 a 19	http://questo.es/0ymb58
Análise Combinatória	20 a 23	http://questo.es/i6o0gl
Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos	24 a 32	http://questo.es/z0olz8

Apresentação

Olá, futuro(a) aprovado(a)! Antes de darmos início aos nossos trabalhos, farei uma breve apresentação:

Meu nome é ***Leonardo Mathias***, tenho 33 anos e sou natural do Rio de Janeiro. Atualmente, vivo em São Paulo em virtude do exercício do cargo de ***Auditor de Controle Externo*** no Tribunal de Contas do Estado de São Paulo (***TCE-SP***), tendo sido aprovado no último certame, realizado no ano de 2017.

Sou Bacharel em Administração e Ciências Navais pela Escola Naval (2011), Pós-Graduado em Gestão Pública pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Pós-Graduado em Intendência pelo Centro de Instrução e Adestramento Almirante Newton Braga, e trabalhei durante vários anos como Oficial do Corpo de Intendentes da Marinha do Brasil, tendo alcançado o posto de Capitão.

Meu contato com os concursos públicos começou cedo: aos 13 anos, em 2003, fui aprovado nos principais certames militares de nível médio existentes no Brasil (Colégio Naval e EPCAr). Após quase 13 anos de vida na caserna, decidi buscar novos horizontes de vida e voltei a estudar para concursos públicos, tendo tido a felicidade de ser aprovado em alguns concursos, inclusive da Área Fiscal, mas optei por tornar-me Auditor de Controle Externo do TCE-SP.

Como pode perceber, há pouco tempo, eu estava justamente aí onde você, concurseiro, está. Logo, utilizarei as experiências e conhecimentos adquiridos ao longo da minha trajetória para auxiliá-lo(a) na disciplina de **Raciocínio Lógico e Matemática**. Fiz uma análise bem cautelosa dos pontos mais queridos pela banca examinadora, e todos eles estão aqui! Cada questão no concurso vale ouro, então não podemos dar bobeira! Mãos à obra!

Leonardo Mathias

Frações, Razão e Proporção

1. Operações com frações

- Adição / Subtração - para somarmos/subtrairmos duas frações, deveremos deixá-las, necessariamente, com os mesmos denominadores. E para isso precisaremos muitas vezes encontrar o Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C).

- Adição / Subtração - para somarmos/subtrairmos duas frações, deveremos deixá-las, necessariamente, com os mesmos denominadores. E para isso precisaremos muitas vezes encontrar o Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C).

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{8}=\frac{16+9}{24}=\frac{25}{24}$$

- Multiplicação - na multiplicação de duas ou mais frações, temos a regrinha básica de multiplicarmos numerador com numerador e denominador com denominador, meus caros.

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{2}=\frac{3\cdot 10}{5\cdot 2}=\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}=3$$

- Divisão- na divisão de duas frações, também temos a velha e conhecida regrinha básica, repetimos a primeira fração e multiplicamos pelo inverso da segunda fração

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{15}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{6}=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}=\frac{3}{2}$$

- Potenciação/Radiciação - o grande cuidado aqui que devemos ter é no lance do expoente da fração (-)n e do índice do radical n- .

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}. \textit{O mesmo raciocínio vale para a radiciação.}$$

$$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$$

2. Múltiplos e divisores

- O MMC de dois, três ou mais números inteiros é o menor número que é múltiplo simultaneamente dos dois, três ou mais números, com exceção do número 0 (zero), obviamente. Por exemplo, o menor múltiplo comum entre 3 e 5 é 15, pois 15 é divisível por 3 e por 5 ao mesmo tempo.
- O MDC entre dois ou mais números naturais é o maior número que os divide sem deixar resto.

3. Média aritmética simples

- A média aritmética preserva a soma da lista de números
- Para calcular a média aritmética, basta somar todos os elementos e dividir pela quantidade de elementos.

Média= (x1+x2+x3+…+xn)/n

Regra de Três Simples e Composta

4. Regra de Três Simples e Composta

✓ Regra de três – Consiste em transformar uma proporção em uma equação matemática com uma incógnita. Para fazer isto, basta fazer uma multiplicação cruzada dos termos da proporção.

- Por exemplo: Considere que o mesmo **carro** percorra em média **500 km** com um tanque de **40 L** de **gasolina**. Qual a distância percorrida se o carro utiliza **100 L** de gasolina?

Gasolina (L)	Distância (km)
40	500
100	X

Sabemos que se o consumo médio do veículo é constante, logo a razão $\frac{500}{40}$ é PROPORCIONAL à razão $\frac{X}{100}$. Podemos, portanto, igualá-las.

$$\frac{500}{40}=\frac{X}{100}$$

TOME NOTA!

Uma proporção nada mais é do que uma igualdade entre mais de duas razões.

✓ Regra de três composta – Operação algébrica para resolver um conjunto de três ou mais proporções.
  - Tudo que está no numerador das proporções 2 e 3 é multiplicado por X. Tudo que está no denominador das proporções 2 e 3 é multiplicado por 2.

$$\frac{2}{X}=\frac{6}{3}=\frac{16}{8}$$

Operações Básicas; Potenciação e Radiciação; Problemas

5. Informações Relevantes

Informações Relevantes

- Propriedades da Potenciação

$$a^0 = 1$$
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n\ vezes}$$

P1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

P2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

P3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

P4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Propriedades da Radiciação

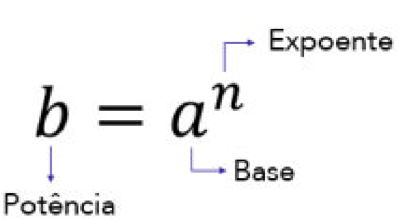
P5) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

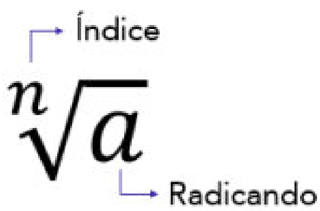
P6) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

P7) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

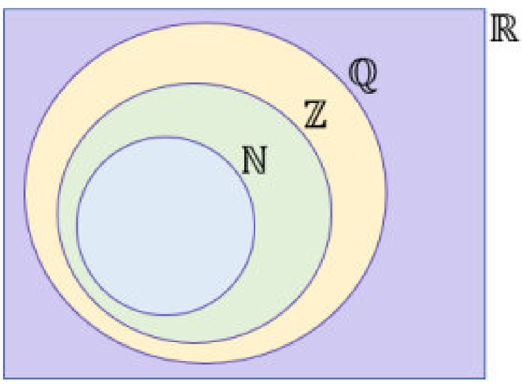
P8) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Esquemas e Diagramas





	+	-
+	+	-
-	-	+



Porcentagem

6. Percentual de um valor

- Em geral, podemos trocar o denominador 100 pelo símbolo % (por cento).
  - $\frac{p}{100} = p\%$
- **Para calcular** $\boldsymbol{x}$% de um valor, basta multiplicar o valor pelo número $\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{100}}$.
- Exemplo:
  - Calcular 20% de 30% de 40% de 1.000.
    - $\frac{20}{100} \cdot \frac{30}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot 1000 = \frac{6000}{250} = 24$

7. Transformação de fração ordinária em taxa percentual

- Para transformar uma fração ordinária ou um número qualquer em taxa percentual, basta multiplicá-la por 100%.
- Exemplo:
  - Transformar a fração 3/8 em taxa percentual.
    - $\frac{3}{8} = \frac{3}{8} \cdot 100\% = \frac{300}{8}\% = 37{,}5\%$
  - Transformar 0,4 em taxa percentual.
    - $0{,}4 = 0{,}4 \cdot 100\% = 40\%$

8. Participação percentual de uma parte do todo

- Imagine um grupo de 300 pessoas, 120 são homens. Como calculamos a participação percentual dos homens?
  - Basta dividir a "parte" pelo "todo"
    - $\frac{120}{300} \cdot 100\% = 40\%$

9. Variação percentual

- A razão entre a diferença de valores (valor final menos o valor inicial) e o preço inicial, expressa em forma de porcentagem, é chamada variação percentual.
  - $i = \frac{V_{final} - V_{inicial}}{V_{inicial}}$
  - $Se\ i > 0, taxa\ é\ de\ crescimento$
  - $Se\ i < 0, taxa\ é\ de\ decrescimento\ (desconto)$

- Exemplo:
  - Exemplo: Guilherme decidiu comprar uma televisão no valor de R$ 1.200,00. Esperou o seu salário entrar no início do mês, para que ficasse mais "folgado". Quando então foi à loja efetuar o pagamento, soube que o preço da televisão tinha subido para R$ 1.500,00. Qual foi o percentual de aumento no preço da televisão?
    - $i = \frac{V_{final} - V_{inicial}}{V_{inicial}} = \frac{1500-1200}{1200} = 25\%$

10. Variações percentuais sucessivas

- Para **diminuir p%** de um valor original, devemos multiplicar por **100% - p%.**
- Para **aumentar p%** de um valor original, devemos multiplicar por **100% + p%.**

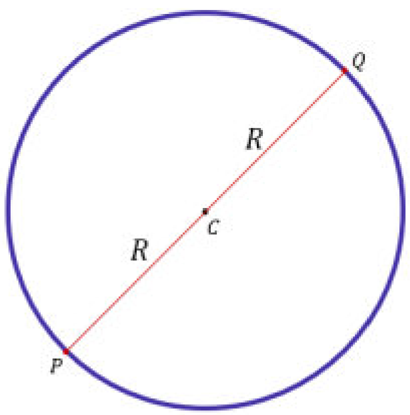
- Exemplo:
  - Exemplo: Uma mercadoria custa R$ 300,00. Em uma primeira ocasião, sofreu um aumento de 40%. Dois meses depois, a loja anunciou uma liquidação e a mercadoria sofreu um desconto de 25%. Qual o valor final da mercadoria? Qual a variação percentual acumulada?
    - Após o aumento a mercadoria vale: 140% de R$ 300,00= $\frac{140}{100}.300 = 420\ reais$
    - Após o desconto a mercadoria vale: 75% de R$ 4200,00= $\frac{75}{100}.420 = 315\ reais$

Geometria Plana

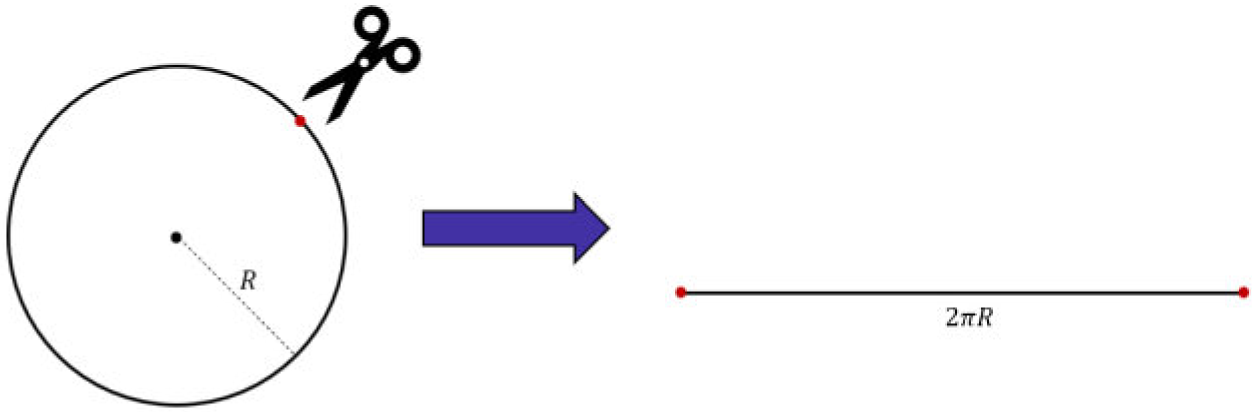
11. Principais Ângulos

Principais Ângulos			
Em Graus	Em Radianos	Em Graus	Em Radianos
$0°$	0 rad	$120°$	$\frac{2\pi}{3}$ rad
$30°$	$\frac{\pi}{6}$ rad	$150°$	$\frac{5\pi}{6}$ rad
$45°$	$\frac{\pi}{4}$ rad	$180°$	π rad
$60°$	$\frac{\pi}{3}$ rad	$270°$	$\frac{3\pi}{2}$ rad
$90°$	$\frac{\pi}{2}$ rad	$360°$	2π rad

12. Circunferência



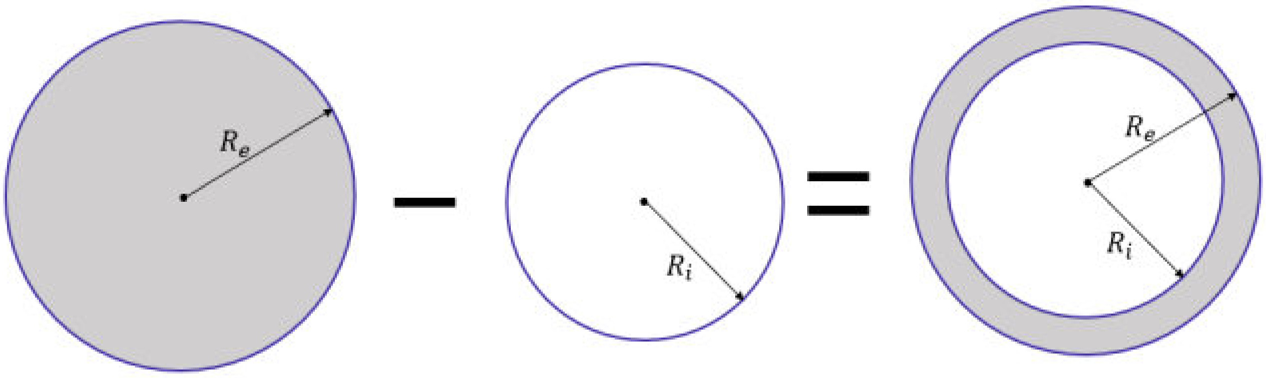
$$\boxed{D = 2R}$$



$$C = 2\pi R$$

$$A = \pi R^2$$

$$A_{setor} = \left(\frac{\alpha}{360°}\right)\pi R^2$$



$$A_{coroa} = A_{externo} - A_{interno} \quad \rightarrow \quad A_{coroa} = \pi R_e^2 - \pi R_i^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_{coroa} = \pi\left(R_e^2 - R_i^2\right)}$$

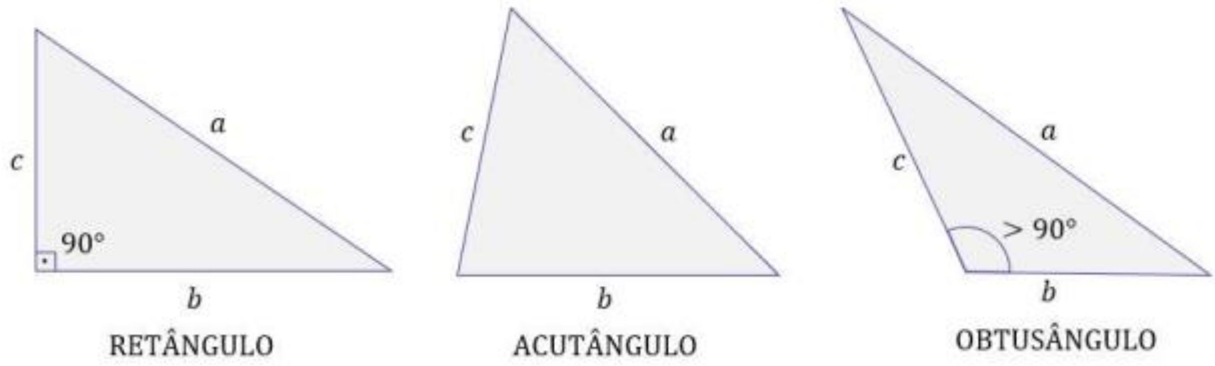
13. Triângulos

<u>- Classificações:</u>

- **Escaleno:** todo triângulo que possui os **três lados distintos**! $a \neq b \neq c$. Como consequência, os ângulos opostos a cada um desses lados também serão diferentes.

- **Isósceles:** triângulo que possui **dois lados iguais**. Os ângulos opostos a esses lados também serão idênticos.

- **Equilátero:** triângulo com **todos os lados iguais**. Assim, todos os ângulos internos desse tipo de triângulo também são congruentes, medindo exatamente 60°.



A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°!

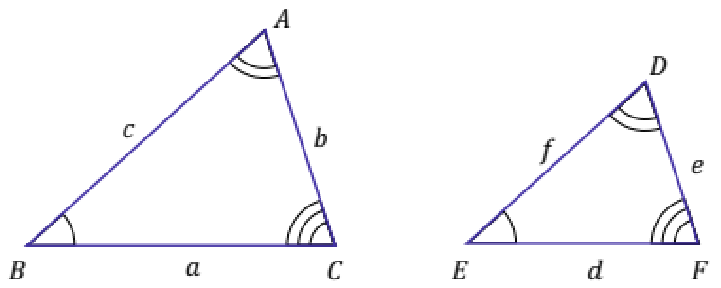
A soma dos ângulos <u>externos</u> de um triângulo vale 360°.

- Congruência e Semelhança de Triângulos

Triângulos Congruentes: ÂNGULOS E LADOS IGUAIS.

Triângulos Semelhantes: ÂNGULOS IGUAIS E LADOS PROPORCIONAIS.

Se você identificar que dois triângulos são semelhantes, então poderá estabelecer **uma relação entre os lados desse triângulo**. Observe a figura abaixo.

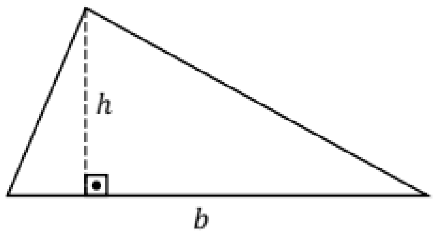


Galera, **ABC e DEF são triângulos semelhantes**. Com isso, sabemos que seus lados proporcionais. Por sabemos esse fato, podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$$

- Área de um Triângulo

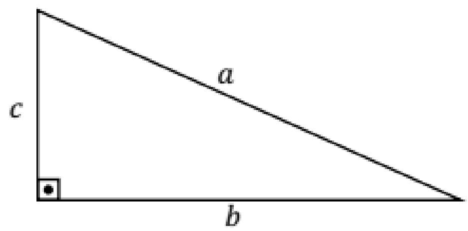
- Quando temos a base e a altura do triângulo.



"h" representa a medida da altura, enquanto **"b" representa a medida da base**. Quando tivermos essas informações, podemos calcular a área de um triângulo por meio da seguinte fórmula:

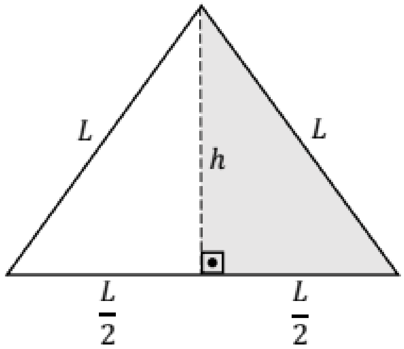
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

- **Quando o triângulo é retângulo**



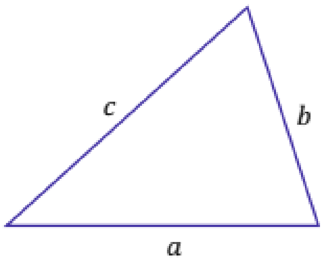
$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$

- Quando o triângulo é equilátero



$$A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

- Quanto temos apenas os lados do triângulo.

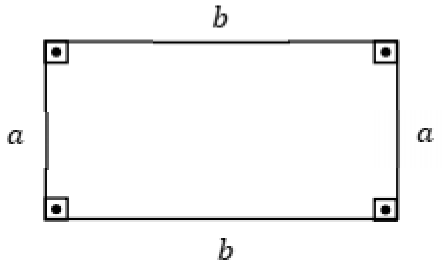


$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

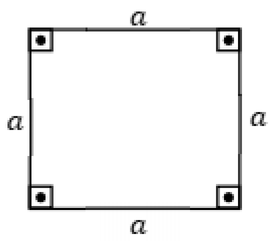
14. Quadriláteros

Retângulo



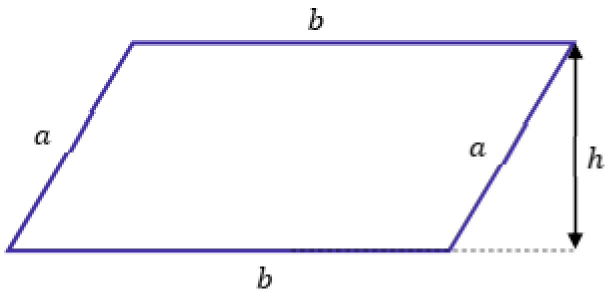
$$ÁREA = a \cdot b$$

Quadrado



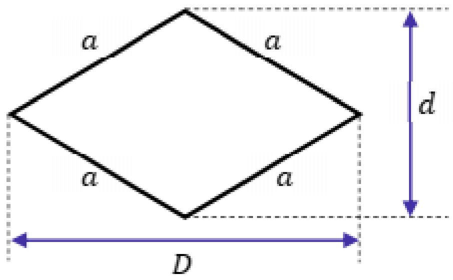
$$ÁREA = a^2$$

Paralelogramo



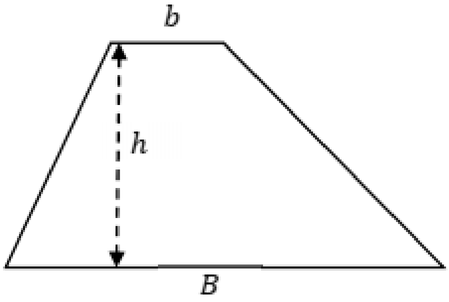
$$ÁREA = b \cdot h$$

Losango



$$ÁREA = \frac{D \cdot d}{2}$$

Trapézio



$$ÁREA = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

15. Polígonos

A soma dos ângulos externos de qualquer polígono <u>convexo</u> será sempre 360°.

Ademais, **a soma dos ângulos <u>internos</u> de um polígono de "n" lados** é dada por:

$$S_i = (n-2)\cdot 180°$$

TOME
NOTA!

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

"d" representa a quantidade de diagonais e "n" é o número de lados do polígono.

Probabilidade

16. Princípio Fundamental da Contagem

- Se um experimento pode ocorrer em várias etapas sucessivas e independentes de tal modo que:
  - **P1** é o número de possibilidades da 1ª etapa.
  - **P2** é o número de possibilidades da 2ª etapa.

- **Pn** é o número de possibilidades da n-ésima etapa.

O número total de possibilidades de o acontecimento ocorrer é igual a:

$$\boldsymbol{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n}$$

17. Definições de Probabilidade

- Espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório
- Evento é todo subconjunto do espaço amostral
- Quando o evento é igual ao espaço amostral, dizemos que o evento é certo.
- Quando o evento é igual ao conjunto vazio, dizemos que o evento é impossível.

- <u>Definição Clássica de Probabilidade:</u>

$$Probabilidade = \frac{\textbf{Número de casos favoráveis}}{\textbf{Número de casos possíveis}}$$

- Frequência relativa – realizando-se um experimento aleatório **N** vezes, definimos frequência relativa de um evento como sendo o número ***f*** tal que:

$$f = \frac{n}{N}$$

- <u>Combinações de eventos:</u>

  - <u>União de dois eventos:</u> Considere dois eventos A e B. O evento união ocorre se e somente se A ou B (ou ambos) ocorrerem.
  - <u>A intersecção de dois eventos</u>: Considere dois eventos A e B. O evento interseção ocorre se e somente se os dois eventos ocorrerem (A e B ocorrerem)
  - <u>Complementar de um evento</u>: Considere um evento A. O evento complementar de A ocorre se e somente se não ocorre A.
  - Se $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}$, dizemos que A e B são <u>eventos exclusivos</u>.
  - Se $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$, dizemos que A e B são <u>eventos mutuamente exclusivos (ou excludentes).</u>

- <u>Definição Axiomática de Probabilidade</u>:

  - $P(A) \geq 0$

- $P(U) = 1$
- Se A e B são eventos mutuamente excludentes ($A \cap B = \emptyset$), então $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.

18. Probabilidade Condicional

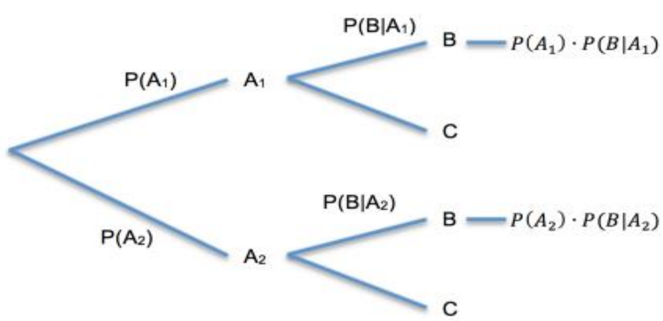
- A probabilidade de que um evento B ocorra, sabendo que um evento A ocorreu é dada por:

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- Se a ocorrência do evento A não influir no cálculo da probabilidade do evento B, os eventos são ditos independentes e neste caso tem-se:

$$P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B)$$

19. Teorema da Probabilidade Total



$$\boldsymbol{P(B) = P(A_1).P(B \setminus A_1) + P(A_2) + P(B \setminus A_2)}$$

Análise Combinatória

20. Princípios Fundamentais da Contagem

Princípio Multiplicativo

Se um evento *A* ocorre de **m** maneiras diferentes **e** se, para cada uma dessas maneiras, um outro evento *B* ocorre de **n** maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de **ambos** os eventos (*A* **e** *B*) ocorrerem é **m x n**.

Podemos extrapolar esse princípio para qualquer número de eventos. Ou seja, se tivermos um terceiro evento C que ocorre de p maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de os eventos A, B e C ocorrerem é m x n x p.

Generalizando, para n eventos, com $\mathbf{p_1}$ possibilidades para o evento A_1, $\mathbf{p_2}$ possibilidades para o evento A_2, ... e $\mathbf{p_n}$ possibilidades para o evento A_n, então o número de maneiras de **todos** os n eventos ocorrerem é:

$$P(A_1 \text{ e } A_2 \text{ e } \dots \text{ e } A_n) = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$$

Contagem de Divisores

Com base no princípio multiplicativo, é possível calcular a quantidade de divisores de um número natural. O primeiro passo é fatorar o número natural em números primos. Para exemplificar, vamos trabalhar com o número 60. Podemos calcular os divisores primos da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Assim, podemos representar o número 60, a partir dos seus divisores primos, da seguinte forma:

$$60 = 2^{2} \times 3^{1} \times 5^{1}$$

Todos os divisores de um número são compostos do produto de um conjunto dos seus divisores primos. Por exemplo, o número 15 é produto de 3 e 5, podendo ser representado da seguinte forma:

$$15 = 2^{\mathbf{0}} \times 3^{\mathbf{1}} \times 5^{\mathbf{1}}$$

De maneira geral, todos os divisores de 60, que podemos denotar por $d$$% , podem ser representados da seguinte forma:

$$d_{60} = 2^{x} \times 3^{y} \times 5^{z}, \qquad sendo\ \boldsymbol{x} \leq \mathbf{2}, \boldsymbol{y} \leq \mathbf{1}, \boldsymbol{z} \leq \mathbf{1}$$

Logo, as possibilidades para cada expoente são:

- x: 0, 1 ou 2 (3 possibilidades);
- y: 0 ou 1 (2 possibilidades);
- z: 0 ou 1 (2 possibilidades)

Pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar as possibilidades desses eventos para encontrar o número de possibilidades, no total: 3 x 2 x 2 = 12

Logo, há 12 divisores de 60

Observe que os **expoentes dos divisores primos** de 60 eram **2**, **1** e **1**, e os valores multiplicados para encontrar o número de divisores foram **3**, **2** e **2**. Portanto, basta **somar 1 a cada expoente e multiplicá-los**: Número de Divisores = (2 **+ 1**) x (1 **+ 1**) x (1 **+ 1**) = 3 x 2 x 2

Princípio Aditivo

*Se o evento A ocorre de m maneiras diferentes e o evento B ocorre de n maneiras diferentes, e se A e B são **mutuamente exclusivos*** (ou seja, se um ocorrer o outro **não** ocorre), *então o número de maneiras de ocorrer **um** dos eventos (A **ou** B) é **m + n**.*

Havendo n eventos **mutuamente exclusivos**, com p_1 possibilidades para o evento A_1, p_2 possibilidades para o evento A_2, ... e p_n possibilidades para o evento A_n, então o número de maneiras **um** dos n eventos ocorrer é:

$$P(A_1 \text{ ou } A_2 \text{ ou } \dots \text{ ou } A_n) = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

Em suma, quando ocorrem ambos eventos (A e B), multiplicamos as possibilidades de cada evento (princípio multiplicativo); quando ocorre somente um dos eventos (A ou B), somamos as possibilidades de cada evento (princípio aditivo).

Eventos Concomitantes: A **e** B → Princípio Multiplicativo: n(A) **x** n(B)

Eventos Excludentes: A **ou** B → Princípio Aditivo: n(A) **+** n(B)

Agora, vejamos ver um exemplo combinando esses dois princípios.

Vamos considerar que Maria precisa se vestir e se calçar, dispondo de **4 vestidos**, **2 saias**, **3 blusas** e **5 sapatos**. Nesse caso, Maria irá colocar um **vestido (evento A)** **OU** um conjunto de **saia (evento B)** e **blusa (evento C)**. De uma forma ou de outra, irá colocar **TAMBÉM** um **sapato (evento D)**.

Nessa situação, temos:

i) Os eventos **B (saia)** e **C (blusa)** são **concomitantes** – princípio **multiplicativo**: 2 **x** 3 = **6** possibilidades;

ii) Os eventos **A (vestido)** e **(i) (saia e blusa)** são **excludentes** – princípio **aditivo**: 4 + **6** = **10** possibilidades;

iii) Os eventos **D (sapato)** e **(iii) (saia e blusa ou vestido)** são **concomitantes** – princípio multiplicativo: 5 **x** **10** = 50 possibilidades.

Casa dos Pombos

Se n pombos devem se abrigar em m casas e se $n > m$, então pelo menos uma casa irá conter **mais de um** pombo.

21. Fatorial de um número natural

O fatorial de um número natural (como 0, 1, 2, 3, ...) é representado como:

$$n!$$

O fatorial representa o **produto de todos os números inteiros positivos menores ou iguais àquele número**, conforme indicado a seguir:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Por exemplo:

2! = 2 x 1 = 2

3! = 3 x 2 x 1 = 6

4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24

5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120

6! = 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 72

Agora, vejamos dois casos especiais do fatorial. O fatorial de 1 pode ser entendido pela própria definição de fatorial. Como não há número inteiro positivo menor do que 1, apenas igual, então esse será o único fator:

1! = 1

O segundo caso especial é 0! Você pode considerar como convenção o seguinte resultado:

0! = 1

22. Permutação

As técnicas de permutação permitem calcular as diferentes possibilidades de se ordenar elementos.

Permutação Simples

Portanto, a **permutação simples** de **n elementos** distintos P_n, isto é, o **número de possibilidades de ordenar n elementos distintos**, é dada por:

$$P_n = n!$$

Ex: $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Permutação Simples com Restrição

É possível que algumas questões de permutações imponham determinadas restrições. Nesses casos, nem todos os elementos poderão permutar livremente, o que exige mais atenção para resolver a questão.

Na permutação simples com restrição, (i) podemos designar posições para determinados elementos ou (ii) podemos determinar elementos a permanecerem juntos.

i) Quando designamos posições, devemos permutar os demais elementos.

i.a) Havendo **p elementos fixos** em determinadas posições, dentre n elementos no total, devemos **permutar n – p elementos**:

$$P_{n-p} = (n-p)!$$

i.b) Caso os p elementos possam ser reordenados dentre as posições designadas, devemos **multiplicar** o resultado anterior pela **permutação de p elementos:**

$$P_{n-p} \times P_p = (n - p)! \times p!$$

ii) Quando determinamos elementos a permanecerem juntos, devemos considerá-los como elementos único e **permutar esse novo elemento junto aos demais.**

ii.a) Havendo j elementos que deverão permanecer juntos em determinada ordem, dentre n elementos no total, devemos permutar **os demais n – j elementos acrescidos de 1** unidade, a qual corresponde ao conjunto dos j elementos:

$$P_{n-j+1} = (n - j + 1)!$$

i.b) Se os j elementos que deverão permanecer juntos puderem ser reordenados entre si, devemos **multiplicar** o resultado anterior pela **permutação de j elementos**:

$$P_{n-j+1} \times P_j = (n - j + 1)! \times j!$$

Permutação com repetição

De modo geral, sendo n elementos totais, com $m_1, m_2, \ldots, m_k$ elementos distintos repetidos, a permutação desses elementos é dada por:

$$P_n^{m_1, m_2, \ldots, m_k} = \frac{n!}{m_1! \times m_2! \times \ldots \times m_k!}$$

Permutação circular

Em geral, como **fixamos um** dos elementos, a permutação circular de n elementos, indicada por PC_n, é:

$$PC_n = (n-1)!$$

23. Arranjo e Combinação

As técnicas que veremos nesta seção (arranjo e combinação) trabalham com a seleção de um subconjunto dos elementos. A ordem dos elementos selecionados será relevante para o arranjo, mas não para a combinação. Em outras palavras, selecionar os elementos A e B ou os elementos B e A são possibilidades distintas para o arranjo, porém equivalentes para a combinação.

Arranjo Simples

O arranjo de um conjunto finito de elementos é um subconjunto desses elementos, de tal maneira que a sua ordenação seja relevante.

Para o caso geral de um arranjo **sem reposição** de k elementos, em um conjunto de n elementos distintos, temos:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Outra notação possível para o arranjo é A_n^k.

Ex.: Suponha que existam 6 pessoas em um sorteio, em que 3 delas serão sorteadas, não sendo possível sortear a mesma pessoa mais de uma vez. Considerando a ordem relevante, de quantas formas 3 pessoas poderão ser sorteadas?

Como ocorrerão os três sorteios, pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar as possibilidades de cada evento. Dessa forma, o resultado desse arranjo é:

$$6 \times 5 \times 4$$

No caso de $\boldsymbol{k} = \mathbf{4}$ sorteios para um conjunto de $\boldsymbol{n} = \mathbf{10}$ pessoas, fazemos

$$\frac{\mathbf{10}!}{(\mathbf{10}-\mathbf{4})!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$$

> A fórmula de arranjo que acabamos de ver serve para casos **sem reposição**, ou seja, quando um mesmo elemento **não** puder ser selecionado **mais de uma vez**.
>
> Caso haja reposição, o **número de elementos disponíveis** para cada sorteio é sempre o **mesmo**. Por exemplo, em uma seleção, cuja ordem importe, de 3 elementos, dentre 6 elementos disponíveis no total, **com reposição**, o número de possibilidades é:
>
> $$6 \times 6 \times 6 = 6^3$$
>
> De modo geral, o arranjo **com reposição** (ou **repetição**) de $\boldsymbol{k}$ elementos dentre $\boldsymbol{n}$ elementos no total é dado por:
>
> $$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}} = \underbrace{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} \times \ldots \times \boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k} \text{ vezes}} = \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}$$

Combinação Simples

Assim como no caso do arranjo, a combinação é uma seleção de elementos de um conjunto finito. Entretanto, para a combinação, a ordem não importa. Por exemplo, em um sorteio de participantes para um grupo de estudo, a ordem do sorteio de cada participante é irrelevante.

De maneira geral, a combinação **sem reposição** de k elementos, de um total de n elementos, é dada por:

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Outras notações comuns para a combinação são C_n^k ou $\binom{n}{k}$.

Teoria dos Conjuntos

24. Igualdade de conjuntos

- **Dois conjuntos são iguais** se e somente se eles possuem os **mesmos elementos** (na definição de igualdade entre conjuntos não é relevante a noção de ordem entre os elementos).
  - $\{a,e,i,o,u\}=\{e,i,o,a,u\}$
- Considere o conjunto $\{a,b\}$. Este conjunto possui apenas dois elementos, a saber: a, b

$$a \in \{a,b\}$$
$$b \in \{a,b\}$$

- Considere agora o conjunto $\{\{a,b\},\{a,c\}\}$. O conjunto $\{\{a,b\},\{a,c\}\}$ possui dois elementos, a saber: {a,b} e {a,c}.
  - Observe que os elementos do conjunto $\{\{a,b\},\{a,c\}\}$ são dois conjuntos.

- Podemos afirmar que:

$$\{a,b\} \in \{\{\mathbf{a},\mathbf{b}\},\{\mathbf{a},\mathbf{c}\}\}$$

$$\{a,c\} \in \{\{\mathbf{a},\mathbf{b}\},\{\mathbf{a},\mathbf{c}\}\}$$

- Mas não podemos afirmar que $a\in\{\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\},\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\}\}$, pois os elementos de $\{\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\},\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\}\}$ são conjuntos e não letras.

25. Conjunto das Partes

- O conjunto das Partes "P(A)" é o **conjunto formado por todos os subconjuntos de um conjunto**.

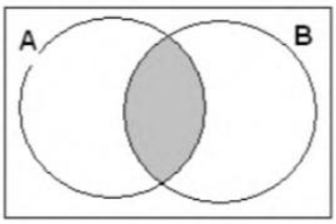
- Para sabermos quantos elementos tem esse conjunto usar $\mathbf{2^n}$**,** em que n é o número de elementos do conjunto.

- Exemplo:
  - Quantos subconjuntos tem o conjunto A = {2, 4, 6, 8}?
  - Temos 4 elementos.

  - Portanto: $2^4 = 16$

26. Operações com conjuntos

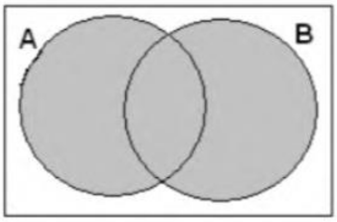
- A **interseção** de dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que são comuns a A e B, isto é, pelos elementos que pertencem a A e também pertencem a B, ou seja, **A e B. (A∩ B).**



  - $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$
  - $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cap\mathbf{A}$
  - $\boldsymbol{A}\cap(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})\cap\mathbf{C}$

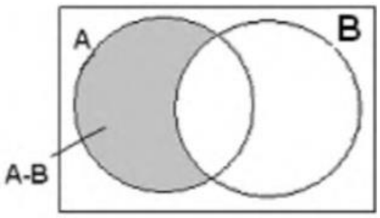
- Se $A \subset B$, então $A \cap B = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $(A \cap B) \subset A$ e $(A \cap B) \subset B$

o A **União** de dois conjuntos A e B é o conjunto formado **reunião dos elementos** desses conjuntos, ou seja, **A ou B. (A U B).**



- $A \cap A = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- Se $A \subset B$, então $A \cup B = B$
- $A \cup \emptyset = A$

o A **diferença** entre A e B corresponde ao conjunto dos **elementos que pertencem a A e não pertencem a B**, ou seja os elementos que estão **somente em A. (A – B).**



- Se $A \cap B = \emptyset$, então $A - B = A$ e $B - A = B$.
- $A - A = \emptyset$
- $A - \emptyset = A$
- Se $A \subset B$, então $A - B = \emptyset$.

o Exemplo:

- Sendo A = {0,1,2,3}, B = {2, 4, 6} e C = {1,2,3,4}, determine (A – B) U (B∩ C).
  - A – B = {0, 1, 3}
  - B∩ C = {2, 4}
  - (A – B) U (B∩ C) = {2, 4} U {0, 1, 3} = {0, 1, 2, 3, 4}

27. Propriedades da união e interseção

- $\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}$
- $\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}$
- $\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})$
- $\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C})$

28. Complementação

- Consideremos dois conjuntos A e B, tais que $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$. Chama-se complementar de A em relação a B o conjunto B – A, ou seja, o conjunto formado pelos elementos de B que não pertencem ao conjunto A.

- Suponha que U seja o conjunto universo, em uma situação problema envolvendo os conjuntos A e B. Desta maneira, $A \subset U$ e $B \subset U$. O complementar do conjunto A em relação ao universo U é indicado por :

$$\overline{A} = A^C = A' = \{x \in U | x \notin A\}$$

$$\overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$$

$$\overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$$

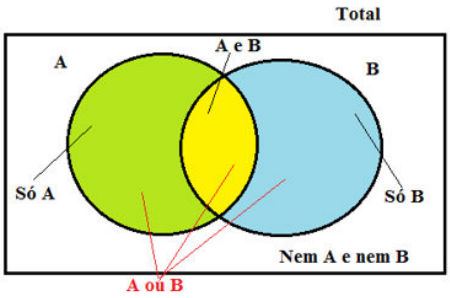
$$\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{A}} = \emptyset$$

29. Uso dos Diagramas de Venn para a solução de problemas envolvendo conjuntos

- Esses digramas **possuem um papel fundamental na organização de dados**.



- As questões normalmente pedem alguma dessas informações. Então para resolver esse tipo de problema basta montar o diagrama. Lembrando sempre na hora de iniciar a resolução **procurar qual valor é a intersecção e iniciar por ele**.

- Exemplo

  - Em uma sala de aula com 50 alunos, 20 gostam de português, 23 gostam de matemática e 5 gostam das duas matérias. Pergunta-se:
    A) quantos gostam somente de matemática?
    B) quantos gostam de matemática ou português?
    C) Quantos não gostam de nenhuma das matérias?

  - Montando o diagrama, sendo a intersecção 5

  - Assim, os que gostam só de matemática são 15, os que gostam de matemática ou português são 38 e os que não gostam de nenhuma matéria são 12.

- Quando tivermos três informações podemos usar o mesmo processo, só que usando 3 diagramas.

Conjuntos Numéricos

30. Conjunto dos Naturais (N), Inteiros (Z) e Racionais (Q)

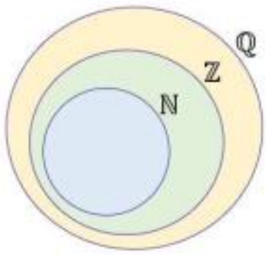
O conjunto dos números naturais é representado pelo símbolo $\mathbb{N}$. Basicamente, esse conjunto compreenderá aqueles números que **surgem "naturalmente" da necessidade de contar**. Observe.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Para obtermos o conjunto dos números inteiros, basta **pegar os naturais e adicionar os números negativos**!

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Chegamos aos conjuntos dos números racionais! **O $\mathbb{Q}$ será formado pelo conjunto dos números inteiros mais os "números quebrados"!** Basicamente, dizemos que um número é racional se ele pode ser representado na **forma de fração**! Perceba, portanto, que o conjunto dos inteiros é um subconjunto dos racionais! $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.



31. Conjunto dos Irracionais (I), Reais (R) e Complexos (C)

Normalmente, **representamos o conjunto dos irracionais como $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ou simplesmente $\mathbb{I}$**. Lembre-se da operação "Diferença" que já conhecemos! Sendo assim, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ significa **o conjunto formado pelos números reais que não são números racionais**! Mas o que seriam os números irracionais? Os números irracionais são todos os números que não podem ser representados pela fração de dois inteiros! Por exemplo, $\sqrt{2}$ e π são exemplos de números irracionais. Abaixo, vamos conhecer alguns números irracionais famosos!

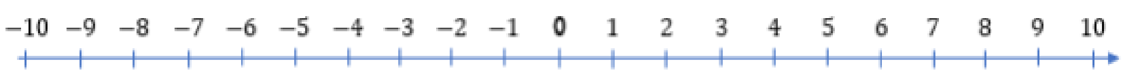
- Pi (π)

$$\pi \approx 3{,}141592 \dots$$

- Razão de Ouro (ou Proporção Áurea)

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618033 \dots$$

Chegamos ao conjunto dos números reais! Esse conjunto **engloba tanto o conjunto dos números racionais quanto os números irracionais!** Um número real é o conjunto de **todos os números que lidamos no nosso dia a dia...** Não importa se ele tem uma representação decimal finita tal como os números $\mathbf{1,5}$ e $\mathbf{10,354}$ ou uma representação decimal infinita como $\mathbf{1,6666\dots}$ e $\mathbf{3,1415\dots}$. Além de representar o conjunto dos números reais em um diagrama, também usamos uma reta! **É a chamada reta real**!



- Um número complexo é um número "z" que possui a forma:

$$z = a + bi \qquad a, b \in \mathbb{R} \;\; e \;\; i = \sqrt{-1}$$

- Todo número real é um número complexo, mas nem todo complexo é um número real.

- O conjunto dos reais está contido no conjunto dos complexos.

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

32. Problemas envolvendo Conjuntos Numéricos

- A soma de números naturais é sempre um número natural;
- A soma de números inteiros é sempre um número inteiro;
- A soma de números racionais é sempre um número racional;
- A soma de números reais é sempre um número real.

- A subtração de números inteiros é um outro número inteiro.
- A subtração de números racionais é um outro número racional.
- A subtração de números reais é um outro número real.

- A multiplicação de dois números naturais é sempre um número natural.
- A multiplicação de dois números inteiros é sempre um número inteiro.
- A multiplicação de dois números racionais é sempre um número racional.
- A multiplicação de dois números reais é sempre um número real.

- A divisão de dois números racionais será sempre um racional.
- A divisão de dois números reais será sempre um número real.

Vamos ficando por aqui. Esperamos que tenha gostado do nosso Bizu! Bons estudos!

"Se não puder voar, corra. Se não puder correr, ande. Se não puder andar, rasteje, mas continue em frente de qualquer jeito". (Martin Luther King)

Leonardo Mathias

@profleomathias

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1 Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2 Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3 Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4 Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5 Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6 Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7 Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8 O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.