Aula 00

CBM-AP (Soldado) Matemática - 2022 (Pós-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

30 de Abril de 2022

Índice

1) Aviso 3
2) Apresentação do Curso 4
3) Introdução à Teoria dos Conjuntos 5
4) União, Intersecção, Complementar e Diferença 16
5) Princípio da Inclusão-Exclusão 28
6) Introdução - Conjuntos Numéricos 41
7) Problemas 50
8) Questões Comentadas - Introdução à Teoria dos Conjuntos - FGV 57
9) Questões Comentadas - União, Intersecção, Complementar e Diferença - FGV 64
10) Questões Comentadas - Princípio da Inclusão-Exclusão - FGV 69
11) Questões Comentadas - Introdução - FGV 107
12) Questões Comentadas - Problemas - FGV 111
13) Lista de Questões - Introdução à Teoria dos Conjuntos - FGV 118
14) Lista de Questões - União, Intersecção, Complementar e Diferença - FGV 121
15) Lista de Questões - Princípio da Inclusão-Exclusão - FGV 123
16) Lista de Questões - Introdução - FGV 132
17) Lista de Questões - Problemas - FGV 134

AVISO IMPORTANTE!

Olá, Alunos (as)!

Passando para informá-los a respeito da **disposição das questões** dentro do nosso material didático. Informamos que a escolha das bancas, dentro dos nossos Livros Digitais, é feita de maneira estratégica e pedagógica pelos nossos professores a fim de proporcionar a melhor didática e o melhor direcionamento daquilo que mais se aproxima do formato de cobrança da banca do seu concurso.

Assim, o formato de questões divididas por tópico facilitará o seu processo de estudo, deixando mais alinhado às disposições constantes no edital.

No mais, continuaremos à disposição de todos no Fórum de dúvidas!

Atenciosamente,

Equipe Exatas

Estratégia Concursos

Apresentação do Curso

Olá, pessoal! Tudo bem?

É com grande satisfação damos início ao nosso curso!

Os professores **Eduardo Mocellin, Francisco Rebouças** e **Vinicius Veleda** ficarão responsáveis pelo **Livro Digital**.

Antes de continuarmos, vamos apresentar os professores do material escrito:

Eduardo Mocellin: Fala, pessoal! Meu nome é Eduardo Mocellin, sou professor de Matemática e de Raciocínio Lógico do Estratégia Concursos e engenheiro Mecânico-Aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Sinto-me feliz em poder contribuir com a sua aprovação! Não deixe de me seguir no Instagram: **@edu.mocellin**

Francisco Rebouças: Fala, alunos! Aqui é o Francisco Rebouças, professor de Matemática do Estratégia Concursos. Sou Engenheiro Aeroespacial formado pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Saiba que será uma honra fazer parte da sua jornada rumo à aprovação e que estaremos sempre aqui para auxiliá-los com o que precisarem. Um grande abraço e nos vemos nas aulas!

Vinicius Veleda: Olá, caros alunos! Sou Auditor Fiscal do Estado do Rio Grande do Sul. Professor de Matemática e Matemática Financeira do Estratégia Concursos. Aprovado nos Concursos de Auditor Fiscal da Secretaria da Fazenda dos Estados do Rio Grande do Sul (SEFAZ RS - 2019), Santa Catarina (SEFAZ SC - 2018) e Goiás (SEFAZ GO - 2018). Formado em Engenharia de Petróleo pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) com graduação sanduíche em Engenharia Geológica pela Universidade Politécnica de Madrid (UPM). Pela UFRJ, fui campeão sulamericano do Petrobowl (Buenos Aires) e, posteriormente, Campeão Mundial (Dubai). Cursei meu ensino médio na Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx). Contem comigo nessa trajetória! **@viniciusveleda**

O material escrito em **PDF** está sendo construído para ser sua fonte **autossuficiente** de estudos. Isso significa que o livro digital será **completo** e **voltado para o seu edital**, justamente para que você não perca o seu precioso tempo "caçando por aí" o conteúdo que será cobrado na sua prova. Ademais, sempre que necessário, você poderá fazer perguntas sobre as aulas no **fórum de dúvidas**. **Bons estudos!**

TEORIA DOS CONJUNTOS

Introdução à Teoria dos Conjuntos

Definição de Conjunto

Iniciaremos o nosso estudo da matemática pela **Teoria dos Conjuntos**. A escolha desse conteúdo é **cuidadosamente pensada** para que você possa formar **uma base sólida,** que lhe servirá de alicerce na construção de toda matemática necessária a sua prova.

A palavra "conjunto" significa exatamente o que você deve estar pensando: uma espécie de **grupo**, **lista** ou **uma coleção** de determinado objeto. Observe alguns exemplos de **como podemos representar** conjuntos na matemática:

- $A = \{a, b, c, d, e\}$
- $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
- $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

O conjunto A é formado pelas **5 primeiras letras** no nosso alfabeto. O conjunto B é formado por **5 números pares**. O conjunto C é formado por **10 números ímpares**. Você pode estar se perguntando: *só podemos fazer conjuntos de números e letras?*

A resposta é não! Podemos criar conjuntos de basicamente qualquer coisa, desde um conjunto representando **os funcionários de determinada empresa** a **conjuntos formados por outros conjuntos!** Por exemplo, o conjunto E lista alguns professores de exatas do Estratégia Concursos.

- $E = \{Francisco, Eduardo, Vinicius, Luana, Djefferson\}$

Primeiramente, note que um conjunto muitas vezes aparecerá com seus elementos listados **dentro de um par de chaves**. Por isso, sempre que for escrever algum conjunto, não esqueça de colocar seus elementos aqui dentro: { }. É também usual as pessoas nomearem seus conjuntos com letras maiúsculas, mas **isso não é mandatório, nem necessário,** em algumas situações.

Relação de Pertinência

Quando um elemento faz parte de determinado conjunto, dizemos que **o elemento PERTENCE ao conjunto**. Essa relação de pertinência **entre um elemento e um conjunto** é representada pelo símbolo $\in$.

- $b \in A$: **Lemos**: b **pertence** a A;
- $4 \in B$: **Lemos**: 4 **pertence** a B;
- $15 \in C$: **Lemos**: 15 **pertence** a C.

Atente-se à simbologia! Podemos dizer que um elemento **não pertence** a um determinado conjunto. Para isso, utilizamos o símbolo "não pertence": $\notin$.

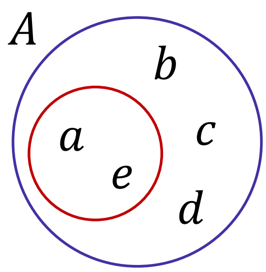
- $z \notin A$: z **não pertence** a A;
- $100 \notin B$: 100 **não pertence** a B;
- $Beltrano \notin E$: $Beltrano$ **não pertence** a E.

Relação de Inclusão

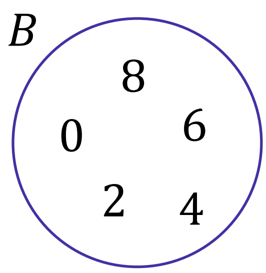
Existe mais um tipo de relação que devemos estudar: **a relação de inclusão**. Nesse tipo de relação, é estabelecido **um relacionamento entre dois conjuntos** e não mais entre um elemento e outro conjunto. Para isso, usamos uma simbologia específica que você deverá guardar: $\subset, \not\subset, \supset$ ***e*** $\not\supset$. Vamos ver com calma o que cada um deles diz! Considere: $\boldsymbol{A = \{a, b, c, d, e\}}$, $\boldsymbol{B = \{0, 2, 4, 6, 8\}}$ e $\boldsymbol{C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}}$.

- $\{a, e\} \subset A$: **Lemos**: $\{a, e\}$ **está contido** em A;
- $\{0, 2, 8\} \subset B$: **Lemos**: $\{0, 2, 8\}$ **está contido** em B;

Perceba que agora não estamos estabelecemos uma relação entre um elemento e um conjunto**. A relação de inclusão envolve 2 conjuntos!** Diante disso, podemos introduzir um novo termo: **o subconjunto**. O subconjunto nada mais é do que **parte de um conjunto maior**. Quando dizemos, por exemplo, que $\boldsymbol{\{a, e\}}$ **está contido em** $\boldsymbol{A}$, estamos dizendo, com outras palavras, que $\{a, e\}$ é um subconjunto de $\boldsymbol{A}$.



O diagrama acima ajuda a compreender a relação de inclusão. Observe que **o conjunto** $\boldsymbol{\{a, e\}}$ **está inteiramente contido em** $\boldsymbol{A}$. Nessas condições, dizemos que $\{a, e\}$ está contido em A ou ainda que $\{a, e\}$ é um subconjunto de A. Algumas vezes, você poderá ver **o termo "parte" sendo usado como sinônimo de subconjunto**. Agora, imagine a seguinte situação:



Nesse caso, temos que $\{a, e\} \not\subset B$: **Lemos**: $\{a, e\}$ não está contido em B ou $\{a, e\}$ não é um subconjunto de B. Vamos ver mais alguns exemplos de quando **um conjunto não está contido em outro**:

- $\{a, e, f\} \not\subset A$
- $\{1, 3, 5\} \not\subset B$
- $\{0, 1\} \not\subset C$
- $\{Sicrano, Beltrano\} \not\subset E$

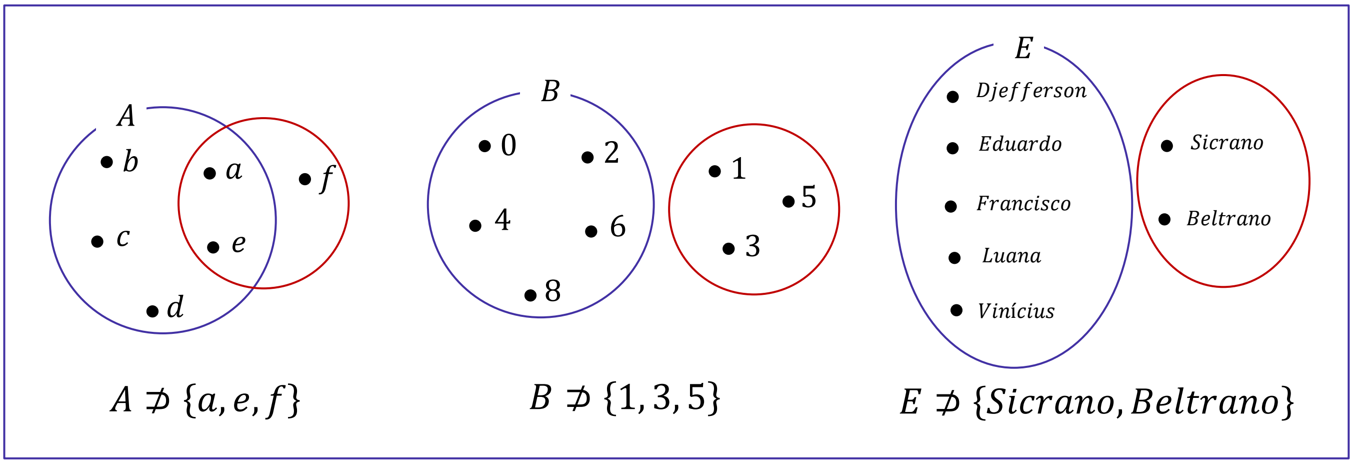
Perceba que **basta um elemento do conjunto não pertencer** ao conjunto maior que **não poderemos estabelecer uma relação de inclusão** entre os dois conjuntos e, portanto, dizemos que um não está contido no outro. Pessoal, **se $\{a, e\}$ está contido em A,** então também podemos dizer que **A contém $\{a, e\}$**. Quando queremos expressar essa ideia de que um conjunto maior contém determinado subconjunto, utilizamos o símbolo $\supset$.

- $A \supset \{a, e\}$: A **contém** $\{a, e\}$
- $B \supset \{0, 2, 8\}$: B **contém** $\{0, 2, 8\}$
- $C \supset \{1, 3, 5, 19\}$: C **contém** $\{1, 3, 5, 19\}$
- $E \supset \{Francisco, Eduardo\}$: E **contém** $\{Francisco, Eduardo\}$

Analogamente, podemos estender o raciocínio para quando queremos dizer que determinado conjunto **não contém outro**. Nessas situações, utilizamos $\not\supset$.

- $A \not\supset \{a, e, f\}$: A **não contém** $\{a, e, f\}$
- $C \not\supset \{0, 1\}$: C **não contém** $\{0, 1\}$
- $E \not\supset \{Sicrano, Beltrano\}$ -- E **não contém** $\{Sicrano, Beltrano\}$

ESQUEMATIZANDO



HORA DE PRATICAR!

(PREF. DE PINHAIS/2019) Considerando os conjuntos $A=\{1,2,4,5,6,7,8\}$, $B=\{1,3,4,5,6,9,10\}$ e $C=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, assinale a alternativa CORRETA:

A) O conjunto A está contido no conjunto B.

B) O conjunto B está contido no conjunto A.

C) O conjunto C está contido no conjunto B.

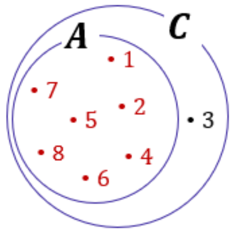
D) O conjunto C está contido no conjunto A.

E) O conjunto A está contido no conjunto C.

Comentários:

$$\boldsymbol{C=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}}$$

Observe que os elementos destacados em vermelho **são exatamente todos os elementos do conjunto A**. Perceba, portanto, que **A está contido em C**. Para facilitar a visualização, veja o diagrama a seguir.



Gabarito: Letra E.

Igualdade entre Conjuntos

Pessoal, dois conjuntos são considerados iguais (ou idênticos) se eles possuem **exatamente os mesmos elementos!** Todo elemento que estiver em um deve necessariamente estar no outro. Por exemplo, considere os conjuntos $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{3,2,1\}$. Nessa situação, podemos escrever que $A=B$.

Professor, mas a ordem está diferente!

Não importa! O importante é que todos elementos de A são os mesmos elementos de B.

HORA DE PRATICAR!

(MPE-GO/2022) Sejam x e y números tais que os conjuntos $\{0, 8, 2\}$ e $\{x, y, 2\}$ são iguais, podemos afirmar que:

A) $x = 0$ e $y = 8$

B) $x + y = 8$

C) $x < y$

D) $x + 2y = 8$

Comentários:

Para que os dois conjuntos sejam iguais, **seus elementos devem ser iguais**. Note que o "2" já aparece nos dois conjuntos, então não vamos nos preocupar com ele.

$$\{0, 8, 2\}$$

$$\{x, y, 2\}$$

Com isso, observe que **podemos ter duas situações**.

1ª situação) $x = 0$ e $y = 8$

2ª situação) $x = 8$ e $y = 0$

Sabendo disso, vamos analisar as alternativas.

A) $x = 0$ e $y = 8$

Errado. Essa é a nossa primeira situação, que não é necessariamente verdade. Também é uma possibilidade o caso em que $x = 8$ e $y = 0$.

B) $x + y = 8$

Correto. Esse é nosso gabarito, pessoal. Verifique que **independentemente da situação**, sempre vamos ter $x + y = 8$. Afinal, sempre um vai ser 0 (zero) e o outro será 8 (oito), de forma que a soma é sempre 8 (oito).

C) $x < y$

Errado. Essa afirmação é verdade apenas para a primeira situação. Como podemos ter o caso em que $x = 8$ e $y = 0$, tem-se também que x pode ser maior que y.

D) $x + 2y = 8$

Errado. Essa equação é válida apenas para a segunda situação. No caso em que $x = 0$ e $y = 8$, já é possível verificar que ela é inválida.

Gabarito: LETRA B.

Subconjuntos

Vamos aprofundar um pouco o nosso estudo sobre **os subconjuntos**. Para começar, tente dizer quais são os subconjuntos do conjunto $A = \{a, b\}$. *Pronto?* Observe como fica:

Conjunto	Subconjuntos
$A = \{a, b\}$	$\emptyset$
	$\{a\}$
	$\{b\}$
	$\{a, b\}$

A tabela acima lista todos os subconjuntos que podemos formar utilizando o conjunto A. Sabendo disso, podemos escrever as seguintes relações:

- $\emptyset \subset A$
- $\{a\} \subset A$
- $\{b\} \subset A$
- $\{a, b\} \subset A$

Devemos falar um pouco do **conjunto vazio e conjunto unitário**. O conjunto vazio, como o próprio nome sugere, **é um conjunto que não possui elementos**! É representado por meio do **símbolo** $\emptyset$ mas também pode aparecer como um simples par de chaves $\{\ \}$. Já **o conjunto unitário** é todo conjunto que **possui um único elemento**!

TOME NOTA!

O conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto.

Seja X um conjunto genérico, então:

$$\emptyset \subset X \quad ou \quad \{\ \} \subset X$$

Observe que $\{a, b\} \subset A$, indicando que **qualquer conjunto é também um subconjunto de si mesmo**! Seja $B = \{a, b, c\}$. Vamos listar os seus subconjuntos também?

Conjunto	Subconjuntos
$B = \{a, b, c\}$	$\emptyset$
	$\{a\}$
	$\{b\}$
	$\{c\}$
	$\{a, b\}$
	$\{a, c\}$
	$\{b, c\}$
	$\{a, b, c\}$

Quando um subconjunto de B é diferente do próprio B, chamamos ele de **subconjunto próprio de B**. Por exemplo, $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}$ são subconjuntos próprios de B. Já o subconjunto $\{a, b, c\}$ é denominado **impróprio** pois é igual ao próprio B! Com os conjuntos listados na tabela acima são subconjuntos de B, então podemos escrever:

- $\emptyset \subset B$
- $\{a\} \subset B$
- $\{b\} \subset B$
- $\{c\} \subset B$
- $\{a, b\} \subset B$
- $\{a, c\} \subset B$
- $\{b, c\} \subset B$
- $\{a, b, c\} \subset$

Pessoal, observe que **os subconjuntos de um conjunto são apenas diferentes combinações de seus elementos**. Portanto, se você precisar listar os subconjuntos, siga os seguintes passos:

PRESTE MAIS ATENÇÃO!

Passo 1: O primeiro conjunto que você deve anotar como subconjunto é o **conjunto vazio**.

Passo 2: Depois, transforme em subconjunto cada elemento, um por um.

Passo 3: Em seguida, escreva os subconjuntos formado por pares de elementos.

Passo 4: Acabando os pares, pegue os trios e assim sucessivamente.

Seguindo essa receita, vamos listar os subconjuntos de $C = \{1, 2, 3\}$?

Passo 1: Você não deve esquecer que **o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto**, portanto:

$$\emptyset$$

Passo 2: Transformando cada elemento em um subconjunto, **um por um**.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}$$

Passo 3: Escrever os subconjuntos formado por **pares** de elementos.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2,3\}$$

Passo 4: Ir para os trios.

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2,3\}, \{1, 2, 3\}$$

Como o conjunto C só possui 3 elementos, encerramos por aqui! Listamos todos os subconjuntos dele. Observe que quando tínhamos um conjunto com **2 elementos, obtivemos 4 subconjuntos**. Ao aumentar um elemento no conjunto, **passamos a ter 8 subconjuntos**. Será que é possível estabelecer uma fórmula para calcular **o número de subconjuntos baseado na quantidade de elementos de um conjunto**?

É possível sim e **a fórmula é bem simples**. Seja $n(A)$ **o número de elementos de um conjunto** A. Então, **o número de subconjuntos de** A**,** n_{S_A}, é dado por:

$$\boxed{n_{S_A} = 2^{n(A)}}$$

Por exemplo, vamos voltar no conjunto $C = \{1, 2, 3\}$. Como ele tem **três elementos**, para encontrar o número de subconjuntos de C, fazemos assim:

$$n_{S_C} = 2^{n(C)} \quad \rightarrow \quad n_{S_C} = 2^3 \quad \rightarrow \quad n_{S_C} = 8$$

Logo, C tem **oito subconjuntos**.

HORA DE PRATICAR!

(Polícia Federal/2021) Considere os seguintes conjuntos:

P = {todos os policiais federais em efetivo exercício no país}
P_1 = {policiais federais em efetivo exercício no país e que têm até 1 ano de experiência no exercício do cargo}
P_2 = {policiais federais em efetivo exercício no país e que têm até 2 anos de experiência no exercício do cargo}
P_3 = {policiais federais em efetivo exercício no país e que têm até 3 anos de experiência no exercício do cargo}

e, assim, sucessivamente. Com base nessas informações, julgue o item que se seguem.

P_2 é subconjunto de P_1.

Comentários

Galera, para que P_2 seja um subconjunto de P_1, **P_2 precisa estar contido em P_1.** De acordo com o enunciado, P_2 representa os policiais federais em exercício no país com até 2 anos de experiência, enquanto P_1 são aqueles com até 1 ano de experiência.

Observe que um policial que possuísse **um ano e meio de experiência**, pertenceria a P_2, mas não a P_1. Logo, não podemos dizer que P_2 é um subconjunto de P_1, uma vez que podem existir elementos em P_2 que não estejam em P_1.

Gabarito: ERRADO.

(IDAF-AC/2020) Quantos subconjuntos possui o conjunto das vogais?

A) 10

B) 25

C) 32

D) 50

Comentários

Seja $\boldsymbol{V}$ o conjunto formado por **todas as vogais**, então temos que: $V = \{a, e, i, o, u\}$

O conjunto acima **possui 5 elementos**, sabemos que o número de subconjuntos de um conjunto depende da quantidade de elementos e é dado através de uma fórmula.

$$n_{S_V} = 2^{n(V)} \quad \rightarrow \quad n_{S_V} = 2^5 \quad \rightarrow \quad n_{S_V} = 32$$

Gabarito: Letra C.

Conjunto das Partes

Você sabia que **podemos juntar todos os subconjuntos de um conjunto para formar um novo conjunto**? Esse novo conjunto formado é denominado **conjunto das partes** e é representado pelo **símbolo** $\wp$. Por exemplo, os **conjuntos das partes** de $A = \{a, b\}$ e de $B = \{a, b, c\}$ são:

$$\wp(A) = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$\wp(B) = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Observe que $\wp(A)$ e $\wp(B)$ são **conjuntos formados por outros conjuntos**! Note ainda que **a sua quantidade de elementos é exatamente a quantidade de subconjuntos** calculada pela fórmula $\boldsymbol{nS_A = 2^{n(A)}}$. Um outro ponto que chamamos atenção é que, no conjunto das partes, listamos **o conjunto vazio** $\{\ \}$ explicitamente com um dos seus elementos.

HORA DE PRATICAR!

(PREF. PETROLINA/2019) Dado um conjunto A, representa-se por $\wp(A)$ o conjunto formado por todos os subconjuntos de A – o chamado conjunto das partes que também costuma ser representado por 2^A. Se $A = \{\phi, \{\phi\}, 1, \{1\}\}$, qual das alternativas seguintes NÃO é elemento de $\wp(A)$?

A) ϕ

B) $\{\phi, 1\}$

C) $\{1, \{\phi, 1\}\}$

D) $\{\phi, \{\phi\}\}$

E) $\{1, \{1\}\}$

Comentários:

O jeito mais imediato de resolver a questão **é listar todos os subconjuntos de A**. Perceba que teremos $2^4 =$ **16 subconjuntos**. Para nos auxiliar, vamos usar uma tabela. Vale também destacar que **ϕ representa o conjunto vazio** e você deve lembrar que **o conjunto vazio é sempre subconjunto** de qualquer conjunto.

Conjunto	Subconjuntos	
$\{\phi, \{\phi\}, 1, \{1\}\}$	ϕ	$\{\{\phi\}, 1\}$
	$\{\phi\}$	$\{\{\phi\}, \{1\}\}$
	$\{\{\phi\}\}$	$\{1, \{1\}\}$
	$\{1\}$	$\{\phi, \{\phi\}, 1\}$
	$\{\{1\}\}$	$\{\phi, 1, \{1\}\}$
	$\{\phi, \{\phi\}\}$	$\{\phi, \{\phi\}, \{1\}\}$
	$\{\phi, 1\}$	$\{\{\phi\}, 1, \{1\}\}$
	$\{\phi, \{1\}\}$	$\{\phi, \{\phi\}, 1, \{1\}\}$

Ao listar os subconjuntos do conjunto A, percebemos que apenas o conjunto $\{1, \{\phi, 1\}\}$ não é elemento de $\wp(A)$. Isso acontece, pois, o conjunto $\{\phi, 1\}$ **não é elemento de A**.

▪

Gabarito: Letra C.

INDO MAIS FUNDO!

Observe o conjunto F exemplificado abaixo.

$$F = \{1, 2, 3, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{W\}\}$$

Assim como o conjunto das partes, ***F* é um conjunto que possui como elemento outros conjuntos**. Note que o conjunto $\{a, b, c\}$ **é um elemento de F**. Nessas situações, e somente nelas, podemos escrever $\{a, b, c\} \in F$. Galera, muita atenção aqui! **$\{a, b, c\}$ não é um subconjunto de F, é um elemento!** Perceba que ele está listado juntamente com os demais elementos!

- $1 \in F$
- $2 \in F$
- $3 \in F$
- $\{a, b, c\} \in F$
- $\{d, e, f\} \in F$
- $\{W\} \in F$

E nesses casos, *quando usaremos a relação de inclusão?* Veja alguns exemplos de subconjuntos de F:

- $\{1\} \subset F$
- $\{1, 2\} \subset F$
- $\{1, 2, 3\} \subset F$
- $\{\{a, b, c, \}\} \subset F$
- $\{\{W\}\} \subset F$
- $\{\{a, b, c, \}, \{d, e, f\}, \{W\}\} \subset F$

Observe que, para representar os subconjuntos que contém outros conjuntos, utilizamos, sem problema algum, dois pares de chaves. Tenha bastante cuidado em questões que tragam esse tipo de abordagem! Já vi muitas bancas se enrolarem ao cobrar questões com essa temática, pois desconhecem que conjuntos podem sim ser elementos de outros conjuntos e que podemos estabelecer uma relação de pertinência nessas situações.

HORA DE PRATICAR!

(PREF. JEQUIÉ/2018) Considerando o conjunto $A = \{\Omega, \Delta, \{\Delta\}\}$ qual das afirmações abaixo não está correta?
A) $\Omega \in \mathrm{A}$
B) $\Omega \subset \mathrm{A}$
C) $\{\Delta\} \subset A$
D) $\{\Delta\} \in A$

Comentários:

Os elementos de A são: Δ, $\{\Delta\}$ e Ω. Logo: $\begin{cases} \Delta \in \mathrm{A}; \\ \{\Delta\} \in A; \\ \Omega \in \mathrm{A}. \end{cases}$

Essa pequena análise permite concluir que **as alternativas A e D estão corretas** e, portanto, não podem ser nosso gabarito, já que **ele procura a alternativa incorreta**. Observe que como **Δ é um elemento de A**, então podemos dizer que **$\{\Delta\}$ é um subconjunto de A**.

Dessa forma, é também correto escrever que $\{\Delta\} \subset \mathrm{A}$. *Opa, espere aí, professor! Então podemos dizer nessa situação que $\{\Delta\} \subset A$ e $\{\Delta\} \in A$?* Isso! **Essa conclusão somente é válida pois Δ e $\{\Delta\}$ são elementos de um mesmo conjunto**!

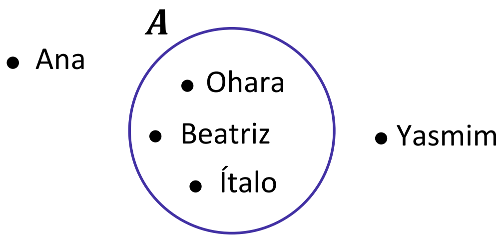
Ao escrever que $\{\Delta\} \subset \mathrm{A}$ estamos nos referindo ao subconjunto $\{\Delta\}$ que existe pois <u>Δ é um elemento de A</u>. Quando escrevemos $\{\Delta\} \in A$, estamos nos referindo <u>ao elemento $\{\Delta\}$, que é explicitamente declarado</u>. O subconjunto associado ao elemento $\{\Delta\}$ é representado com mais um par de chaves: $\{\{\Delta\}\}$. Nessa situação, dizemos que $\{\{\Delta\}\} \subset A$.

Com isso, a única alternativa que pode estar errada é a **<u>letra B</u>**, pois **Ω é um elemento de A e, portanto, o correto seria $\Omega \in \mathrm{A}$**.

União, Intersecção, Complementar e Diferença

Representação por Diagramas

Você deve ter visto ao longo da aula que **apareceram alguns conjuntos na forma de diagramas**. Esse tipo de representação é extremamente útil na resolução de questões, pois **possibilita uma melhor compreensão do problema**. Por exemplo, seja $\boldsymbol{A}$ o conjunto de funcionários de uma determinada empresa.



Todos aqueles que estão dentro do conjunto $\boldsymbol{A}$ **representam funcionários da empresa**. **Quem está fora, não é funcionário da empresa**. Olhando simplesmente para o diagrama, podemos dizer que:

- $Ohara \in A$;
- $Beatriz \in A$;
- $Italo \in A$;
- $Yasmim \notin A$;
- $Ana \notin A$.

Esses diagramas são bastante conhecidos no meio matemático e possuem um nome especial: são os **Diagramas de Venn-Euler** ou, simplesmente, **Diagramas de Venn**. Esse tipo de representação é utilizado principalmente quando **precisamos representar vários conjuntos ao mesmo tempo**. Nos tópicos a seguir, usaremos bastante esses diagramas e você logo ficará habituado.

Existem diferentes maneiras de representarmos os conjuntos. A primeira dela é como estamos fazendo desde o começo da aula, como por exemplo, em $V = \{a, e, i, o, u\}$. Chamamos esse tipo de representação de "**representação por enumeração**".

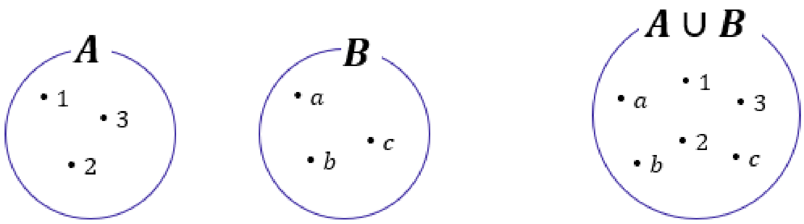
Ademais, temos a **representação por propriedade**. Para entender melhor, considere o mesmo conjunto V citado anteriormente. Ele também poderia ser escrito da seguinte forma: $\boldsymbol{V} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \text{ é } \mathbf{vogal}\}$.

Na prática, podemos ler tal conjunto da seguinte forma: **V é o conjunto dos elementos de x, tal que x é vogal**. Lemos essa barrinha vertical como **"tal que"**. **Não esqueça!**

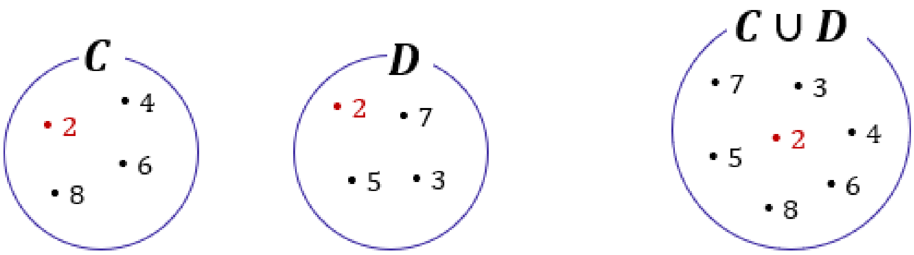
Por fim, temos a **representação por diagramas** que estudamos agora a pouco! Fechou?

União

Nessa parte da nossa aula, veremos que existem **várias operações** que os conjuntos podem se submeter. A mais conhecida talvez seja **a união (ou reunião) de conjuntos**. A união de conjuntos é representada pelo **símbolo** $\cup$ e, basicamente, **funde dois conjuntos em um só**.



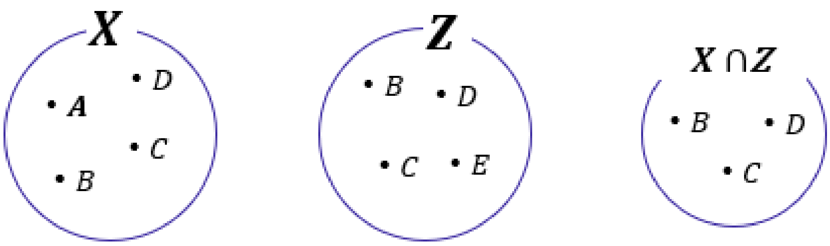
No diagrama acima, temos que $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Quando fazemos a união de A e B, criamos um conjunto que possui **todos os elementos dos dois conjuntos**, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$. Haverá casos em que os conjuntos possuirão um mesmo elemento e, quando for necessário fazer a união dos dois, **você não precisará escrever duas vezes o elemento repetido**. Observe um exemplo nos diagramas abaixo.



Note que **o 2 é um elemento comum aos dois conjuntos**: $C = \{2, 4, 8, 6\}$ e $D = \{2, 3, 5, 7\}$. Nessas situações, quando fazemos a união de conjuntos que possuem elementos em comum, **esse elemento não vai aparecer duas vezes no conjunto união**! Confira que $C \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, **o 2 aparece apenas uma vez**.

Intersecção

A operação que seleciona **os elementos comuns entre dois ou mais conjuntos é denominada intersecção e é representada por** $\cap$. Por exemplo, nos diagramas acima o número 2 é o único elemento comum entre C e D. Logo, o conjunto intersecção será formado apenas pelo elemento 2: $\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{D} = \{\mathbf{2}\}$. Veja mais um exemplo abaixo.



Temos que $X = \{A, B, C, D\}$ e $Z = \{B, C, D, E\}$. São dois conjuntos distintos, mas que **possuem alguns elementos em comum**. Os elementos $B, C\ e\ D$ aparecem nos 2 conjuntos e formam o conjunto intersecção: $\boldsymbol{X \cap Z = \{B, C, D\}}$. Vamos treinar um pouco esses conceitos?

HORA DE PRATICAR!

(PREF. ÂNGULO/2020) Sejam os conjuntos $A = \{0,1,3,5,7\}$, $B = \{0,2,4,6,8\}$ e $C = \{0,14,15\}$, assinale a alternativa correta.

A) $A \cap B \cap C = \{0\}$

B) $A \cup C = \{1, 3, 5, 7, 14, 15\}$

C) $B \cap C = \{2, 4, 6, 8, 14, 15\}$

D) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 15\}$

Comentários:

Devemos verificar alternativa por alternativa.

A) $A \cap B \cap C = \{0\}$

Alternativa correta. Nessa alternativa, devemos buscar **a intersecção dos três conjuntos** dados no enunciado. A intersecção é formada pelos **elementos que são comuns aos três conjuntos**. Por exemplo, **observe que o número 0 pertence tanto ao conjunto $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$**. Logo, com certeza o 0 é elemento de $A \cap B \cap C$. Observe que **não há nenhum outro elemento que aparece nos três conjuntos**. Com isso, podemos dizer que, de fato, $A \cap B \cap C = \{0\}$.

B) $A \cup C = \{1, 3, 5, 7, 14, 15\}$

Alternativa incorreta. Para obter a união de dois conjuntos, **juntamos todos os elementos dos dois conjuntos** e se houver elementos repetidos, basta escrevê-los apenas uma vez, eles não vão contar duas vezes. Veja, no entanto, que **o $\boldsymbol{0}$ é elemento de $\boldsymbol{A}$ e de $\boldsymbol{C}$, mas não aparece no conjunto união dos dois**.

C) $B \cap C = \{2,4,6,8,14,15\}$

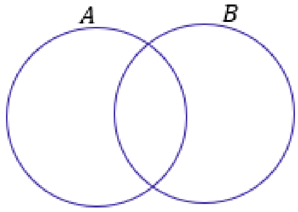
Alternativa incorreta. A intersecção representa apenas os elementos em comum entre dois ou mais conjuntos. *Quais são os elementos em comum entre B e C?* O **número 0 é o único elemento comum aos dois**. Logo, $B \cap C = \{0\}$.

D) $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,15\}$

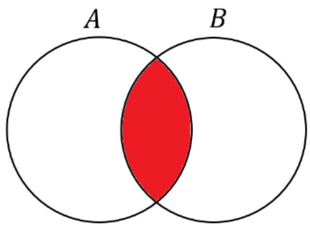
Alternativa incorreta. Note que o conjunto está quase correto, o único erro seria a presença desse elemento "15". **O "15" não faz parte de A nem B**, portanto, **não pode fazer parte do conjunto que é a união dos dois**. Esse é o erro da alternativa.

Gabarito: Letra A.

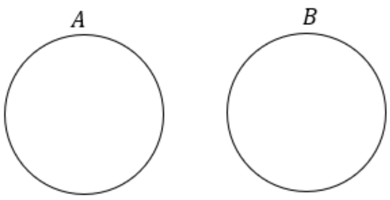
Quando dois conjuntos **possuem elementos em comum**, podemos representá-los assim:



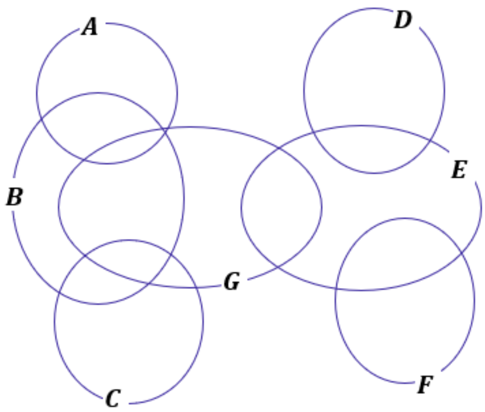
Essa região comum representa exatamente a sua intersecção. Os elementos que estão na região em **vermelho** abaixo **pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B**.



Caso os conjuntos não possuam elementos em comum, isto é, **não haja intersecção entre os dois**, nós vamos chamá-los de **disjuntos** e os representaremos utilizando círculos afastados um do outro.



(CM MONTE ALTO/2019) Observe o diagrama de conjuntos e considere que há elementos em todas as suas regiões.



A partir dessa disposição, é correto afirmar que

A) há elemento de G que é também elemento de A e C.

B) qualquer elemento que esteja em dois desses conjuntos, certamente pode estar em qualquer um desses sete conjuntos.

C) qualquer elemento de G, que não esteja em E, certamente estará em A ou em B ou em C

D) qualquer elemento que esteja em três desses conjuntos, certamente está em C e em D.

E) há elemento de G que também é elemento de A, mas não é elemento de B.

Comentários:

Vamos verificar alternativa por alternativa

A) há elemento de G que é também elemento de A e C.

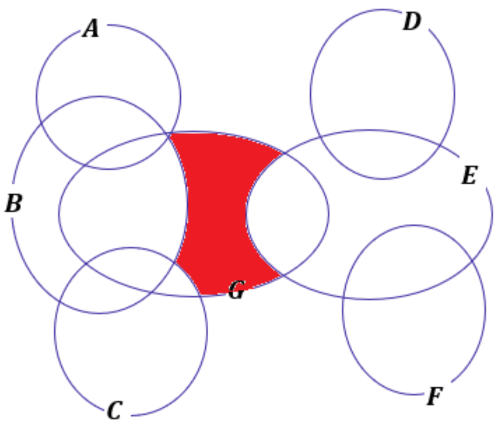
Alternativa incorreta. Observe que A e C **são conjuntos disjuntos**, isto é, **não possuem elementos em comum** e por isso **não há intersecção entre os dois**. Se A e C são conjuntos disjuntos, não pode existir um elemento em G que seja **ao mesmo tempo elemento de A <u>e</u> de C**, pois isso implicaria em um elemento comum aos três simultaneamente.

B) qualquer elemento que esteja em dois desses conjuntos, certamente pode estar em qualquer um desses sete conjuntos.

Alternativa correta. Todos os conjuntos fazem intersecção com pelo menos um outro conjunto! Dessa forma, **haverá sempre um elemento de qualquer conjunto que também pertencerá a outro**!

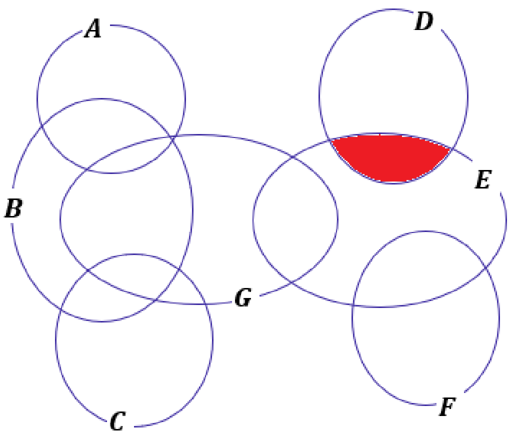
C) qualquer elemento de G, que não esteja em E, certamente estará em A ou em B ou em C

Alternativa incorreta. Mesmo não estando em E, **um elemento em G pode estar somente em G**.
<u>Não podemos afirmar</u> necessariamente que estará em A ou em B ou em C. Veja a região destacada abaixo.



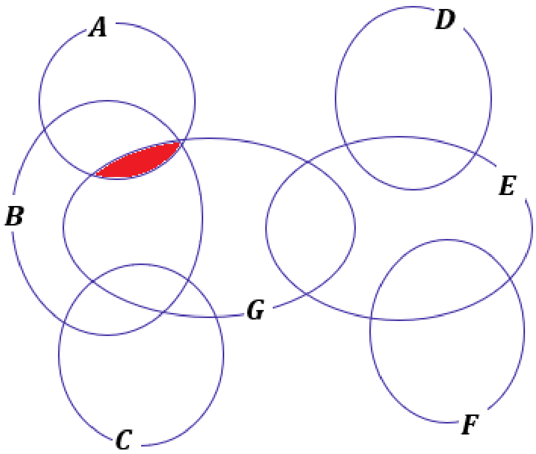
D) qualquer elemento que esteja em três desses conjuntos, certamente está em C e em D.

Alternativa incorreta. D **só faz** intersecção com E. Desse modo, um elemento de D só poder estar, **no máximo, em dois conjuntos**.



E) há elemento de G que também é elemento de A, mas não é elemento de B.

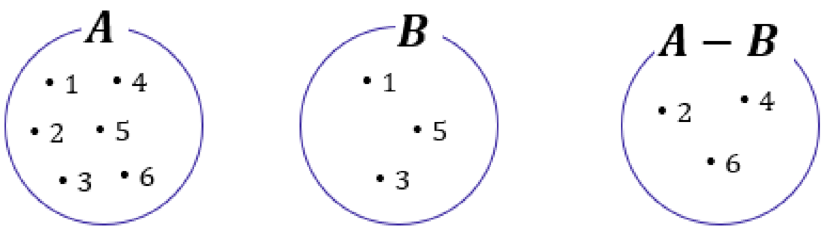
Alternativa incorreta. **Todo elemento de G que também é elemento de A também pertence a B**.



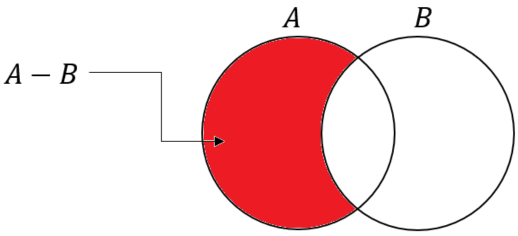
Gabarito: Letra B**.**

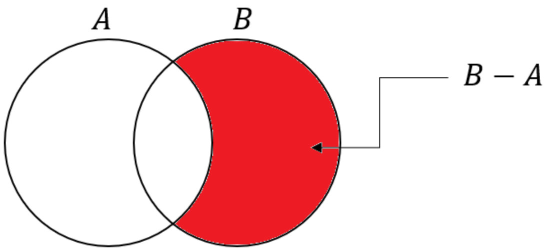
Diferença

Existe uma outra operação que é muito importante para a sua prova! Essa operação **é a diferença ou, como também é conhecida, a subtração de conjuntos**! O conjunto diferença é representado por $\boldsymbol{A-B}$ e é formado por **todos os elementos de A que não são elementos de B**! Por exemplo, considere os conjuntos:

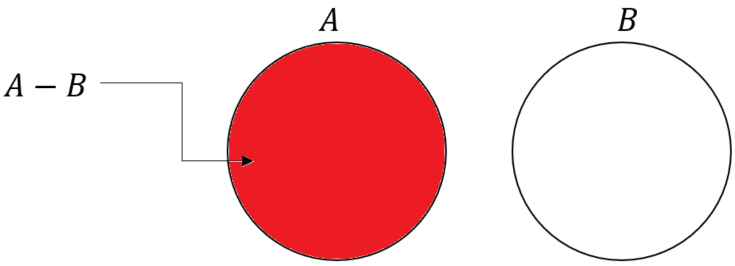


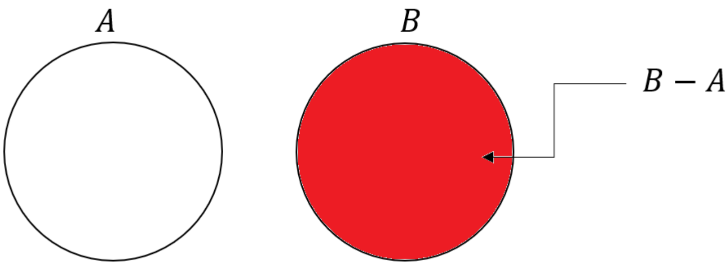
Observe que $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. Para encontrar $A - B$, devemos selecionar **os elementos de A que não são elementos de B**! Ou seja, **aqueles elementos que são apenas elementos de A**! Observe que A e B possuem em comum os seguintes elementos: $A \cap B = \{1, 3, 5\}$. Logo, se $A = \{\mathbf{1}, 2, \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, 6\}$, então o $A - B = \{2, 4, 6\}$. Em diagramas, também é possível representar o conjunto diferença.





Um detalhe importante é que se A e B são **conjuntos disjuntos**, então $\boldsymbol{A - B = A}$ ***e*** $\boldsymbol{B - A = B}$. Veja como essa informação pode ser representada:





Vamos fazer alguns **exemplos numéricos** para visualizar ainda melhor essa última situação.

Considere os conjuntos $A = \{10, 20, 30\}$ e $B = \{40, 50\}$. Primeiramente, note que os conjuntos são disjuntos. *Mas qual é o motivo mesmo para eles serem disjuntos, professor?*

A e B são disjuntos pois não possuem elementos em comum! Nenhum sequer!! São totalmente diferentes um outro. *Tudo bem?!* Agora, lembre-se que $\boldsymbol{A - B}$ **é o conjunto de elementos formados por todos os elementos de A que não são elementos de B**.

Ora, nesse nosso exemplo, **<u>todos</u> os elementos de A não são elementos de B**!! Sendo assim, podemos escrever que:

$$A - B = \{10, 20, 30\} = A$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. LINHARES/2020) Dados os três conjuntos numéricos:

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$,
$B = \{0,2,4,6\}$,
$C = \{1,3,5,7,9\}$.

O resultado de $(A - B) \cap C$ é igual a:
A) $\{1,3,5\}$
B) $\{1,3,5,7,9\}$
C) $\{0,1,3,5,7,9\}$
D) $\{2,4,6\}$
E) $\{0\}$

Comentários:
Primeiramente, devemos **fazer a diferença entre o conjunto A e B**. Lembre-se, quando tivermos a diferença entre dois conjuntos, por exemplo, $A - B$, estamos procurando **o conjunto dos elementos de A que não são elementos de B**. Na nossa questão, temos que:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$B = \{0,2,4,6\}$$

Primeira pergunta: **quais elementos estão ao mesmo tempo em A e em B**? Observe que **2, 4 e 6** são os três **elementos comuns** aos dois conjuntos. ***Segunda pergunta:*** que conjunto é formado quando eu removo esses elementos em comum do conjunto A? **É exatamente o conjunto diferença**!

$$A = \{1, \mathbf{2}, 3, \mathbf{4}, 5, \mathbf{6}\}$$
$$A - B = \{1, 3, 5\}$$

A questão não termina aqui. Ainda devemos fazer a intersecção desse conjunto com o C. **Note que C possui todos os três elementos do nosso conjunto diferença**. Portanto, <u>**coincidentemente**</u>, vamos ter que:

$$(A - B) \cap C = \{1, 3, 5\}$$

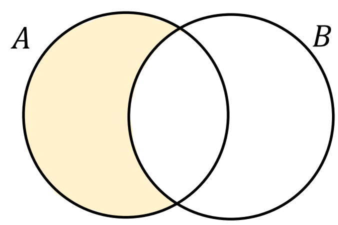
Gabarito: Letra A.

(PREF. SÃO GONÇALO/2022) Sejam A e B conjuntos definidos da seguinte maneira:

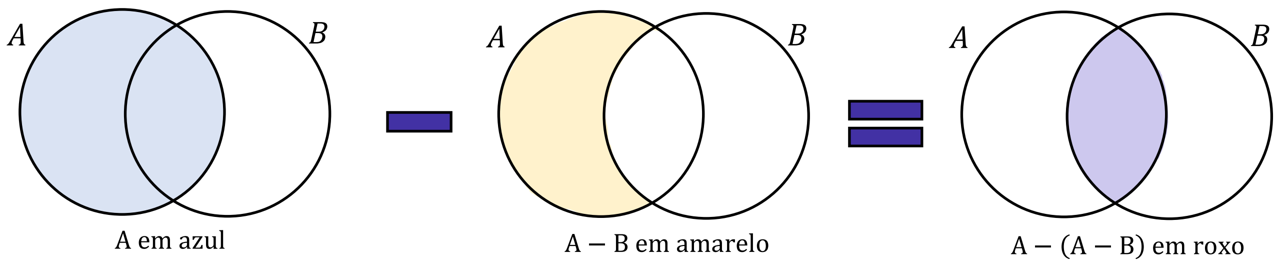
A = {pessoas que moram em São Gonçalo}
B= {pessoas que trabalham em Niterói}

O conjunto A – (A – B) representa o conjunto cujos elementos são pessoas que:
A) moram em São Gonçalo e trabalham em Niterói
B) moram em Niterói e trabalham em São Gonçalo
C) moram em São Gonçalo e não trabalham em Niterói
D) moram em Niterói e não trabalham em São Gonçalo

Comentários:
Você lembra que $A - B$ é o conjunto formado por **todos os elementos de A que não são elementos de B**. Por meio de diagramas, podemos representar esse conjunto como a seguinte região:



A questão pede o conjunto $A - (A - B)$. Vamos encontrá-lo por meio de diagramas.

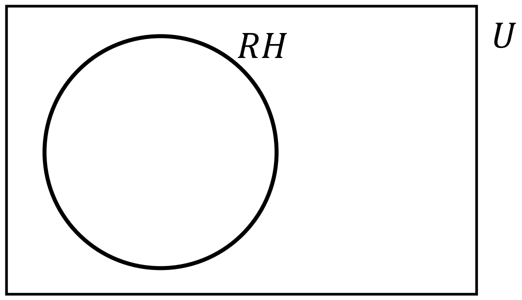


Com isso, observe que o conjunto $\boldsymbol{A - (A - B)}$ **corresponde <u>exatamente</u> à intersecção dos dois conjuntos**. Se A é composto pelas pessoas que **moram em São Gonçalo** e B é composto pelas pessoas que **trabalham em Niterói**, então $A - (A - B)$ é o conjunto formado pelas pessoas que moram em São Gonçalo <u>e</u> trabalham em Niterói.

Gabarito: LETRA A.

Complementar

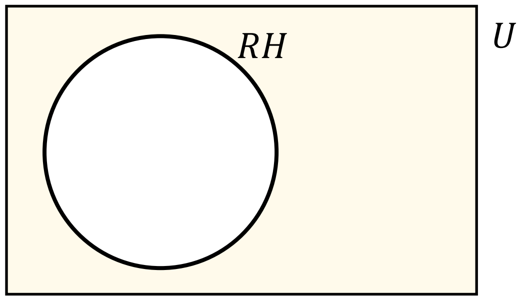
Quando falamos de um determinado conjunto, normalmente **estamos destacando determinado grupo dentro de um universo maior**. Por exemplo, podemos formar um conjunto dos funcionários especializados em RH de uma empresa. Esse grupo de funcionários foi retirado de um conjunto maior: **o conjunto formado por todos os funcionários da empresa**. Acompanhe o diagrama abaixo.



Observe que o conjunto formado por aqueles especializados em RH está contido dentro de um conjunto U. **Esse conjunto maior é frequentemente chamado de conjunto universo** e, nesse exemplo, poderia representar **o conjunto de todos os funcionários da empresa**.

Quer um outro exemplo? Imagine um conjunto formado por todas as vogais: $V = \{a, e, i, o, u\}$. Em um problema que estamos trabalhando com esse conjunto, qual seria o conjunto universo? O conjunto universo nessa situação seria o conjunto formado por todas as letras do alfabeto: $U = \{a, b, c, d, e, f, \dots, x, y, z\}$.

Quando estamos falando de conjunto universo, um novo conceito surge: **o conjunto complementar**. Lembre-se do conjunto que inventamos com os funcionários de uma empresa especializados em RH. *Qual o complementar desse conjunto?* Seria o conjunto formado por **todos os outros funcionários da empresa que não são especializados em RH!** Vamos mostrar no diagrama.



O complementar do conjunto RH é representado pela **parte pintada em amarelo**. *E no nosso exemplo das letras?* Qual o complementar do conjunto formado apenas pelas vogais? Ora, é **o conjunto formado por todas as outras letras que não são vogais, isto é, o conjunto das consoantes**! Para determinar o complementar de qualquer conjunto, **é de fundamental importância conseguir identificar qual é o conjunto universo**.

A notação utilizada para representar o complementar de um conjunto X é $\boldsymbol{X^C}$ **ou** $\boldsymbol{\overline{X}}$. Representamos o conjunto complementar com esse "expoente" C ou uma barra em cima. Ademais, podemos definir o conjunto complementar utilizando o que acabamos de ver **sobre conjunto diferença**.

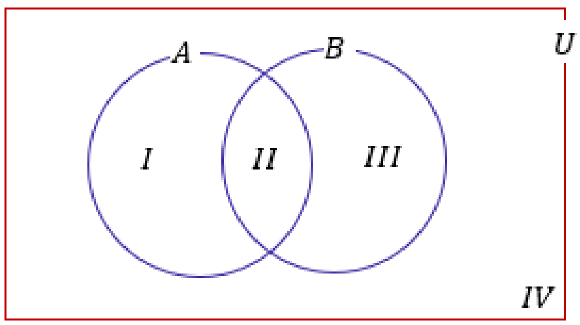
TOME
NOTA!

$$\boxed{\overline{X} = X^C = U - X}$$

Veja que utilizando a definição acima, temos que o conjunto complementar X^C é formado por **tudo que está no conjunto universo, mas não está em X**. Vamos fazer algumas questões para aplicar o que acabamos de ver?

HORA DE
PRATICAR!

(PREF. NOVO HAMBURGO/2020) A é o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma espanhol e B é o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma inglês, conforme representado no diagrama:



Com base nessas informações, é correto afirmar que

A) a região I representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma inglês, mas não dominam o idioma espanhol.

B) a região II representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.

C) a região III representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma espanhol, mas não dominam o idioma inglês.

D) a região IV representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.

E) U representa o conjunto de todas as pessoas que não dominam nenhum desses dois idiomas.

Comentários:

Vamos analisar cada uma das alternativas tendo em mente que:

• A é o conjunto das pessoas que **dominam ESPANHOL**;

• B é o conjunto das pessoas que **dominam INGLÊS**.

A) a região I representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma inglês, mas não dominam o idioma espanhol.
Alternativa incorreta. A região I representa o conjunto de todas as pessoas que **dominam o idioma ESPANHOL**, mas **não dominam o idioma INGLÊS**.

B) a região II representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.
Alternativa correta. A região comum aos 2 conjuntos representa **as pessoas que dominam os dois idiomas**.

C) a região III representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma espanhol, mas não dominam o idioma inglês.
Alternativa incorreta. A região III representa o conjunto de todas as pessoas que **dominam o idioma INGLÊS**, mas **não dominam o idioma ESPANHOL**.

D) a região IV representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.
Alternativa incorreta. A região IV é **toda área fora dos dois conjuntos**. Isso significa que ela representa aqueles **não dominam nenhum dos dois idiomas**.

E) U representa o conjunto de todas as pessoas que não dominam nenhum desses dois idiomas.
Alternativa incorreta. U é o **conjunto universo** e representa todos aqueles que **dominam ou não os idiomas**.

Gabarito: Letra B.

Princípio da Inclusão-Exclusão

Pessoal, muitas vezes vamos precisar **determinar o número de elementos de um conjunto**. Essa tarefa de contar **pode ficar um pouco complicada quando temos elementos que pertencem a mais de um conjunto**, pois, nesses casos, **devemos eliminar as repetições** para não contar o mesmo elemento duas vezes.

Nesse sentido, surge o Princípio da Inclusão-Exclusão (PIE). Esse princípio possibilita uma contagem exata da quantidade de elementos **de um conjunto formado pela união de vários outros, mesmo que contenham intersecções**.

➢ 2 Conjuntos

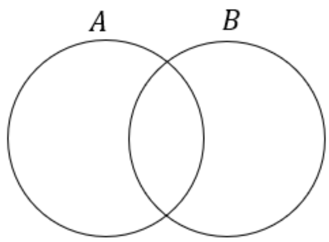
Imagine **dois conjuntos A e B com elementos em comum**. Se $n(A)$ é o número de elementos de A e $n(B)$ é o número de elementos de B, quanto vale $n(A \cup B)$?

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}}$$

Vamos tentar entender o caminho das pedras para chegar na relação acima. Considere os conjuntos:

- $A = \{1, 2, 3\} \quad \Rightarrow \quad n(A) = 3$
- $B = \{3, 4, 5\} \quad \Rightarrow \quad n(B) = 3$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \Rightarrow \quad n(A \cup B) = 5$
- $A \cap B = \{3\} \quad \Rightarrow \quad n(A \cap B) = 1$



Observe que **apesar da união entre A e B ser uma espécie de fusão entre os dois conjuntos**, o número de elementos na união, na maioria dos casos, **não é a soma direta do número de elementos de A com o número de elementos de B**.

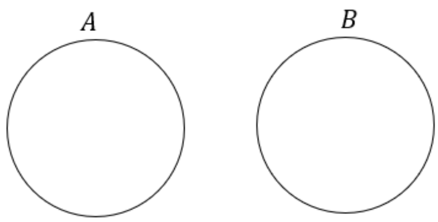
Perceba que **o elemento 3 aparece tanto em A como em B** e ao somar o número de elementos dos dois conjuntos **devemos considerar que estamos somando o mesmo elemento duas vezes!** É por isso esse motivo que devemos subtrair a quantidade de elementos que estão na intersecção. Já para **conjuntos disjuntos** temos que:

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}}$$

pois:

$$\boldsymbol{n(A \cap B) = 0.}$$



HORA DE PRATICAR!

(PREF. SÃO GONÇALO/2022) Em uma empresa na qual trabalham 116 pessoas, sabe-se que:

- 72 têm ensino médio completo;
- 64 sabem usar o EXCEL;
- 35 têm ensino médio completo e sabem usar o EXCEL.

O número de funcionários dessa empresa que não têm ensino médio completo e não sabem usar o EXCEL é:
A) 13
B) 14
C) 15
D) 16

Comentários:
Vamos usar o **Princípio da Inclusão-Exclusão** para resolver esse problema. Inicialmente, considere "**M**" como o conjunto formado por todos aqueles que têm o ensino médio. Além disso, considere "**X**" como o conjunto formado por todos aqueles que sabem usar o EXCEL. Com as informações do enunciado, temos que:

$$n(M) = 72 \qquad n(X) = 64 \qquad n(M \cap X) = 35$$

Do princípio da inclusão-exclusão, sabemos que:

$$n(M \cup X) = n(M) + n(X) - n(M \cap X)$$

Substituindo as informações que temos,

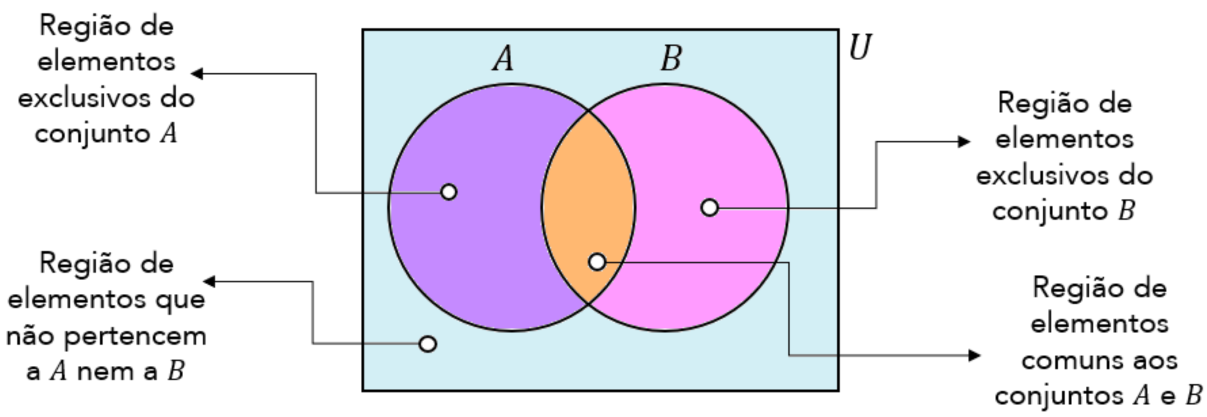
$$n(M \cup X) = 72 + 64 - 35 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{n(M \cup X) = 101}}$$

Note que a união desses dois conjuntos tem 101 pessoas. Por sua vez, o enunciado disse que **o número total de funcionários dessa empresa é 116.** Com isso, a quantidade de funcionários que não possuem ensino médio e não sabem usar o EXCEL é exatamente **a diferença entre o total de funcionário e $\boldsymbol{n(M \cup X)}$**. Assim,

$$116 - 101 = 15$$

Gabarito: LETRA C.

A verdade é que **não precisamos decorar fórmulas** para responder questões que envolva esse princípio. Utilizando **um pouco de lógica e diagramas de Venn**, podemos encontrar a quantidade de elemento de cada conjunto envolvido em um problema típico de Princípio da Inclusão-Exclusão. Antes disso, quero deixar claro para vocês **o significado de cada uma das regiões** no seguinte diagrama:



HORA DE PRATICAR!

(CLDF/2018) Em uma escola com 150 alunos, são oferecidos cursos de Inglês e Francês. Conforme um levantamento, 15 alunos desta escola não estão frequentando estes cursos e 90 frequentam o curso de Inglês. Se 72 alunos frequentam o curso de Francês, então o número de alunos que frequenta um e somente um dos cursos é igual a

A) 144.

B) 138.

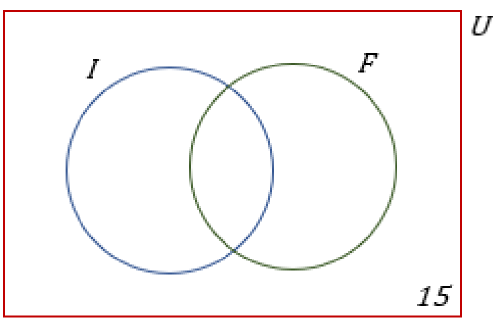
C) 132.

D) 108.

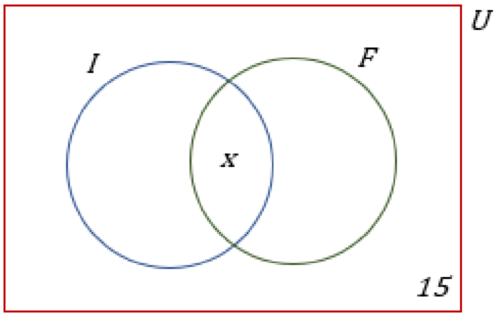
E) 126.

Comentários:

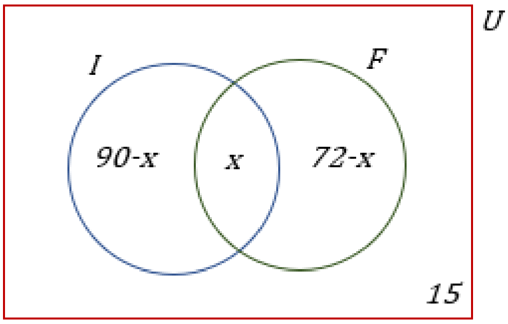
O **conjunto universo** da nossa questão é formado pelos **150 alunos da escola**. Esses 150 alunos **podem fazer 2 cursos ou não fazer nenhum**. A primeira informação que temos é que **15 alunos não frequentam nenhum dos cursos**. Em diagramas, podemos representar essa informação da seguinte maneira:



Observe que a **questão não informou** **a quantidade de alunos que fazem** **os dois cursos simultaneamente**. Portanto, vamos chamá-la de x e colocá-la no diagrama.



Se 90 frequentam o curso de inglês, então $90 - x$ frequentam **APENAS o curso de inglês**. Se 72 alunos frequentam o curso de Francês, então $72 - x$ frequentam **APENAS o curso de Francês**.



Nosso diagrama **está completamente preenchido**. Você concorda que **ao somar individualmente as quantidades acima**, deveremos obter o total de alunos dessa escola, isto é, 150?

$$(90 - x) + (72 - x) + x + 15 = 150 \quad \rightarrow \quad 177 - x = 150 \quad \rightarrow \quad x = 27$$

A questão não quer saber quantos alunos fazem os dois cursos simultaneamente**. Ela pede a quantidade de alunos que fazem APENAS um único curso**. Logo,

$$(90 - x) + (72 - x) = 63 + 45 = 108$$

Gabarito: Letra D.

E usando a fórmula? Como ficaria? **Seja I o conjunto daqueles que fazem o curso de inglês e F o conjunto formado por aqueles que fazem o curso de francês**. Se a escola tem 150 alunos e foi dito que **15 alunos não fazem nenhum dos cursos**, então:

$$n(I \cup F) = 150 - 15 = 135$$

São 135 alunos que fazem **pelo menos um dos cursos**. A questão diz ainda que: $\boldsymbol{n(I) = 90}$ **e** $\boldsymbol{n(F) = 72}$.

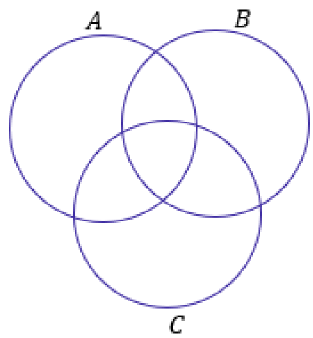
$$n(I \cup F) = n(I) + n(F) - n(I \cap F) \quad \rightarrow \quad 135 = 90 + 72 - n(I \cap F) \quad \rightarrow \quad n(I \cap F) = 27$$

Com isso, descobrimos que **27 pessoas fazem simultaneamente o curso de inglês e de francês**. A questão pede a quantidade de alunos que fazem **apenas um dos cursos**. Se 27 dos que fazem inglês também fazem francês, então $\boldsymbol{90 - 27 = 63}$ **fazem apenas inglês**. Analogamente, $\boldsymbol{72 - 27 = 45}$ **fazem apenas francês**.

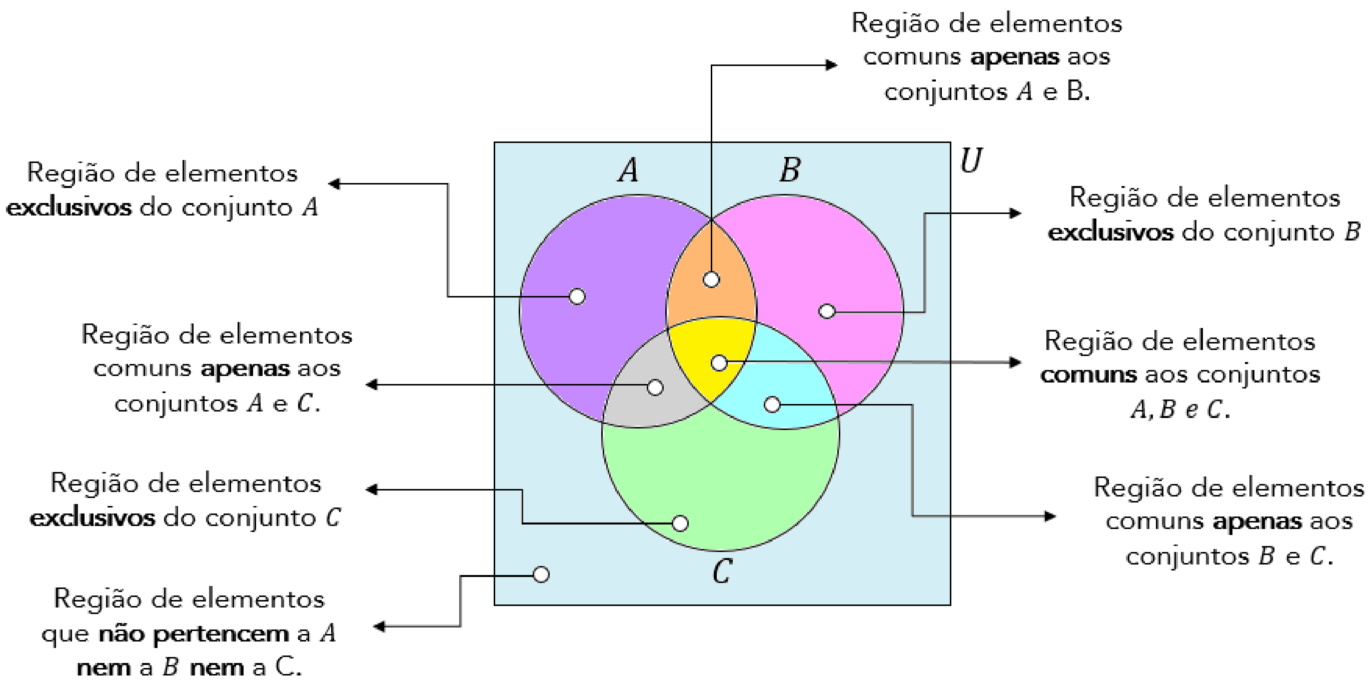
$$63 + 45 = 108 \; alunos$$

➢ 3 Conjuntos

Imagine que você tem 3 conjuntos, **cada conjunto possui elementos em comum com os outros dois**. A situação **mais completa** que podemos imaginar está representada pelo diagrama abaixo.



Vamos fazer **uma leitura** de cada uma das regiões da figura acima?



Observe que **o número de regiões com três conjuntos aumenta bastante** em relação à análise anteriormente feita com dois. Agora, considere que **você conhece a quantidade** de elementos de cada um dos conjuntos cima, isto é, $\boldsymbol{n(A)}$, $\boldsymbol{n(B)}$ **e** $\boldsymbol{n(C)}$.

Como você faria para encontrar $\boldsymbol{n(A \cup B \cup C)}$ *? Será que é só somar as três quantidades?* **A resposta para essa pergunta é não!** Precisamos ter atenção aos **elementos que podem pertencer a mais de um conjunto**.

Segundo o Princípio da Inclusão- Exclusão, a fórmula geral que permite calcular a quantidade de elementos de um **conjunto formado pela união de outros três** é dada por:

TOME NOTA!

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}}$$

Vamos tentar entender com ela surge? Note que para achar a quantidade de elementos do conjunto união, primeiro **somamos individualmente as quantidades de cada um dos conjuntos**.

$$\boldsymbol{n(A) + n(B) + n(C)}$$

No entanto, nós vimos que, ao fazer isso, **não estamos considerando os elementos que podem pertencer a mais de um conjunto**. Essa soma dará, certamente, uma quantidade de elementos maior do que a quantidade real. *Mas, então, o que fazer?* **É preciso subtrair as quantidades dos elementos que estão nas intersecções, evitando assim a dupla contagem**.

$$\boldsymbol{n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)}$$

Perceba que a fórmula ainda não está completa. Imagine um elemento que é **comum a todos os 3 conjuntos**, isto é, pertence a $A \cap B \cap C$. Esse elemento pertence tanto a A, quanto a B e a C. Quando fizemos a soma $n(A) + n(B) + n(C)$, **contamos ele três vezes**!

Quando fizemos a subtração $-n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$ estamos **tirando ele três vezes**! **Resultado: não estamos contando os elementos de $A \cap B \cap C$**. Por esse motivo, **adicionamos** $\boldsymbol{n(A \cap B \cap C)}$**.** Logo,

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}}$$

Eu sei que a fórmula **pode parecer um pouco complicada**, mas garanto que com **um pouco de paciência e resolução de exercícios**, ela se tornará **mais amigável e bastante intuitiva**! Além disso, também ensinarei um jeito que vocês poderão utilizar **caso não lembrem da fórmula**. Algumas vezes, no entanto, **a questão pode exigir a aplicação direta dela**. Confira o exercício abaixo.

HORA DE PRATICAR!

(IFF/2018) Para um conjunto qualquer X, $n(X)$ representa a quantidade de elementos de X. Nesse sentido, considere que os conjuntos A, B e C tenham as seguintes propriedades:

$$n(A) = n(B) = n(C) = 50;$$
$$n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(B \cap C) = 10;$$
$$n(A \cap B \cap C) = 0.$$

Nessa situação, $n(A \cup B \cup C)$ é igual a
A) 100.
B) 110.
C) 120.
D) 130.
E) 140.

Comentários:
Percebam que essa questão exige apenas **a aplicação direta da fórmula** que acabamos de ver.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \cup B \cup C) = 50 + 50 + 50 - 10 - 10 - 10 + 0$$

$$n(A \cup B \cup C) = 120$$

Gabarito: Letra C.

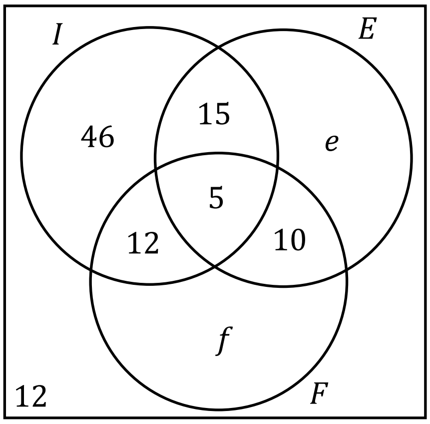
(ISS-BH/2022) Uma empresa do ramo de turismo abriu processo para a seleção de agentes de viagens. Dos 180 candidatos inscritos, 12 foram eliminados logo no início do processo por não falarem um segundo idioma, o que era pré-requisito na seleção. Dos que ficaram, sabe-se que 78 falam inglês, 20 falam inglês e espanhol, 17 falam inglês e francês, 15 falam francês e espanhol e 5 falam os três idiomas. Sendo assim, assinale a alternativa correta.
A) A quantidade de candidatos que falam espanhol é igual a quantidade de candidatos que falam francês.
B) 50 candidatos falam somente inglês.

C) 46 candidatos falam pelo menos dois idiomas.
D) 49 candidatos falam francês.
E) 126 candidatos falam somente um dos idiomas.

Comentários:
Primeiramente, vamos convencionar algumas coisas. Chamemos de "I" o conjunto formado por aqueles que falam inglês, de "F" o conjunto formado por aqueles que falam francês e de "E" o conjunto formado por aqueles que falam espanhol. Dito isso, vamos extrair algumas informações do enunciado.

- **78 falam inglês:** $n(I) = 78$
- **20 falam inglês e espanhol:** $n(I \cap E) = 20$
- **17 falam inglês e francês:** $n(I \cap F) = 17$
- **15 falam francês e espanhol**: $n(F \cap E) = 15$
- **5 falam os três idiomas**: $n(F \cap E \cap I) = 5$
- **12 não falam um segundo idioma.**

Agora, vamos passar essas informações para um diagrama.



Observe que existem **algumas quantidades que não conseguimos determinar** pois o enunciado não nos forneceu essas informações de forma direta. "e" representa quantas pessoas falam **apenas espanhol** (como segundo idioma) e "f", quantas falam **apenas francês** (como segundo idioma). Ademais, sabemos que quando somamos todas essas regiões, devemos ter o total de candidatos (180).

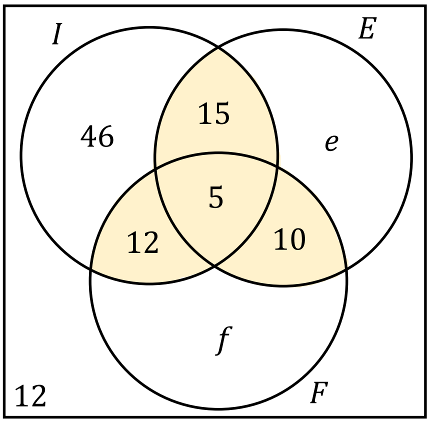
$$46 + 5 + 15 + 12 + 10 + e + f + 12 = 180 \quad \rightarrow \quad e + f = 80$$

Com essas informações, vamos analisar as alternativas.
A) A quantidade de candidatos que falam espanhol é igual a quantidade de candidatos que falam francês.
Errado. Não temos informações suficientes que nos permitam concluir isso.

B) 50 candidatos falam somente inglês.

Errado. Pelo diagrama que desenhamos, vemos que 46 candidatos falam apenas inglês.

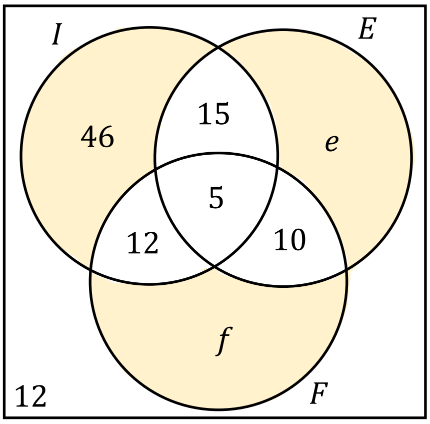
C) 46 candidatos falam pelo menos dois idiomas.
Errado. Vamos destacar no diagrama as regiões de interesse.



Assim, a quantidade de candidatos que falam pelo menos dois idiomas é: 5+15+12+10=42.

D) 49 candidatos falam francês.
Errado. Pessoal, não temos informações suficientes para "cravar" quantos candidatos falam francês.

E) 126 candidatos falam somente um dos idiomas.
Certo. Essa aqui é nossa resposta, pessoal. Vamos destacar no diagrama as regiões que retratam a quantidade de candidatos que falam apenas um idioma.



Ora, sendo assim, a quantidade de candidatos que falam apenas um idioma é dada pela soma: $46 + e + f$.

Note que, apesar de não termos os valores de "e" e "f" individualmente, sabemos o valor da soma "$e + f$", pois já a calculamos anteriormente. Assim, $46 + 80 = 126$. Logo, são **126 candidatos que falam apenas 1 idioma**.

Gabarito: LETRA E.

Em algumas questões **não precisaremos aplicar diretamente a fórmula acima**. Será necessário um trabalho mais braçal da nossa parte, para chegar à resposta. Muitas vezes a questão pede valores específicos que vão surgir de uma maneira mais fácil **se a gente for completando o diagrama de Venn** com as quantidades.

Por favor, **dê mais olhada naquele "mapa" que mostrei logo no início desse tópico**, destacando as regiões e o seu significado.

Para contar elementos em um diagrama de Venn, o primeiro passo é sempre inserir a quantidade de elementos que possui a intersecção dos três conjuntos! Depois, partimos para as intersecções duplas e, por fim, analisamos a quantidade de elementos exclusivos de cada conjunto. Vamos ver na prática como fazemos isso?

(TRF-3/2019) O número de matriculados nas disciplinas de Cálculo, Estatística e Microeconomia é 150. Sabe-se que 12 deles cursam simultaneamente Microeconomia e Estatística, e que 80 deles cursam somente Cálculo. Os alunos matriculados em Microeconomia não cursam Cálculo. Se a turma de Cálculo tem 96 alunos e a de Estatística, 35, o número de alunos na turma de Microeconomia é

A) 12.

B) 47.

C) 7.

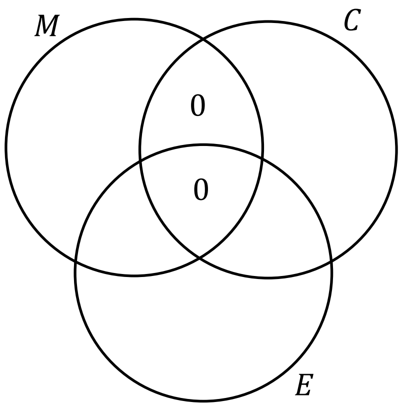
D) 28.

E) 23.

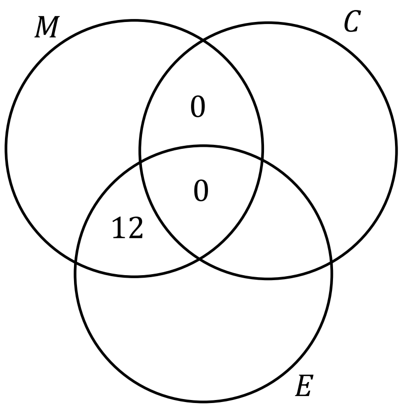
Comentários:

Nosso **conjunto universo é formado por 150 alunos** que estão matriculados em três disciplinas: Cálculo (C), Estatística (E) e Microeconomia (M). Lembre-se de que nesse tipo de questão, nossa abordagem sempre **é começar pela intersecção dos três conjuntos**, depois, partimos para **as intersecções dois a dois** e por fim, para as regiões isoladas. Comece se perguntando: *qual a quantidade de alunos que cursam as 3 disciplinas?*

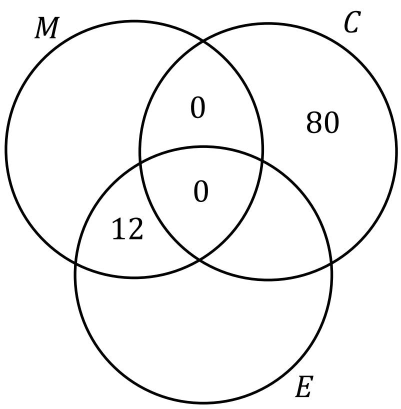
A resposta será zero! Veja que, de acordo com o enunciado, **não existem alunos que são matriculados em Microeconomia e Cálculo ao mesmo tempo**. Sendo assim, se não existe aluno matriculado nas duas, **não pode ter aluno matriculado nas 3**.



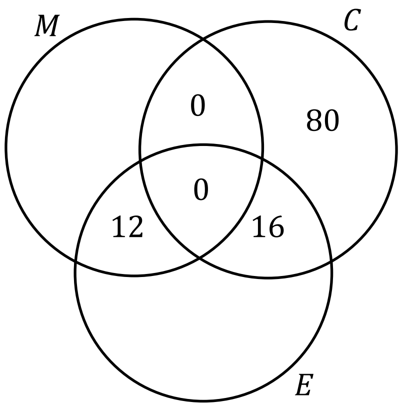
Sabemos ainda que **12 deles cursam simultaneamente Microeconomia e Estatística**.



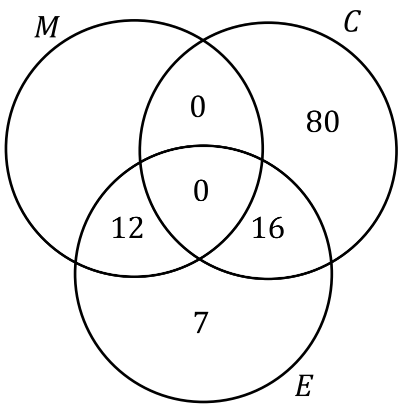
80 deles cursam SOMENTE cálculo.



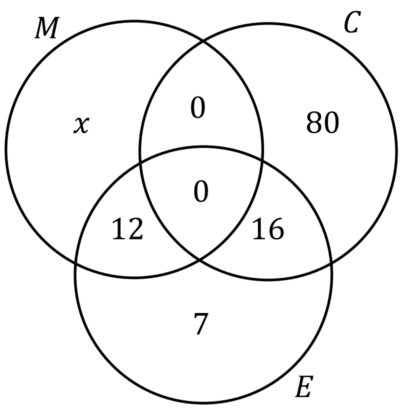
Como temos 80 alunos que fazem somente Cálculo, então **devemos ter 16 alunos que fazem Cálculo e Estatística para poder completar os 96 alunos da turma.**



São **35 alunos de Estatística** e no diagrama temos $12 + 16 = 28$. Logo, **7 alunos cursam somente Estatística**.



Seja x a quantidade de alunos que fazem **apenas Microeconomia**.



A quantidade de alunos elencadas nos diagramas acima deve **totalizar os 150 alunos dos 3 cursos**.

$$x + 12 + 0 + 0 + 7 + 16 + 80 = 150$$
$$x + 115 = 150$$
$$x = 35$$

Cuidado aqui! **35 é a quantidade de alunos que fazem APENAS Microeconomia**. Para descobrir o total de alunos de Microeconomia devemos somar com aqueles que também fazem Estatística (12). Logo,

$$\boldsymbol{n(M) = 35 + 12} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{n(M) = 47}$$

Gabarito: Letra B.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Introdução

Chegou a hora de falarmos sobre conjuntos numéricos! Como o próprio nome sugere, são **grupos exclusivamente formados por números**! Compreender essa parte inicial da matemática é fundamental para que você possa **construir uma base sólida na matéria**. *Vamos nessa?!*

Conjunto dos Naturais ($\mathbb{N}$)

O conjunto dos números naturais é representado pelo símbolo $\mathbb{N}$. Basicamente, esse conjunto compreenderá aqueles números que **surgem "naturalmente" da necessidade de contar**. Observe.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

A primeira coisa que você deve notar é que no conjunto dos números naturais **não vamos ter os famosos "números quebrados",** tais como "1,5", "2,81", "101,12"... Também não teremos os números negativos, tais como o "-1", '-105", "-56,15"...

É o conjunto mais simples e **possui uma quantidade <u>infinita</u> de elementos**. Uma notação importante é **o asterisco sobrescrito** ao símbolo do conjunto. **Ele vai indicar que o 0 está sendo excluído da lista**. Essa notação pode ser usada para qualquer conjunto que veremos.

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

No estudo dos números naturais, podemos introduzir dois novos conceitos: **o antecessor e o sucessor** de um número. O antecessor de um número natural nada mais é do que **o número que vem antes dele**. Por exemplo, o antecessor do 5 é o 4, o antecessor do 100 é o 99, o antecessor do 12341 é o 12340.

Note que **o número 0 é o único natural que não possui <u>antecessor natural</u>**, pois **-1 pertence ao conjunto dos números inteiros,** como veremos posteriormente.

O **sucessor de um número é o número que vem após ele**. Por exemplo, o sucessor do 5 é o 6 e o sucessor do 80 é o 81. Dessa vez, perceba que **todos os naturais possuem sucessores**.

(CRA PR/2020) Acerca dos conjuntos dos números naturais, dos números inteiros e dos números racionais, de suas operações e de suas propriedades, julgue o item: a diferença entre dois números naturais é sempre um número natural.

Comentários:

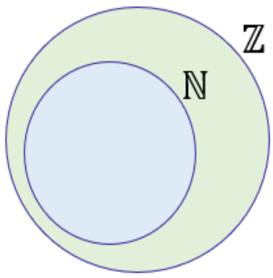
O melhor jeito de julgar assertivas desse tipo é **procurar um exemplo** que negue o que está escrito. Observe quando fazemos a diferença $\mathbf{3-5=-2}$. São dois números naturais que, quando calculamos a sua subtração nessa ordem, **obtemos um número negativo**.

Sabemos que, no conjunto dos números naturais, **não temos números negativos**! Eles vão aparecer **a partir no conjunto dos números inteiros**. Portanto, o item encontra-se errado ao afirmar que a diferença entre dois números naturais **será sempre um natural**.

Gabarito: ERRADO.

Conjunto dos Inteiros ($\mathbb{Z}$)

Para obtermos o conjunto dos números inteiros, basta **pegar os naturais e adicionar os números negativos**!



$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

As primeiras informações que devemos ter em mente sobre o conjunto dos números inteiros é que ele **contém o conjunto dos números naturais**: $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$. Em outras palavras, **o conjunto dos números naturais é um subconjunto dos inteiros**.

Nesse contexto, note que **todos os números naturais são também números inteiros**. Portanto, é correto dizer que $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ **além de números naturais, são números inteiros**. Atenção ao fato de que, **os números negativos são números inteiros, mas não são números naturais**. Podemos utilizar o asterisco sobrescrito caso se queira tirar o 0 do conjunto.

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Nessa altura da aula, **é importante** definirmos duas classes especiais de números: **os números pares e os números ímpares**.

- **Número par**: todo número inteiro que pode ser escrito na forma $\boldsymbol{p=2n}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- **Número ímpar**: todo número inteiro que pode ser escrito na forma $\boldsymbol{i=2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

As definições acima podem parecer um pouco complicadas, normalmente, elas são utilizadas apenas para demonstrar propriedades desses números. Logo, podemos defini-los de uma maneira mais simplificada.

- **Número par:** todo número terminado em $0, 2, 4, 6$ e 8.
- **Número ímpar**: todo número terminado em $1, 3, 5, 7$ e 9.

A forma como conceituamos acima é **uma consequência da definição original**. É muito útil quando precisamos identificar se um número é par ou ímpar!

HORA DE PRATICAR!

(PREF. IMBÉ/2020) Analise as assertivas abaixo e assinale V, se verdadeiras, ou F, se falsas.
( ) 34 é sucessor de 35.
( ) Todo número natural tem antecessor, menos o zero.
( ) 3,5,7,9,11 é uma sequência de números naturais pares.
A ordem correta de preenchimento dos parênteses, de cima para baixo, é:
A) F – V – F.
B) V – F – V.
C) F – F – V.
D) V – V – F.
E) F – F – F.

Comentários:

($\boldsymbol{F}$) **$\mathbf{34}$ é sucessor de $\mathbf{35}$.**
Assertiva falsa. 34 vem antes do 35, portanto, **é seu antecessor.**

($\boldsymbol{V}$) **Todo número natural tem antecessor, menos o zero.**
Assertiva verdadeira. Perceba que **o antecessor do $\mathbf{0}$ seria o $\mathbf{-1}$**. No entanto, lembre-se que **$\mathbf{-1}$ não é um número natural**, mas sim, um número inteiro. Qualquer outro natural possuirá um antecessor: o antecessor do 1 será o 0, do 2 será o 1...

($\boldsymbol{F}$) **$\mathbf{3, 5, 7, 9, 11}$ é uma sequência de números naturais pares.**
Assertiva falsa. Os números pares são: $0, 2, 4, 6, \dots$. Os números apresentados na sequência **são ímpares**.

Gabarito: Letra A

(PREF. SA SUDOESTE/2020) Assinale a alternativa que representa a quantidade de números pares existentes na sequência $\{1, 3, 5, 8, 16, 20, 30, 50, 88, 100, 552, 663, 1000, 1114\}$.
A) 10
B) 20

C) 30
D) 40

Comentários:
Uma dica para facilitar nossa vida na identificação dos pares é tentar lembrar apenas os primeiros: $0,2,4,6\ e\ 8$. Qualquer número que termine com um desses algarismos **também será um número par**.

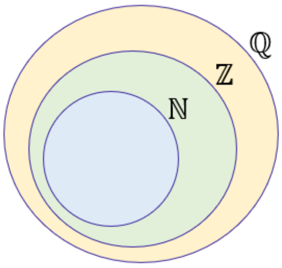
$$\{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{8}, \mathbf{16}, \mathbf{20}, \mathbf{30}, \mathbf{50}, \mathbf{88}, \mathbf{100}, \mathbf{552}, \mathbf{663}, \mathbf{1000}, \mathbf{1114}\}$$

Os números destacados **são todos pares**. Quando contamos, descobrimos que temos 10 deles.

Gabarito: Letra A.

Conjunto dos Racionais ($\mathbb{Q}$)

Chegamos aos conjuntos dos números racionais! **O $\mathbb{Q}$ será formado pelo conjunto dos números inteiros mais os "números quebrados"!** Basicamente, dizemos que um número é racional se ele pode ser representado na **forma de fração**! Perceba, portanto, que o conjunto dos inteiros é um subconjunto dos racionais! $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.



Isso significa que números como **$1, 2$ *ou* 3 além de serem naturais, são inteiros e também são racionais**. Mas vamos explicar melhor nossa definição de número racional, pois existe **mais uma condição que ele deve obedecer para ser considerado um número racional**. Logo, para um número ser racional precisamos que:

1. Ele possa ser representado em uma **forma fracionária de números inteiros**.

$$\frac{1}{1} = 1 \quad ; \quad \frac{3}{2} = 1{,}5 \quad ; \quad \frac{10}{2} = 5 \quad ; \quad \frac{1}{10} = 0{,}1 \quad ; \quad \frac{500}{3} = 166{,}66\ldots$$

Todos os números acima são exemplos de números racionais.

2. Se ele tiver **uma representação decimal infinita**, para ser um racional, **ela também deve periódica**.

$$0{,}333\ldots \quad ; \quad 1{,}67676767\ldots ; \quad 100{,}123123123123\ldots \quad ; \quad 1{,}000100010001\ldots$$

Números com o formato acima são exemplos de números racionais pois, **apesar de possuírem uma representação decimal infinita, ela é periódica**. Esses números são **as famosas dízimas periódicas**! Estudaremos ela **com mais detalhes em um próximo momento**, quando daremos um foco especial no estudo das frações.

De antemão, eu quero que você grave: **dízimas periódicas são números racionais**! Elas podem ser convertidas em frações! Não se preocupe em entender as dízimas periódicas agora. **Dedicaremos um tempo na próxima aula exclusivamente para elas**! Guarde apenas que **são números racionais** e que **podemos transformá-las em frações**!

ESCLARECENDO!

Quando falamos da **representação decimal finita** de um número, estamos nos referindo a um número que possui uma **quantidade finita de algarismos**. Por exemplo, $100{,}003$ é um número com representação decimal finita. Já **o número $1,333\dots$ é um exemplo de número com representação decimal infinita**.

As reticências indicam que há muitos mais números a serem considerados. Nesse caso, esse número é formado por **infinitos "3" após a vírgula**. **Como o número 3 se repete**, dizemos ainda que possui uma representação decimal finita **e periódica**!

O que acontece se um número possuir uma **representação decimal infinita mas que não é periódica**? Nesses casos, **não poderemos escrever esses números em uma forma fracionária** e eles serão chamados de **números irracionais**!

Aposto que você conhece alguns números irracionais: $\sqrt{2} = 1{,}4142\dots, \sqrt{3} = 1{,}7320\dots, \pi = 3{,}1415\dots$. **Não ache** que todas as raízes são números irracionais. Veja, por exemplo, que $\sqrt{4} = 2$, mas **2 é um número natural**.

HORA DE PRATICAR!

(CM MANDAGUARI/2019) Considerando os conjuntos numéricos, assinale a alternativa CORRETA:

A) O número $\sqrt{2} \in \mathbb{N}$

B) O número $\pi \in \mathbb{Q}$

C) O número $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

D) O número $\sqrt{36} \in \mathbb{Q}$

Comentários:

A) O número $\sqrt{2} \in \mathbb{N}$

Alternativa incorreta. $\sqrt{2}$ **é um número irracional** e não um número natural.

B) O número $\pi \in \mathbb{Q}$

Alternativa incorreta. $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais. **O número $\pi = 3,1415$ ...é um número irracional** pois sua representação decimal infinita **é aperiódica** e, portanto, não pode ser convertido em uma forma fracionária.

C) O número $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

Alternativa incorreta. $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais. O número $\sqrt{3} = 1,7320$ ... é um número irracional pois sua representação decimal infinita é aperiódica e, portanto, **não pode ser convertido em uma forma fracionária**.

D) O número $\sqrt{36} \in \mathbb{Q}$

Alternativa correta. $\sqrt{36} = 6$. Veja que 6 é um número natural que, como estudamos, está contido no conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$).

Gabarito: Letra D.

Conjuntos dos Irracionais $(\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q})$

Normalmente, **representamos o conjunto dos irracionais como $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ou simplesmente $\mathbb{I}$**. Lembre-se da operação "Diferença" que já conhecemos! Sendo assim, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ significa **o conjunto formado pelos números reais que não são números racionais**! Mas o que seriam os números irracionais? Os números irracionais são todos os números que não podem ser representados pela fração de dois inteiros! Por exemplo, $\sqrt{2}$ e π são exemplos de números irracionais. Abaixo, vamos conhecer alguns números irracionais famosos!

- Pi (π)

$$\pi \approx 3{,}141592 \ldots$$

- Razão de Ouro (ou Proporção Áurea)

$$\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1{,}618033 \ldots$$

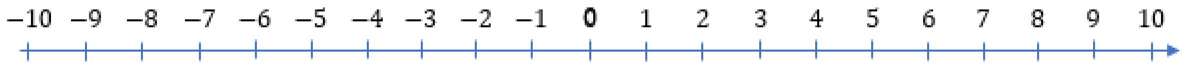
- Número de Euler (e)

$$e \approx 2{,}7182818\ \ldots$$

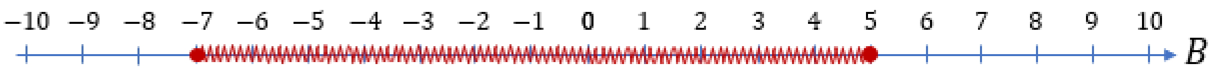
No momento, não vamos nos aprofundar muito em cada um dos números acima, teremos a oportunidade mais a frente! Para hoje, quero apenas que vocês **lembrem que tais números são irracionais**! Por fim, é importante saber que as raízes não exatas são também números irracionais. Por exemplo, temos $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$...

Conjunto dos Reais ($\mathbb{R}$)

Chegamos ao conjunto dos números reais! Esse conjunto **engloba tanto o conjunto dos números racionais quanto os números irracionais!** Um número real é o conjunto de **todos os números que lidamos no nosso dia a dia**... Não importa se ele tem uma representação decimal finita tal como os números $\mathbf{1,5}$ e $\mathbf{10,354}$ ou uma representação decimal infinita como $\mathbf{1,6666\ \ldots}$. e $\mathbf{3,1415\ \ldots}$. Além de representar o conjunto dos números reais em um diagrama, também usamos uma reta! **É a chamada reta real**!



Esse tipo de representação vai ser usado principalmente **quando tivermos estudando inequações**! Lá, precisaremos definir um tipo de conjuntos que **chamaremos de intervalo**. Por exemplo, se quero representar um conjunto B formado por todos os números que estão entre -7 e 5, **com eles inclusos**, podemos fazer o seguinte esquema:



(PREF. PERUÍBE/2019) Em relação ao conjunto dos números reais, é verdade que

A) o produto de dois números irracionais não pode ser um número racional.

B) a soma de dois números irracionais distintos é sempre um número irracional.

C) todo número racional tem uma representação decimal finita.

D) o número $43/71$ não é racional, pois sua representação decimal não é periódica.

E) se a representação decimal infinita de um número é periódica, então esse número é racional.

Comentários:

A) o produto de dois números irracionais não pode ser um número racional.

Alternativa incorreta. Vamos recorrer a um exemplo para mostrar que isso não é verdade. Considere os números irracionais $\sqrt{5}$ e $\sqrt{20}$. Quando fazemos o produto desses dois números, obtemos que $\sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$. Note que, o produto dos dois números irracionais **deu um número racional**.

B) a soma de dois números irracionais distintos é sempre um número irracional.
Alternativa incorreta. Vamos recorrer também a um exemplo para mostrar que não é verdade. Considere **os números irracionais $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$**. Vamos somá-los?

$$S = \left(1 + \sqrt{3}\right) + \left(1 - \sqrt{3}\right)$$

$$S = 2$$

Logo, a soma dos números irracionais distintos que escolhemos **resultou em um número natural**!

C) todo número racional tem uma representação decimal finita.
Alternativa incorreta. Dízimas periódicas, apesar de possuírem uma representação decimal **infinita**, **são consideradas números racionais pois podem ser escritas na forma de uma fração** (a chamada fração geratriz).

D) o número $43/71$ não é racional, pois sua representação decimal não é periódica.
Alternativa incorreta. Simplesmente pelo fato de poder ser **representado na forma de uma fração de números inteiros**, **já é suficiente para considerá-lo um número racional**. Além disso, sua representação decimal é periódica.

E) se a representação decimal infinita de um número é periódica, então esse número é racional.
Alternativa correta. Sabemos que se a representação decimal infinita de um número é periódica, então estamos falando das dízimas periódicas. **Qualquer dízima periódica pode ser representada na forma de uma fração geratriz**. Se pode ser representada por uma fração de números inteiros, então trata-se de um número racional.

Gabarito: Letra E.

Conjunto dos Complexos ($\mathbb{C}$)

Aqui já estamos indo um pouquinho além! Vou comentar apenas brevemente, pessoal! É só a título de conhecimento! Os números complexos são estudados em uma aula própria! No entanto, quero que você saiba que eles existem! Eles são números na forma:

$$z = a + bi$$

Em que "a" e "b" são números reais e "i" é a chamada unidade imaginária.

$$i = \sqrt{-1}$$

Calma! Veremos tudo isso com mais detalhes em uma aula específica do curso, caso seu edital tenha previsto. Nesse momento, quero que você guarde **que todo número real é também um número complexo**. Veja que quando "b" é igual a zero, temos:

$$z = a + 0 \cdot i \qquad \rightarrow \qquad z = a$$

Ressalta-se que o inverso não é verdadeiro, ou seja, não é verdade que todo complexo é um real! Por exemplo, $z = 2 + i$ é um número complexo, mas não é um real.

RESUMINDO

- Um número complexo é um número “z” que possui a forma:

$$z = a + bi \qquad a, b \in \mathbb{R} \quad e \quad i = \sqrt{-1}$$

- Todo número real é um número complexo, mas nem todo complexo é um número real.

- O conjunto dos reais está contido no conjunto dos complexos.

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Problemas envolvendo Conjuntos Numéricos

Nessa parte da aula, falaremos um pouco mais sobre **as operações** dentro dos conjuntos numéricos. O foco não será propriamente em como realizar essas operações, mas sim **em algumas propriedades que estão sempre aparecendo nas provas**.

Vamos responder os seguintes tipos de questionamentos: *a soma de números inteiros será sempre um número inteiro? E a multiplicação de números irracionais será sempre um número irracional? Fique atento e vamos nessa*!

Soma

Para a soma, devemos guardar as seguintes propriedades:

- A soma de números naturais é sempre um número natural;
- A soma de números inteiros é sempre um número inteiro;
- A soma de números racionais é sempre um número racional;
- A soma de números reais é sempre um número real.

Note que deixamos apenas um conjunto de números fora da nossa lista: **os irracionais**. Como já abordamos em uma questão feita no capítulo anterior, **a soma de números irracionais <u>nem sempre</u> será um número irracional**. Para mostrar isso, imagine o seguinte exemplo: considere os números irracionais $5+\sqrt{2}$ e $5-\sqrt{2}$. Vamos somá-los?

$$S=\left(5+\sqrt{2}\right)+\left(5-\sqrt{2}\right)$$

$$S=5+\sqrt{2}+5-\sqrt{2}$$

$$S=10$$

Perceba que a soma dos dois número irracionais que escolhemos **resultou em um número racional**. Logo, muito atenção com esse tipo de **generalização acerca dos números irracionais**! Além disso, podemos ainda comentar a soma de números pares e ímpares.

- $\text{PAR} \pm \text{PAR} = \text{PAR}$
- $\text{ÍMPAR} \pm \text{ÍMPAR} = \text{PAR}$
- $\text{ÍMPAR} \pm \text{PAR} = \text{ÍMPAR}$

(PREF.PARAÍ/2019/ADAPTADA) Considere as seguintes afirmações sobre os números naturais:

I. A soma de dois números naturais pares é sempre um número par.
II. A soma de dois números ímpares é sempre um número ímpar.

Quais estão corretas?
A) Apenas I.
B) Apenas II.
C) Apenas I e II.
D) N.D.A.

Comentários:
I. A soma de dois números naturais pares é sempre um número par.
Assertiva verdadeira. Sabemos que se $\boldsymbol{n_1}$ **e** $\boldsymbol{n_2}$ **são dois números pares**, então eles podem ser escritos na forma $\boldsymbol{n_1 = 2p}$ e $\boldsymbol{n_2 = 2q}$. Seja s a soma dos dois, então:

$$s = n_1 + n_2 \quad \rightarrow \quad s = 2p + 2q \quad \rightarrow \quad s = 2 \cdot (p + q)$$

Perceba que $\boldsymbol{s}$ **possui o fator 2** e, portanto, **também é um número par**.

II. A soma de dois números ímpares é sempre um número ímpar.
Assertiva falsa. Para julgar essa afirmativa, é suficiente buscarmos um contraexemplo. Quando somamos 1 e 3, **que são números ímpares**, obtemos 4, **que é um número par**.

Gabarito: Letra A.

Subtração

- A subtração de números inteiros é um outro número inteiro.
- A subtração de números racionais é um outro número racional.
- A subtração de números reais é um outro número real.

Dessa vez, deixamos dois conjuntos de fora: **o conjunto de números naturais e dos irracionais**. Observe que 10 e 100 são dois números naturais, vamos subtraí-los?

$$D = 10 - 100 \quad \rightarrow \quad D = -90$$

A subtração do 10 por 100 resulta em -90. Logo, tivemos **dois números naturais que subtraídos forneceram um número inteiro**. Isso sempre acontecerá quando subtraímos um número maior de um menor. É por esse motivo que **não podemos dizer que a subtração de dois números naturais é um outro número natural**.

Analogamente, para os números irracionais, vamos **escolher dois números para mostrar que essa propriedade não vale para eles**. Por exemplo, considere os seguintes números irracionais: π e $\pi + 2$. Vamos subtraí-los? Note que **o resultado será um número racional.**

$$D = (\pi + 2) - \pi \qquad \rightarrow \qquad D = 2$$

HORA DE PRATICAR!

(PREF. ARARANGUÁ/2016) Assinale a alternativa INCORRETA:

A) A diferença entre dois números naturais pode não ser um número natural.

B) O produto entre dois números racionais é sempre um número racional.

C) A soma entre dois números irracionais é sempre um número irracional.

D) $0{,}845$ e $1{,}7454545\ldots$ são números racionais.

E) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ e π são números irracionais.

Comentários:

A) A diferença entre dois números naturais pode não ser um número natural.

Correto. Acabamos de ver na teoria que, em algumas situações, **a subtração de dois números naturais poderá dar um número negativo** (que é um número inteiro).

B) O produto entre dois números racionais é sempre um número racional.

Correto. Se temos dois números racionais, então eles podem ser escritos na forma de uma fração de números inteiros. O **produto dessas frações será uma outra fração** também de números inteiros e, portanto, um número racional.

C) A soma entre dois números irracionais é sempre um número irracional.

Errado. É a alternativa procurada. Vimos também na teoria que a soma entre dois números irracionais nem sempre dará um outro número irracional. **Algumas vezes, poderemos obter um número racional**.

D) $0{,}845$ e $1{,}7454545\ldots$ são números racionais.

Correto. Observe que o número **$0{,}845$ possui uma representação decimal finita**, sendo assim, é facilmente convertido em uma fração de números inteiros, veja:

$$0{,}845 = \frac{845}{1000}$$

Além disso, $1{,}7454545\ldots$ é uma dízima periódica e vimos que **toda dízima periódica é um número racional**.

E) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ e π são números irracionais.

Correto. São exemplos clássicos de números irracionais. Observe eles expandidos:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379\ldots$$

$$\sqrt[3]{4} = 1{,}5874010519681994747517056392723082603914933278998530098082857618\ldots$$

$$\pi = 3{,}1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923\ldots$$

Gabarito: Letra C

Multiplicação

- A multiplicação de dois números naturais é sempre um número natural.
- A multiplicação de dois números inteiros é sempre um número inteiro.
- A multiplicação de dois números racionais é sempre um número racional.
- A multiplicação de dois números reais é sempre um número real.

Mais uma vez, **os números irracionais ficaram de fora** da nossa lista. Para provar porque estão de fora, vamos considerar dois números irracionais:

$$\sqrt{5} = 2.2360679774997896964091736687312\ldots$$

$$\sqrt{20} = 4.4721359549995793928183473374 6\ldots$$

Quando multiplicamos os dois: $\boldsymbol{\sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10}$. Note que, **nesse exemplo**, o produto de dois números irracionais **resultou em um número racional**.

(CRA-PR/2020) Acerca dos conjuntos dos números naturais, dos números inteiros e dos números racionais, de suas operações e de suas propriedades, julgue o item: o produto entre dois números naturais é sempre um número natural.

Comentários:

Lembre-se do conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,7\ldots\}$$

Observe que, com exceção do 0, **todos são números positivos**. Sabemos que a multiplicação de dois números positivos **sempre dará um outro número positivo**. Logo, não há perigo de multiplicarmos nenhum dos números do conjunto acima e obter um número negativo (**que sabemos que não é um natural**).

Além disso, **qualquer multiplicação em que um dos fatores seja 0, também dará 0.** Dessa forma, percebemos que **não há como** a multiplicação de dois números naturais não ser um número natural e, portanto, o item está correto.

Gabarito: CERTO.

(PREF. SÃO CRISTOVÃO/2019) O produto de dois números racionais é sempre um número racional. O mesmo é válido para números irracionais: o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

Comentários

De maneira simplificada, podemos conceituar um número racional como **todo número que pode ser escrito na forma de uma fração de números inteiros**. De fato, como vimos na teoria, **a multiplicação de dois números racionais será um racional**, mas **o produto** de dois números irracionais **nem sempre será irracional**.

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

Gabarito: ERRADO.

Divisão

- A divisão de dois números racionais será sempre um racional.
- A divisão de dois números reais será sempre um número real.

Observe que é a nossa menor lista até agora. **Divisão de números naturais não necessariamente fornecerá um outro número natural**, isso vale igualmente **para os números inteiros e irracionais**. Observe.

- Considere **os números naturais $\mathbf{1}$ e $\mathbf{2}$**. Vamos dividi-los?

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ora, **$\mathbf{0,5}$ não é um número natural**, é um número racional.

- Considere **os números inteiros $\mathbf{-5}$ e $\mathbf{2}$**. Vamos dividi-los?

$$-\frac{5}{2} = -2{,}5$$

$-2,5$ não é um número inteiro, é um número racional.

- Considere **os números irracionais $\sqrt{1000}$ e $\sqrt{10}$**. Vamos dividi-los?

$$\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{10}} = \sqrt{100} = 10$$

10 não é um irracional, é um número racional.

Muito cuidado com **as generalizações envolvendo divisões (quocientes).** Esse cuidado maior deve-se ao fato de que **os conjuntos de números naturais e inteiros não abrigam os famosos "números quebrados"** e, quando dividimos um número pelo outro, é muito fácil obter esse tipo número.

HORA DE PRATICAR!

(PREF. SUZANO/2015) Com relação à operação com números reais, é correto afirmar que
A) o produto de dois números racionais pode resultar em um número irracional.
B) o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.
C) a soma de dois números racionais pode resultar em um número irracional.
D) o quociente de dois números irracionais é sempre um número irracional.
E) a soma de dois números irracionais pode resultar e um número racional.

Comentários:
A) o produto de dois números racionais pode resultar em um número irracional.
Alternativa incorreta. Como vimos, **o produto de dois número racionais é sempre um número racional**. Considere os dois números racionais a seguir $r_1 = a/b$ e $r_2 = c/d$. Quando multiplicamos, obtemos que:

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Veja que **o produto das frações continua sendo uma fração de números inteiros**. Se pode ser escrito como uma fração de números inteiros, então é um número racional.

B) o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

Alternativa incorreta. Lembre-se que dos exemplos que mostramos na aula $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$. São **dois números irracionais que multiplicados fornecem um número racional**.

C) a soma de dois números racionais pode resultar em um número irracional.
Alternativa incorreta. A soma de dois números racionais fornece **sempre** **um número racional**.

D) o quociente de dois números irracionais é sempre um número irracional.
Alternativa incorreta. Lembre-se do exemplo que tratamos na aula:

$$\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{10}} = \sqrt{100} = 10$$

O exemplo acima traz **o quociente de dois números irracionais dando um número racional**.

E) a soma de dois números irracionais pode resultar em um número racional.
Alternativa correta. Imagine os números irracionais $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$. O que acontece quando somamos os dois? $(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3}) = 2$. Obtivemos **o número 2** **que é um número racional**. Logo, o item encontra-se correto quando afirma que a soma de dois irracionais **pode dar um racional**.

Gabarito: Letra E.

QUESTÕES COMENTADAS - FGV

Introdução à Teoria dos Conjuntos

1. (FGV/TCE-SP/2023) Considere o conjunto A = {2, 3, 4, 6, 7, 8}. O número de subconjuntos de A com 3 elementos, sendo pelo menos um elemento ímpar, é:

A) 16

B) 15

C) 14

D) 12

E) 8

Comentários:

Podemos resolver mais rapidamente esse exercício por meio de **análise combinatória**. No entanto, vamos por outro caminho para treinarmos o que vimos na teoria. Nesse caminho, vamos escrever os subconjuntos de A que possuem três elementos.

$$\{2,3,4\} \quad \{2,3,6\} \quad \{2,3,7\} \quad \{2,3,8\} \quad \{2\ 4,6\}$$

$$\{2,4,7\} \quad \{2,4,8\} \quad \{2,6,7\} \quad \{2,6,8\} \quad \{2,7,8\}$$

$$\{3,4,6\} \quad \{3,4,7\} \quad \{3,4,8\} \quad \{3,6,7\} \quad \{3,6,8\}$$

$$\{3,7,8\} \quad \{4,6,7\} \quad \{4,6,8\} \quad \{4,7{,}8\ \} \quad \{6,7,8\}$$

Observe que temos **20 subconjuntos de A com três elementos**. Agora, vamos marcar aqueles que têm pelo menos um elemento ímpar.

$$\color{red}{\{2,3,4\}} \quad \color{red}{\{2,3,6\}} \quad \color{red}{\{2,3,7\}} \quad \color{red}{\{2,3,8\}} \quad \{2\ 4,6\}$$

$$\color{red}{\{2,4,7\}} \quad \{2,4,8\} \quad \color{red}{\{2,6,7\}} \quad \{2,6,8\} \quad \color{red}{\{2,7,8\}}$$

$$\color{red}{\{3,4,6\}} \quad \color{red}{\{3,4,7\}} \quad \color{red}{\{3,4,8\}} \quad \color{red}{\{3,6,7\}} \quad \color{red}{\{3,6,8\}}$$

$$\color{red}{\{3,7,8\}} \quad \color{red}{\{4,6,7\}} \quad \{4,6,8\} \quad \color{red}{\{4,7,8\}} \quad \color{red}{\{6,7,8\}}$$

Pronto! São **16 subconjuntos** com pelo menos 1 elemento ímpar! Podemos marcar a alternativa A.

Gabarito: LETRA A.

2. (FGV/PREF. SALVADOR/2019) Em uma classe de 20 estudantes, 12 são meninas. Além disso, dos 20 estudantes, 15 gostam de Matemática. É correto concluir que

a) nenhuma menina gosta de Matemática.
b) todas as meninas gostam de Matemática.
c) no máximo 7 meninas gostam de Matemática.
d) no mínimo 7 meninas gostam de Matemática.
e) exatamente 7 meninas gostam de Matemática.

Comentários:

Temos 20 estudantes e 12 são meninas. **Consequentemente, 8 serão meninos**. Depois, o enunciado afirma que 15 estudantes gostam de matemática. Vamos fazer uma análise item a item.

a) nenhuma menina gosta de Matemática.
ERRADO. Galera, temos 15 estudantes que gostam de matemática e apenas 8 meninos. Com isso, certamente há meninas que gostam de matemática.

b) todas as meninas gostam de Matemática.
ERRADO. Não conseguimos concluir isso com as informações do enunciado. Veja que temos 15 estudantes de que gostam de matemática e 12 meninas. Logo, poderíamos ter as 12 meninas gostando de matemática mais 3 meninos. Acontece que, **isso não é necessariamente verdade**. Note que não há problema algum serem também 10 meninas e 5 meninos, por exemplo.

c) no máximo 7 meninas gostam de Matemática.
ERRADO. Podemos inclusive ter as 12 meninas gostando de matemática. **Não há essa restrição superior**.

d) no mínimo 7 meninas gostam de Matemática.
CERTO. Imagine que apenas 6 meninas gostem de matemática. Com isso, **precisaríamos de 9 meninos (para fechar os 15 que gostam).** Sabemos, no entanto, que **só temos 8 meninos**. Logo, a quantidade mínima de meninas que gostam de matemática **deve ser 7**. Assim, ficamos na condição limite em que todos os meninos gostam de matemática. Tudo certo?!

e) exatamente 7 meninas gostam de Matemática.
ERRADO. Há um limite mínimo de meninas, mas **não temos informação suficiente** para falar exatamente quantas meninas gostam de matemática.

Gabarito: LETRA D.

3. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Na matemática, as coleções são chamadas de conjuntos. Se uma coleção tem apenas um elemento, ela é dita um conjunto unitário. Um exemplo de conjunto unitário é a coleção formada pelos números que são:

a) ao mesmo tempo, divisores de 4 e 9;
b) divisores de 4;
c) divisores de 9;
d) maiores que 4 e menores que 9;
e) formados pelos algarismos 4 e 9.

Comentários:
Queremos um conjunto que possua apenas um elemento. Vamos analisar cada uma das alternativas.

a) ao mesmo tempo, divisores de 4 e 9;
CERTO. O único número que é divisor, ao mesmo tempo de 4 e 9, **é o número 1**. Portanto, esse conjunto tem apenas um elemento e é considerado unitário.

b) divisores de 4;
ERRADO. São divisores de 4: $D(4) = \{1, 2, 4\}$. Note que **temos 3 elementos**, portanto, não é o conjunto unitário que estamos procurando.

c) divisores de 9;
ERRADO. São divisores de 9: $D(9) = \{1, 3, 9\}$. Note que **temos 3 elementos**, portanto, não é o conjunto unitário que estamos procurando.

d) maiores que 4 e menores que 9;
ERRADO. Se considerarmos apenas **os números inteiros entre 4 e 9**, vamos ter: $\{5, 6, 7, 8\}$. Portanto, está longe de ser o conjunto unitário que estamos procurando.

e) formados pelos algarismos 4 e 9.
ERRADO. Pessoal, **podemos formar infinitos números com os algarismos 4 e 9**. Entre eles, posso citar 49, 94, 449, 494, etc.

Gabarito: LETRA A.

4. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Conjunto é o nome dado, na Matemática, a qualquer coleção. Entretanto, uma coleção pode não ter elementos. Nesse caso, diz-se que esse é um conjunto vazio. Um exemplo de conjunto vazio é a coleção:
a) de meses do ano que começam pela letra J;
b) de dias da semana que começam pela letra T;
c) dos números que são, ao mesmo tempo, pares e ímpares;
d) dos números menores que 10 e maiores que 6;
e) das pessoas brasileiras que são casadas.

Comentários:

Vamos procurar uma coleção que não possua elementos. Devemos analisar alternativa por alternativa.

a) de meses do ano que começam pela letra J;
ERRADO. Temos vários meses que começam pela letra J: **Janeiro, Junho e Julho**.

b) de dias da semana que começam pela letra T;
ERRADO. Terça-feira é um dia da semana que começa pela letra T. Portanto, uma coleção formada por esses dias **não é vazia**.

c) dos números que são, ao mesmo tempo, pares e ímpares;
CERTO. Não existe nenhum número que seja ao mesmo tempo par ou ímpar. **Ou é ímpar, ou é par**. Portanto, um conjunto formado por esses números seria vazio.

d) dos números menores que 10 e maiores que 6;
ERRADO. Considerando apenas o conjunto dos inteiros, os números que são menores que 10 e maiores que 6 são: **7, 8 e 9**. Portanto, **não é um conjunto vazio**.

e) das pessoas brasileiras que são casadas.
ERRADO. Muitos brasileiros são casados. Portanto, **não seria um conjunto vazio**.

Gabarito: LETRA C.

5. (FGV/CODEBA/2010) Sejam $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 2, 4\}$ dois conjuntos. Com relação aos conjuntos A e B, analise as afirmativas a seguir:

I. $B \subset A$
II. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
III. $A \cap B = \{0, 2\}$

Está(ão) correta(s) somente
a) I.
b) II.
c) III.
d) I e II.
e) II e III.

Comentários:
Devemos analisar cada afirmativa.

I. $B \subset A$

ERRADO. Para que B estivesse contido em A, **todos os seus elementos também devem ser elementos de A**. Note que **B possui o elemento 4, enquanto A não possui**. Logo, B **não** pode estar contido em A.

II. $A \cup B \ = \{0,1,2,3,4\}$
CERTO. A união dos dois conjuntos é a **reunião de seus elementos**. Assim, quando juntamos "todo mundo", realmente ficamos com $A \cup B = \{0,1,2,3,4\}$.

III. $A \ \cap \ B \ = \{0,2\}$
CERTO. A intersecção é formada pelos **elementos em comum dos dois conjuntos**. Perceba que o 0 e o 2 são os elementos que estão nos dois conjuntos, ao mesmo tempo. Portanto, é correto dizer que $A \cap B = \ \{0,2\}$.

Gabarito: LETRA E.

6. (FGV/BADESC/2010) Dado um conjunto A, chamamos subconjunto próprio não vazio de A a qualquer conjunto que pode ser formado com parte dos elementos do conjunto A, desde que:

- algum elemento de A seja escolhido;
- não sejam escolhidos todos os elementos de A.

Sabemos que a quantidade de subconjuntos próprios não vazios de A é 14. A quantidade de elementos de A é igual a:
a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

Comentários:
Estudamos que o número de subconjuntos é dado por uma relação bem conhecida:

$$Número\ de\ Subconjuntos\ de\ B = 2^n$$

Aqui, n representa a quantidade de elementos de A. Por exemplo! Considere que $\boldsymbol{B = \{1, 2, 3, 4, 5\}}$**.** Nessa situação, **o conjunto A tem 5 elementos**, portanto, o número de subconjuntos seria:

$$Número\ de\ Subconjuntos\ de\ B = 2^n$$
$$Número\ de\ Subconjuntos\ de\ B = 2^5$$
$$Número\ de\ Subconjuntos\ de\ B = 32$$

Logo, A tem 32 subconjuntos. Agora, vamos entender a questão em si. O enunciado fala de subconjunto próprio. Esse subconjunto obedece duas propriedades.

- algum elemento de A seja escolhido;

Em outras palavras, o enunciado está dizendo que para ser um subconjunto próprio, o subconjunto não pode estar vazio, é preciso ter pelo menos um elemento.

- não sejam escolhidos todos os elementos de A.

Em outras palavras, o enunciado está dizendo que para ser um subconjunto próprio, o subconjunto não pode coincidir com o A.

Logo, se temos 14 subconjuntos próprios **devemos somar mais 2 subconjuntos, para obter a quantidade total, calculada pela fórmula**. Se A tem 14 subconjuntos próprios, então ele tem $14 + 2 =$ **16 subconjuntos ao total**. Assim,

$$Número\ de\ Subconjuntos\ de\ A = 2^n$$
$$16 = 2^n$$
$$n = 4.$$

Assim, A tem 4 elementos.

Gabarito: LETRA A.

7. (FGV/ALESP/2002) São dados os conjuntos: D = divisores de 24 (divisores positivos), M = múltiplos de 3 (múltiplos positivos), S = D ∩ M e n = números de subconjuntos de S. Portanto, n é igual a:

a) 64

b) 16

c) 32

d) 8

Comentários:

Vamos listar os divisores de 24:

$$D(24) = \{1, 2, \mathbf{3}, 4, \mathbf{6}, 8, \mathbf{12}, \mathbf{24}\}$$

Agora, vamos começar a listar os múltiplos positivos de 3.

$$M(3) = \{\mathbf{3}, \mathbf{6}, 9, \mathbf{12}, 15, 18, 21, \mathbf{24}, 27, 30, \dots\}$$

Note que já deixei marcado os **elementos em comum aos dois conjuntos**. Assim,

$$S = D \cap M = \{3, 6, 12, 24\}$$

Portanto, S tem 4 elementos. Na teoria, vimos que **o número de subconjuntos** de um conjunto é dado por:

$$Número\ de\ subconjuntos\ de\ S = 2^{n(S)}$$
$$Número\ de\ subconjuntos\ de\ S = 2^{4}$$
$$Número\ de\ subconjuntos\ de\ S = 16$$

Gabarito: LETRA B.

Questões Comentadas - FGV

União, Intersecção, Complementar e Diferença

1. (FGV/BANESTES/2023) Sejam A e B dois conjuntos finitos tais que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $\{1, 2, 5\}$ é o conjunto de elementos que estão em A e não estão em B. O conjunto dos elementos que não estão em A ou estão em B é

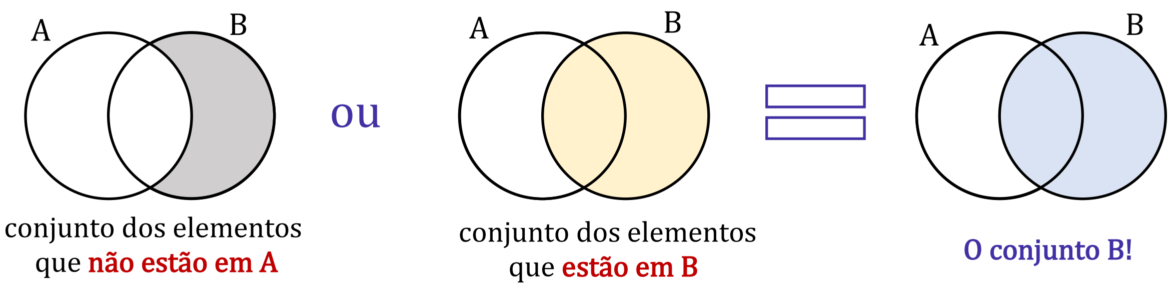
A) {3, 4}.
B) {3, 6}.
C) {3, 4, 6}.
D) {4, 6, 7}.
E) {3, 4, 6, 7}.

Comentários:

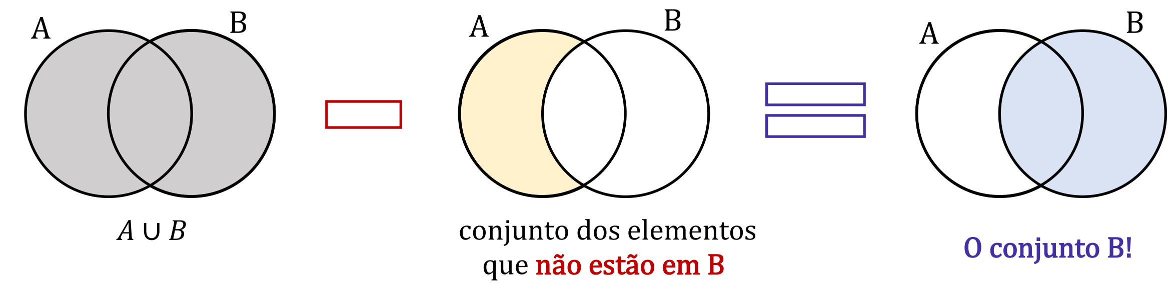
De acordo com o enunciado, temos que:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad\qquad A - B = \{1, 2, 5\}$$

A questão pede **o conjunto dos elementos que não estão em A ou estão em B**. Como estamos falando da união de um **subconjunto de B** com **o próprio B**, **o conjunto pedido é o próprio B**. Vamos esquematizar.



Observe que para encontrar o B, podemos fazer:



Sendo assim, para encontrar B, basta retirarmos da união aqueles elementos que estão apenas em A!

$$A \cup B = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 3, 4, \mathbf{5}, 6, 7\}$$

$$A - B = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{5}\}$$

Isso resulta em:

$$\boxed{\boldsymbol{B = \{3, 4, 6, 7\}}}$$

Gabarito: LETRA E.

2. (FGV/SSP-AM/2022) Sobre dois conjuntos A e B sabe-se que:

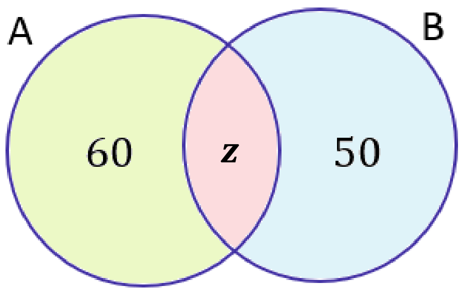
- A união de A e B tem 130 elementos.
- A diferença B – A tem 50 elementos.
- A diferença A – B tem 60 elementos.

Sendo x o número de elementos de A e y o número de elementos de B, o valor de x + y é igual a
A) 110.
B) 120.
C) 130.
D) 140.
E) 150.

Comentários:
Primeiramente, vamos relembrar o que significa os conjuntos diferenças apontados no enunciado.

1) $B - A$ é o conjunto formado por **todos os elementos de B que não são elementos de A**.
2) Analogamente, $A - B$ é o conjunto formado por **todos os elementos de A que não são elementos de B**.

Agora, visualize esses conjuntos para melhor compreensão.



O conjunto $A - B$ está representado pela região verde. Note que é **tudo de $\boldsymbol{A}$ menos a parte vermelha**. Essa parte vermelha **representa os elementos de A que também são elementos de $\boldsymbol{B}$**, ou seja, a intersecção dos dois conjuntos. Por sua vez, a região azul representa o conjunto $B - A$.

Observe que já colocamos as quantidades de cada desses conjuntos. Como não sabemos quantos elementos pertencem a A e a B **simultaneamente**, então vamos chamar essa quantidade de "z". O enunciado nos diz que a união desses dois conjuntos possui **130 elementos**. Na prática, isso significa que se **somamos todas as regiões** destacadas no diagrama de Venn acima, então **devemos** obter esses 130 elementos.

$$60 + z + 50 = 130 \quad \rightarrow \quad z = 130 - 110 \quad \rightarrow \quad \boxed{z = 20}$$

Pronto, temos "z". Com ele, podemos determinar quantos elementos possui cada um dos conjuntos.

$$n(A) = 60 + z \quad \rightarrow \quad n(A) = 60 + 20 \quad \rightarrow \quad \boxed{n(A) = 80}$$

$$n(B) = 50 + z \quad \rightarrow \quad n(B) = 50 + 20 \quad \rightarrow \quad \boxed{n(B) = 70}$$

Gabarito: LETRA E.

3. (FGV/SEFAZ-MS/2006) Os conjuntos A, B e C satisfazem $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$:

a) nunca.

b) se e somente se A = B = C.

c) se e somente se B = C.

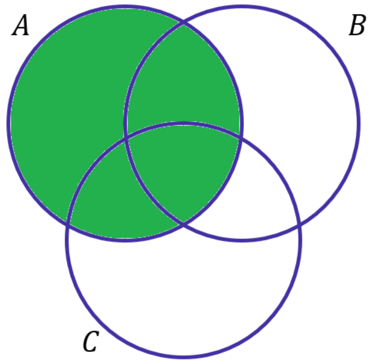
d) se e somente se B ∩ C = ∅.

e) sempre.

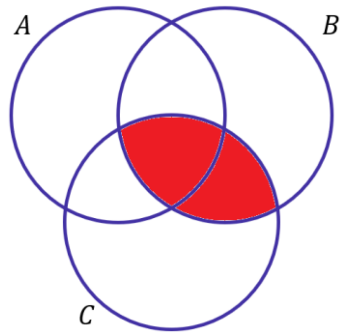
Comentários:

Na minha opinião, o melhor jeito de resolver essas questões é desenhando o diagrama. Vamos primeiros identificar o que significa cada lado da equação:

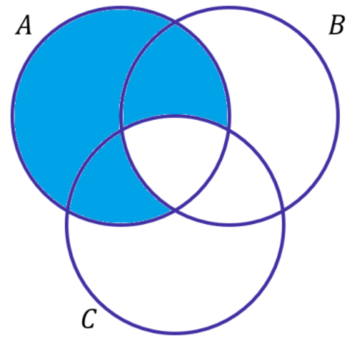
- $A - (B \cap C)$: Elementos de A que não são elementos da intersecção de B com C.



Conjunto A

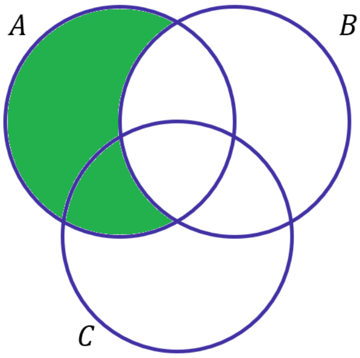


Conjunto $B \cap C$

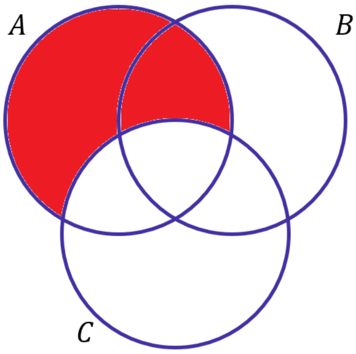


Conjunto $A - (B \cap C)$

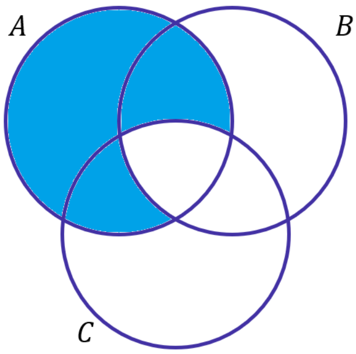
- $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C})$**:** Elementos de A que não são elementos de B ou Elementos de A que não elementos de C.



Conjunto $A - B$



Conjunto $A - C$



Conjunto $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C})$

Quando desenhamos as duas regiões, percebemos que elas são iguais. Logo, a igualdade é sempre verdade.

Gabarito: LETRA E.

4. (FGV/SEFAZ-MS/2006) Se X, Y e Z são conjuntos, $\boldsymbol{X} \cap (\boldsymbol{Y} \cup \boldsymbol{Z}) = (\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y}) \cup \boldsymbol{Z}$:

a) nunca.

b) se e somente se X = Y = Z.

c) se e somente se $Z \subset X$

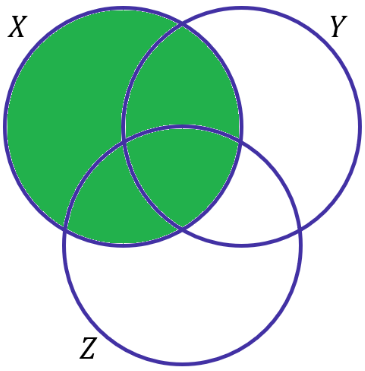
d) se e somente se $Z \subset Y$

e) sempre.

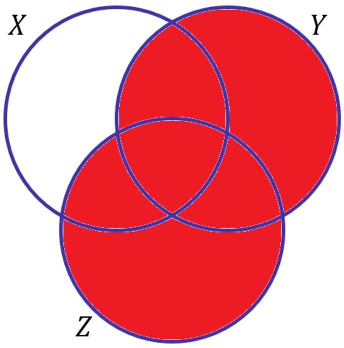
Comentários:

Novamente, vamos recorrer aos diagramas. No entanto, primeiro devemos entender o que cada uma das regiões expressa.

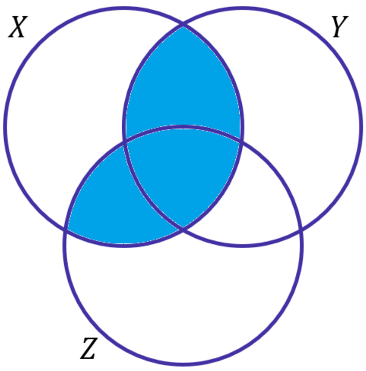
- $\boldsymbol{X} \cap (\boldsymbol{Y} \cup \boldsymbol{Z})$: Elementos que X tem em comum com a união de Y e Z.



Conjunto X

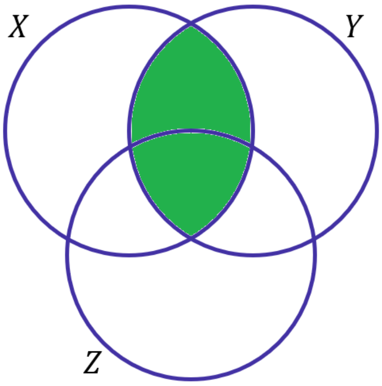


Conjunto $Y \cup Z$

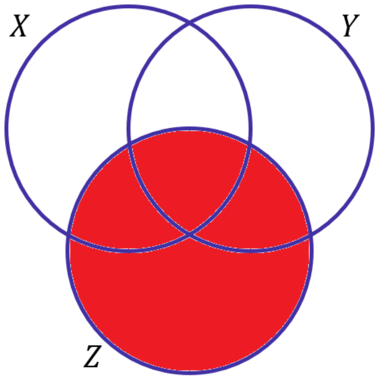


Conjunto $\boldsymbol{X} \cap (\boldsymbol{Y} \cup \boldsymbol{Z})$

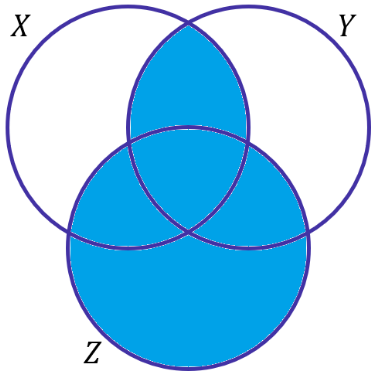
- $(\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y}) \cup \boldsymbol{Z}$**:** Elementos de $X \cap Y$ reunidos com os elementos de Z.



Conjunto $X \cap Y$

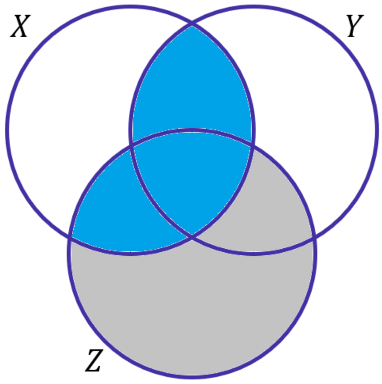


Conjunto Z



Conjunto $(\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y}) \cup \boldsymbol{Z}$

Dessa vez, as regiões que desenhamos não ficaram iguais. Mas, o que devemos fazer para que elas fiquem? Ora devemos retirar toda a região diferente:



Nessa situação, percebemos que **não podem haver elementos de Z que não sejam elementos de X**. O que implica que Z deve ser um subconjunto de X.

Gabarito: LETRA C.

Questões Comentadas - FGV

Princípio da Inclusão-Exclusão

1. (FGV/CÂMARA DOS DEPUTADOS/2023) Dra. Míriam é a responsável pelo atendimento psicológico de 97 estudantes de uma escola, às segundas, quartas e sextas. Há 21 estudantes que só procuram a Dra. Míriam na segunda-feira, 20 que só comparecem às quartas e 17 que só vão às sextas. Dra. Míriam atende 48 estudantes às segundas, 53 às quartas e 43 às sextas. O número de estudantes que são atendidos três vezes por semana é igual a

A) 7.

B) 8.

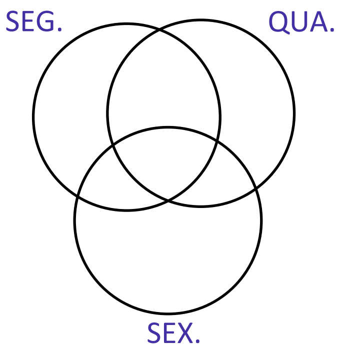
C) 9.

D) 10.

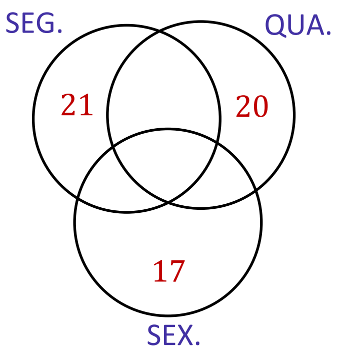
E) 11.

Comentários:

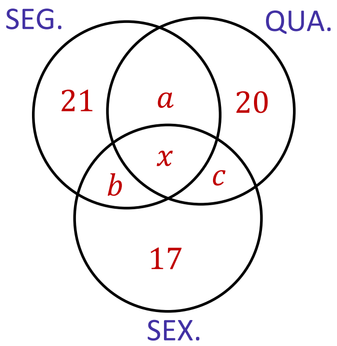
Organizaremos as informações da questão em um diagrama de Venn.



Como há **21 estudantes** que só procuram a Dra. Míriam na **segunda-feira**, **20** que só comparecem às **quartas** e **17** que só vão às **sextas**, podemos escrever:



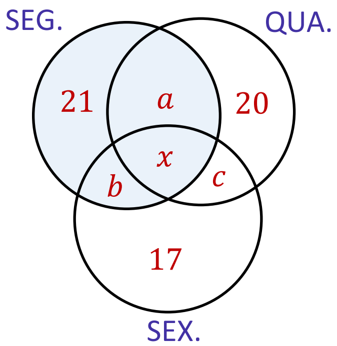
Como nenhuma informação foi dada sobre as intersecções, vamos colocar incógnitas.



Queremos determinar o "x", pois ele retrata justamente a quantidade de estudantes que são atendidos três vezes na semana. Agora, com o diagrama pré-esquematizado, vamos para as próximas informações dadas pelo enunciado:

- Dra. Míriam atende 48 estudantes às segundas.

Nesse caso, somamos todas as quantidades dentro de "SEG" e igualamos a 48.



$$21 + a + b + x = 48 \quad \rightarrow \quad a + b + x = 27 \qquad (1)$$

Vamos repetir esse raciocínio sabendo que a Dra. Mirian atende **53 às quartas e 43 às sextas:**

$$20 + a + c + x = 53 \quad \rightarrow \quad a + c + x = 33 \qquad (2)$$

$$17 + b + c + x = 43 \quad \rightarrow \quad b + c + x = 26 \qquad (3)$$

Por fim, o enunciado ainda fala que **a quantidade de alunos atendidos é 97**. Dessa forma, a soma de todas as quantidades no diagrama deve resultar nesse número.

$$21 + a + b + x + 21 + c + 17 = 97 \quad \rightarrow \quad x + (a + b + c) = 39 \qquad (4)$$

Observe que temos **4 equações e 4 incógnitas**.

Para resolver esse sistema, vamos somar as equações (1), (2) e (3).

$$(a+b+x)+(a+c+x)+(b+c+x)=27+33+26$$

$$2(a+b+c)+3x=86 \qquad (5)$$

Da equação (4), podemos tirar que:

$$(a+b+c)=39-x$$

Vamos substituir esse resultado em (5):

$$2(39-x)+3x=86$$

$$78-2x+3x=86$$

$$x=86-78$$

$$\boxed{x=8}$$

Logo, temos **oito estudantes que são atendidos 3 vezes na semana**.

Gabarito: LETRA B.

2. (FGV/PM-SP/2023) Em um conjunto de 20 objetos, 12 têm a característica A e 9 têm a característica B. Apenas 3 dos objetos não possuem nem a característica A, nem a característica B. Assim, a quantidade de objetos desse conjunto que possuem simultaneamente as características A e B é igual a

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.

Comentários:

Se **12 objetos têm a característica A**, podemos escrever:

$$n(A)=12$$

Se **9 objetos têm a característica B**, então:

$$n(B) = 9$$

Nesse conjunto de 20 objetos, **3 não possuem nenhuma dessas duas características**. Sendo assim:

$$n(A \cup B) = 20 - 3 \qquad \rightarrow \qquad n(A \cup B) = 17$$

Pronto. Agora, para determinar quantos objetos **possuem as duas características simultaneamente**, vamos usar o **princípio da inclusão-exclusão**:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Substituindo o que temos:

$$17 = 12 + 9 - n(A \cap B)$$

$$\boxed{n(A \cap B) = 4}$$

Gabarito: LETRA D.

3. (FGV/MPE-SP/2023) Em um grupo de 55 pessoas, 32 jogam pôquer, 36 jogam truco, 34 jogam buraco, 18 jogam pôquer e truco, 21 jogam truco e buraco e 20 jogam buraco e pôquer. Se há, no grupo, uma única pessoa que não joga quaisquer desses três jogos de cartas, então a quantidade de pessoas que jogam esses três jogos é

A) 12.

B) 11.

C) 9.

D) 7.

E) 6.

Comentários:

Mais uma questão para usarmos o Princípio da Inclusão-Exclusão! Dessa vez, usaremos três conjuntos. Antes de qualquer coisa, vamos **organizar as informações** do enunciado.

32 pessoas jogam pôquer: $n(P) = 32$

36 pessoas jogam truco: $n(T) = 36$

34 pessoas jogam buraco: $n(B) = 34$

18 pessoas jogam pôquer e truco: $n(P \cap T) = 18$

21 pessoas jogam truco e buraco: $n(T \cap B) = 21$

20 pessoas jogam buraco e pôquer: $n(B \cap P) = 20$

Como do grupo de 55 pessoas **apenas uma não joga nenhum dos jogos**, podemos escrever:

$$n(P \cup T \cup B) = 55 - 1 \qquad \rightarrow \qquad n(P \cup T \cup B) = 54$$

Agora, podemos **usar o PIE** para determinar quantos jogam os três jogos.

$$n(P \cup T \cup B) = n(P) + n(T) + n(B) - n(P \cap T) - n(T \cap B) - n(B \cap P) + n(P \cap T \cap B)$$

Substituindo o que temos:

$$54 = 32 + 36 + 34 - 18 - 21 - 20 + n(P \cap T \cap B)$$

$$54 = 43 + n(P \cap T \cap B)$$

$$\boxed{n(P \cap T \cap B) = 11}$$

Gabarito: LETRA B.

4. (FGV/SEFAZ-MG/2023) Sobre 3 conjuntos A, B e C, sabe-se que:

A tem 16 elementos;
B tem 24 elementos;
C tem 18 elementos;
$A \cap B$ tem 5 elementos;
$B \cap C$ tem 7 elementos;
$A \cap B \cap C$ tem 3 elementos;
$A - (B \cup C)$ tem 8 elementos.

O número de elementos do conjunto $A \cup B \cup C$ é igual a

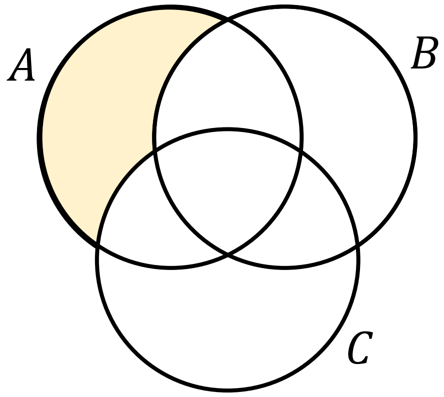
a) 35.
b) 43.
c) 47.
d) 48.
e) 58.

Comentários:

Questão bem legal sobre conjuntos que nos remete ao **Princípio da Inclusão-Exclusão**.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Perceba que **a única informação que não temos é $\boldsymbol{n(A \cap C)}$**. Todas as outras informações o enunciado deu! Ademais, o enunciado nos forneceu $n\big(A - (B \cup C)\big)$. Certamente será com esse valor que encontraremos o que nos falta. Para entender como isso vai nos ajudar, vamos desenhar o conjunto $A - (B \cup C)$.



Note que o conjunto $A - (B \cup C)$ é formado por **todos os elementos de A que não são elementos da união de B com C**. É exatamente a região destacada **em amarelo** na figura acima. Logo, perceba que:

$$n\big(A - (B \cup C)\big) = n(A) - n(A \cap C) - n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C)$$

Muito cuidado na hora de escrever a expressão acima. Muitos alunos podem achar que:

$$n\big(A - (B \cup C)\big) = n(A) - n(B \cup C) \quad \times$$

Mas está errado! A expressão correta é:

$$\boxed{n\big(A - (B \cup C)\big) = n(A) - n(A \cap C) - n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C)}$$

Nós devemos retirar de A apenas o que ele tem em comum com B e C.

Professor, qual motivo de somar o $n(A \cap B \cap C)$?

Pessoal, devemos somar o $n(A \cap B \cap C)$ pois caso exista um elemento que seja comum aos três conjuntos, quando fazemos "$-n(A \cap C) - n(A \cap B)$" **retiramos ele duas vezes**! Sendo assim, devemos "devolver" esses elementos retirados mais de uma vez. Fazemos isso somando o $n(A \cap B \cap C)$.
Esclarecido esses pontos, observe que a expressão contém exatamente o que estamos procurando.

$$n\big(A - (B \cup C)\big) = n(A) - \boldsymbol{n(A \cap C)} - n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C)$$

Ademais, temos todos os outros valores. Vamos substituí-los na expressão.

$$8 = 16 - n(A \cap C) - 5 + 3$$

$$n(A \cap C) = 14 - 8$$

$$n(A \cap C) = 6$$

Pronto! Agora sim temos tudo que precisamos para usar o **Princípio da Inclusão-Exclusão**.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \cup B \cup C) = 16 + 24 + 18 - 5 - 7 - 6 + 3$$

$$n(A \cup B \cup C) = 61 - 18$$

$$\boxed{\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = 43}}$$

Gabarito: Letra B

5. (FGV/SENADO FEDERAL/2022) Um clube tem 180 associados que participam de suas duas atividades sociais. Há 130 frequentadores da cinemateca, enquanto 92 sócios participam das aulas de dança de salão. Sendo assim, é correto afirmar que

a) mais de 40 sócios participam das duas atividades.
b) menos de 30 sócios participam das duas atividades.
c) mais de 55 sócios só vão às aulas de dança.
d) menos de 80 sócios só vão à cinemateca.
e) menos de 45 sócios só vão às aulas de dança.

Comentários:

Para responder essa questão, vamos usar o Princípio da Inclusão-Exclusão. Seja “C” o conjunto formado por aqueles que frequentam a cinemateca e “D” o conjunto formado por aqueles que participam da dança de salão. Como **180 associados participam de alguma dessas duas atividades**, podemos escrever:

$$n(C \cup D) = 180$$

Por sua vez, como **130 frequentam a cinemateca**:

$$n(C) = 130$$

Sabemos ainda que **92 frequentam a dança de salão**:

$$n(D) = 92$$

Do **Princípio da Inclusão-Exclusão**, podemos escrever que:

$$n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D)$$

Substituindo o que temos:

$$180 = 130 + 92 - n(C \cap D)$$

$$n(C \cap D) = 222 - 180$$

$$n(C \cap D) = 42$$

Logo, podemos concluir que **42 sócios participam das duas atividades**. A alternativa que está de acordo com o nosso resultado é a A.

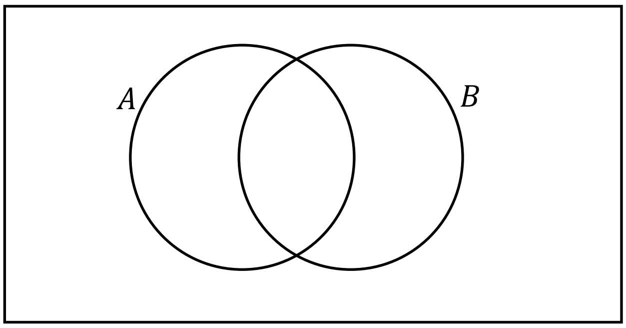
Gabarito: LETRA A.

6. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Em uma assembleia com 172 votantes, duas propostas independentes, A e B, foram colocadas em votação. Cada votante votou a favor ou contra cada uma das duas propostas. Sabe-se que 138 votaram a favor da proposta A, 74 votaram a favor da proposta B e 32 votaram contra as duas propostas. O número de votantes que votaram a favor da proposta A e contra a proposta B é

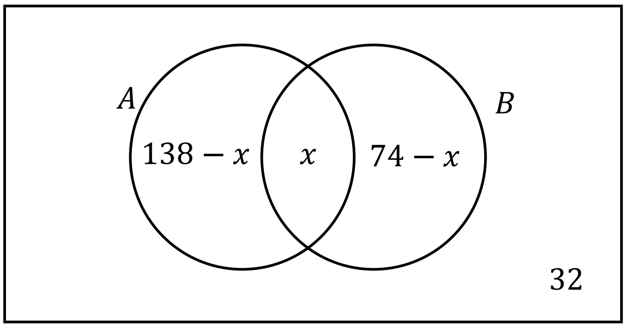
a) 66.
b) 69.
c) 72.
d) 74.
e) 140.

Comentários:

Vamos resolver essa questão usando **Diagramas de Venn**. Como temos duas propostas:



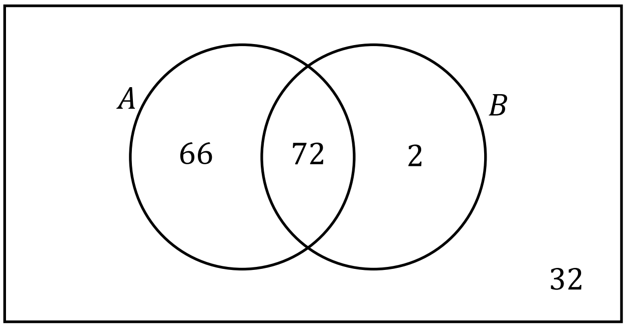
Com o **diagrama pré-esquematizado**, vamos inserir as informações do enunciado.



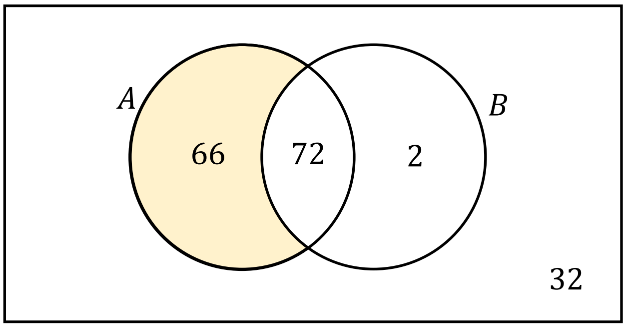
Vou explicar melhor o diagrama acima! Observe que o enunciado não falou quantos votaram a favor das duas propostas. Sendo assim, coloquei **o "x" na intersecção dos conjuntos**. Ademais, como sabemos que 32 votou contra as duas propostas, deixei essa quantidade fora de A e B, mas ainda dentro do universo dos votantes. Por fim, devemos saber que, após organizar essas regiões, a soma de todas as quantidades deve **resultar nos <u>172 votantes</u>** da assembleia.

$$(138 - x) + x + (74 - x) + 32 = 172 \quad \rightarrow \quad 244 - x = 172 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 72}$$

Pronto, com o valor de "x", vamos complementar o diagrama.



Como o enunciado quer **o número de votantes a favor de A e contra B**, então queremos a seguinte região:



Gabarito: LETRA A.

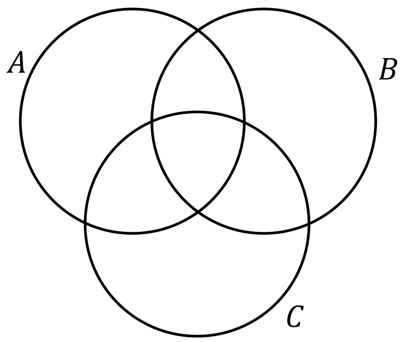
7. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) A prefeitura de certo município formou com seus funcionários 3 comissões para examinar assuntos diferentes. Sabe-se que:

- há funcionários que participam de mais de uma comissão.
- cada comissão é formada por 15 funcionários.
- em cada comissão há 5 funcionários que não participam de mais nenhuma outra comissão.
- há 2 funcionários que participam das três comissões.

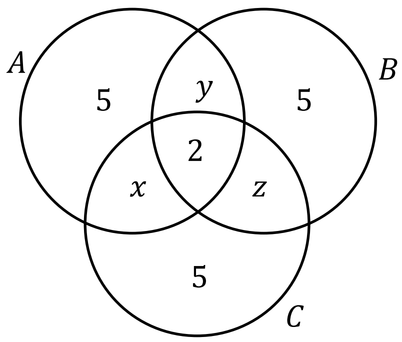
O número de funcionários que participam de, pelo menos, uma comissão é igual a
a) 29.
b) 31.
c) 36.
d) 39.
e) 43.

Comentários:
Como são três comissões, vamos chamá-las de "A", "B" e "C".

▪



Agora, vamos inserir no diagrama algumas informações que a questão passou.



As informações que usamos foram: (i) **em cada comissão há 5 funcionários que não participam de mais nenhuma outra comissão;** e (ii) **há 2 funcionários que participam das três comissões.**

Nas intersecções duplas, colocamos as incógnitas "x", "y" e "z" pois nada conseguimos afirmar no momento sobre elas. Agora, vamos usar a seguinte informação: **cada comissão é composta por 15 funcionários**. Com isso, podemos equacionar:

$$5+x+y+2=15 \quad \rightarrow \quad x+y=8$$

$$5+x+z+2=15 \quad \rightarrow \quad x+z=8$$

$$5+z+y+2=15 \quad \rightarrow \quad z+y=8$$

Agora, vamos somar as três equações acima, membro a membro.

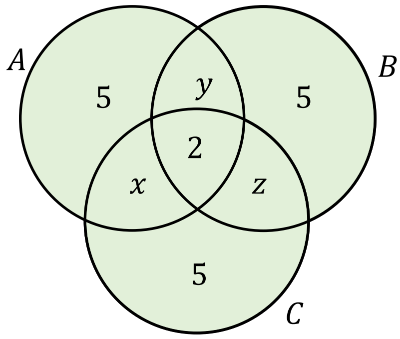
$$(x+y)+(x+z)+(z+y)=24$$

$$2\cdot(x+y+z)=24$$

$$x+y+z=12$$

Professor, o que vamos fazer com essa soma?

Galera, vamos lá! Observe que o enunciado pede o número de funcionários **que participam de <u>pelo menos uma</u> comissão**. Isso compreende tudo que está dentro dos diagramas.



Sendo assim, o que estamos procurando é:

$$T=5+5+5+2+x+y+z \quad \rightarrow \quad T=17+x+y+z$$

Podemos usar a soma "$x+y+z$" que determinamos anteriormente.

$$T=17+12 \quad \rightarrow \quad \boxed{T=29}$$

Gabarito: LETRA A.

8. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Uma empresa disponibilizou 3 cursos de aperfeiçoamento para seus funcionários: o Curso A, o Curso B e o Curso C. Como o horário permitia, cada funcionário poderia se matricular em mais de um curso. Terminado o prazo de matrículas, verificou-se que 8 funcionários se matricularam no curso A, 10 no curso B e 12 no curso C. Havia 4 funcionários matriculados nos cursos A e B, 4 funcionários nos cursos B e C e, também, 4 nos cursos A e C. Sabe-se ainda que há 1 único funcionário matriculado apenas no curso A. O número de funcionários que estão matriculados em ao menos 1 curso é

a) 19.

b) 21.

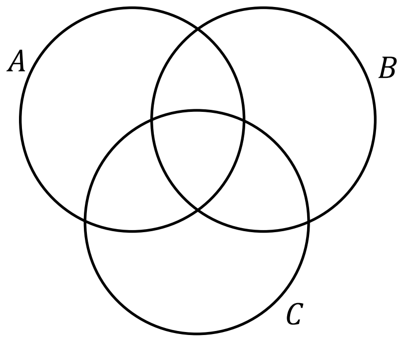
c) 23.

d) 27.

e) 30.

Comentários:

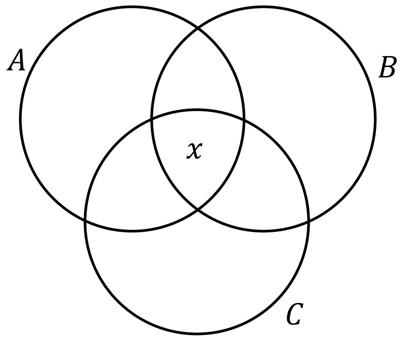
Vamos resolver esse exercício usando apenas **os Diagramas de Venn**! O primeiro passo é desenhá-los.



Nesse momento, devemos inserir as informações que possuímos. Ressalto que **essas informações <u>não</u> podem ser colocadas de qualquer forma no diagrama**. Existe uma ordem que deve ser observada! Começamos inserindo a quantidade referente à intersecção tripla, depois colocamos aquelas referentes às intersecções duplas e, por fim, aquelas referentes aos conjuntos isoladamente.

Professor, o enunciado não falou quantos alunos se matricularam nos três cursos!

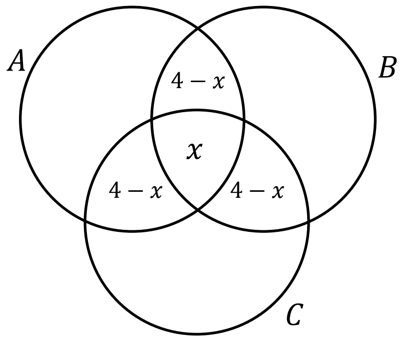
Então vamos chamar essa quantidade de “x”.



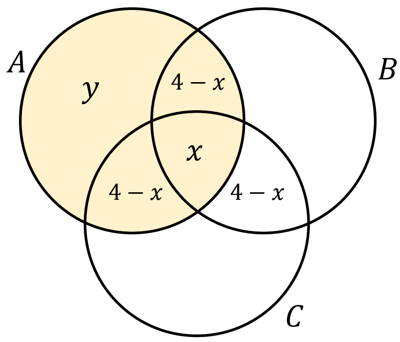
Agora, vamos para as **intersecções <u>duplas</u>**. O enunciado nos disse que:

- 4 funcionários matriculados nos cursos A e B;
- 4 funcionários nos cursos B e C;
- 4 funcionários nos cursos A e C.

No diagrama, ficamos:



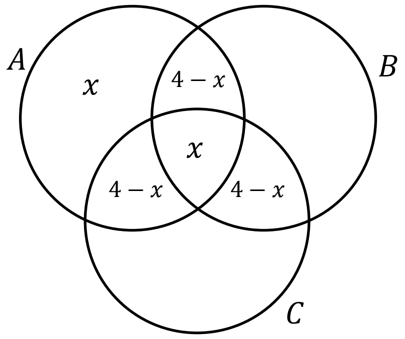
Por fim, vamos analisar as informações sobre cada conjunto. Esse momento é mais delicado! Note que devemos ter 8 funcionários em A. No nosso desenho até agora, temos:



Queremos determinar o "y" para preencher o diagrama. Devemos somar tudo dentro de A e igualar a 8, pois **A deve ter 8 funcionários matriculados** (conforme informado na questão).

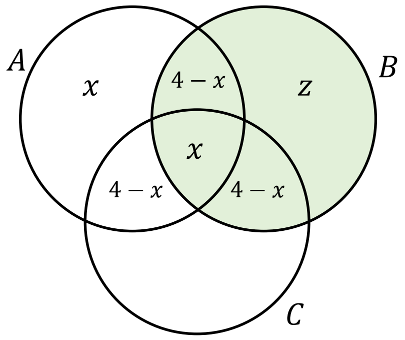
$$(4 - x) + x + (4 - x) + y = 8 \quad \rightarrow \quad y = x$$

Com isso:



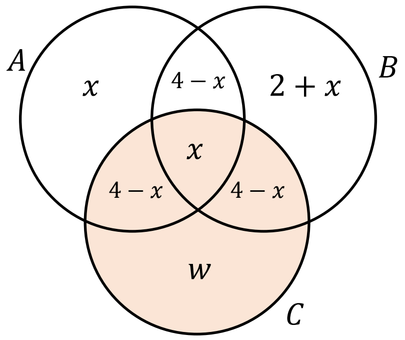
Vamos seguir esse mesmo raciocínio para as demais regiões que ainda faltam.

- 10 funcionários no curso B:



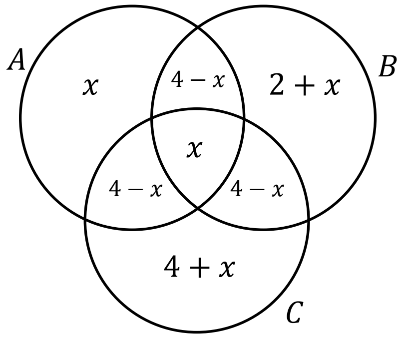
$$(4 - x) + x + (4 - x) + z = 10 \quad \rightarrow \quad z = 2 + x$$

- 12 funcionários no curso C:



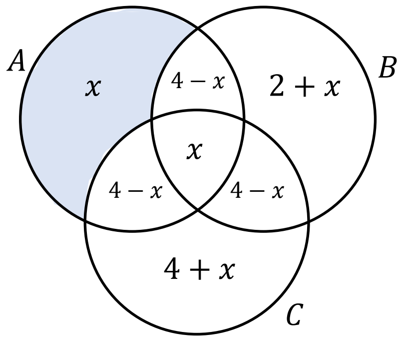
$$(4 - x) + x + (4 - x) + w = 12 \quad \rightarrow \quad w = 4 + x$$

Pronto! Temos nosso diagrama esquematizado e preenchido!



Agora vem uma informação superimportante: **há 1 único funcionário matriculado apenas no curso A.**

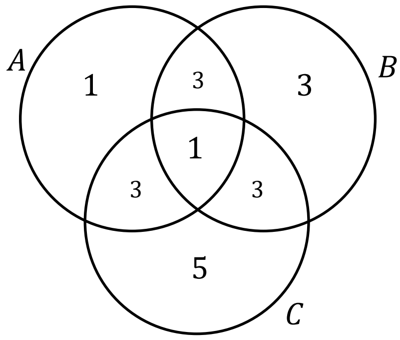
Qual região do diagrama representa exatamente esse grupo?



Logo,

$$x = 1$$

Com o valor de “x”, podemos usá-lo em todo diagrama.



Como a questão pede o número de funcionários matriculados **em <u>pelo menos um</u> curso**, basicamente queremos a soma dos valores em todas as regiões.

$$T = 1 + 3 + 1 + 3 + 3 + 3 + 5 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{T = 19}}$$

Gabarito: LETRA A.

9. (FGV/SEJUSP-MG/2022) Um grupo de 60 estudantes que se formaram juntos no Ensino Médio resolveu formar 2 grupos no WhatsApp: GP1 e GP2. Sabe-se que dos 60 estudantes, 7 resolveram não participar do GP1 nem do GP2 e que os números de participantes do GP1 e do GP2 são, respetivamente, 41 e 32. O número de estudantes que participam simultaneamente dos dois grupos é

a) 7.
b) 13.
c) 20.
d) 23.
e) 32.

Comentários:

Vamos aproveitar essa questão para treinar um pouco a fórmula do Princípio da Inclusão-Exclusão. Inicialmente, note que temos 60 estudantes, mas **7 deles não participaram de qualquer dos grupos**. Com isso, podemos escrever que:

$$n(GP1 \cup GP2) = 60 - 7 \qquad \rightarrow \qquad n(GP1 \cup GP2) = 53$$

Além disso, como o número de participantes dos grupos GP1 e GP2 são, respectivamente, **41 e 32**, então:

$$n(GP1) = 41 \qquad e \qquad n(GP2) = 32$$

Pronto! Agora, vamos escrever a fórmula.

$$n(GP1 \cup GP2) = n(GP1) + n(GP2) - n(GP1 \cap GP2)$$

A questão pede o número de estudantes que participam **<u>simultaneamente</u>** dos dois grupos. Logo, queremos determinar $n(GP1 \cap GP2)$. Para isso, vamos **substituir** as informações que temos na fórmula acima.

$$53 = 41 + 32 - n(GP1 \cap GP2)$$

$$n(GP1 \cap GP2) = 73 - 53$$

$$\boxed{\boldsymbol{n(GP1 \cap GP2) = 20}}$$

Gabarito: LETRA C.

10. (FGV/SEJUSP-MG/2022) Os conjuntos A, B e C possuem, cada um, 10 elementos e são tais que: A e B possuem elementos em comum, B e C possuem elementos em comum, mas A e C não possuem elementos comuns. Entre os elementos da união dos três conjuntos sabe-se que 8 elementos pertencem apenas ao conjunto A e 5 elementos pertencem apenas ao conjunto C. O número de elementos que pertencem apenas ao conjunto B é

a) 1.

b) 2.

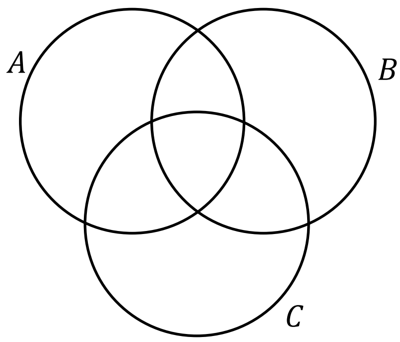
c) 3.

d) 4.

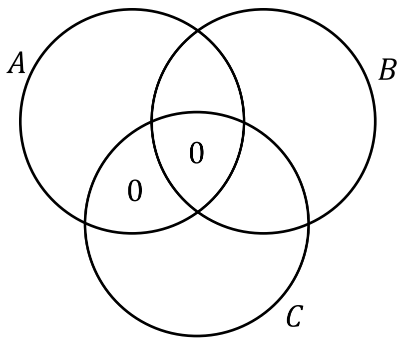
e) 5.

Comentários:

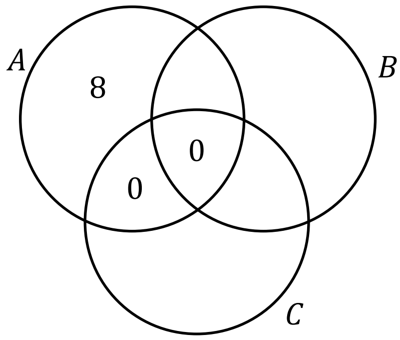
Questão boa, vamos resolvê-la utilizando diagramas. Para começar, temos:



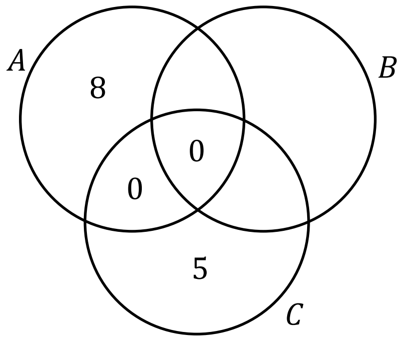
Ora, **se A e C <u>não</u> possuem elementos <u>em comum</u>**, já podemos escrever:



Como **8 elementos pertencem <u>apenas</u> ao conjunto A**:

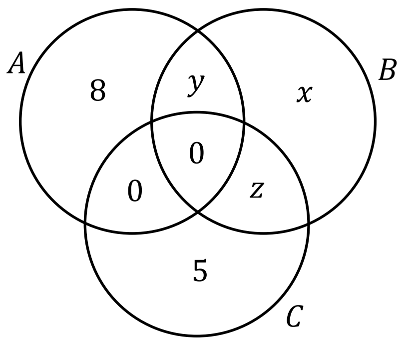


Ainda, sabemos que **5 elementos pertencem apenas ao conjunto C**:



Pronto, esse é o diagrama inicial que conseguimos desenhar com as informações que o enunciado passou.

Agora, nas regiões que não temos informações, vamos colocar algumas **incógnitas**.



Observe que a questão pede o número de elementos que pertencem **apenas ao conjunto B**. No nosso diagrama, esse número corresponde a "x". Para encontrá-lo, vamos usar a informação que **cada conjunto possui 10 elementos**. Sendo assim, podemos escrever que:

$$8 + y + 0 + 0 = 10 \quad \rightarrow \quad 8 + y = 10 \quad \rightarrow \quad y = 2$$

$$5 + z + 0 + 0 = 10 \quad \rightarrow \quad 5 + z = 10 \quad \rightarrow \quad z = 5$$

$$x + y + z + 0 = 10 \quad \rightarrow \quad x + 2 + 5 = 10 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 3}$$

Gabarito: LETRA C.

11. (FGV/SEFAZ-ES/2022) Em um grupo de 70 pessoas, há 50 capixabas e 40 torcedores do Vasco. Em relação a esse grupo de pessoas, é correto concluir que

A) no máximo 20 são capixabas torcedores do Vasco.

B) no mínimo 20 não são nem capixabas nem torcedores do Vasco.

C) exatamente 30 são capixabas não torcedores do Vasco.

D) no máximo 40 são capixabas torcedores do Vasco.

E) é possível que nenhuma delas seja capixaba torcedor do Vasco.

Comentários:

Galera, esse tipo de questão está **muito comum** nas provas da FGV. Logo, preste bem atenção no que desenvolveremos aqui! Vou resolver de duas formas com vocês, ok? Uma forma mais **qualitativa** e outra forma usando **diagramas**. Inicialmente, vamos perceber o seguinte:

1) São 70 pessoas. 50 são capixabas. Logo, teremos **20 pessoas que não são capixabas**.

2) São 70 pessoas. 40 torcedores do Vasco. Logo, teremos **30 pessoas que não são torcedoras do Vasco**.

Beleza até aqui, pessoal?!

Agora, imagine que você queira saber a quantidade máxima de pessoas **não são capixabas e não são torcedoras do Vasco**.

Essa situação extrema aconteceria se todas as 20 pessoas que não são capixabas também não torcessem para o Vasco. Logo, nosso "máximo" procurado é 20 pessoas. Guarde essa conclusão**: no máximo, podemos ter 20 pessoas que não são capixabas nem torcedores do Vasco**.

Da mesma forma, imagine que você queira saber o oposto do que vimos acima. No caso, seria a quantidade máxima de pessoas que **são capixabas e torcem para o Vasco**.

Essa outra situação extrema aconteceria se todos os 40 torcedores do Vasco também fossem capixabas. É importante perceber que o **"40" é o número limitante aqui**. Note que não poderíamos ter que todos os 50 capixabas fossem torcedores do Vasco, pois o enunciado é claro ao informar que são apenas 40 torcedores do Vasco.

Com essas duas observações, vamos comentar as alternativas.

A) no máximo 20 são capixabas torcedores do Vasco.
Errado. Podemos ter até 40 capixabas torcedores do Vasco.

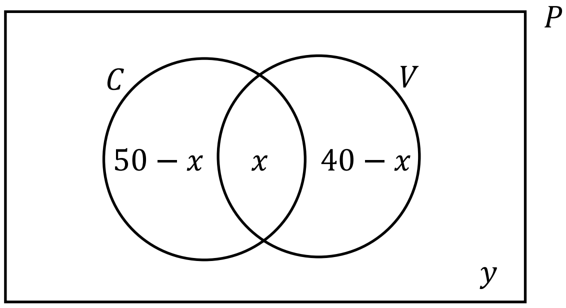
B) no mínimo 20 não são nem capixabas nem torcedores do Vasco.
Errado. O correto seria "no máximo" ao invés de "no mínimo".

C) exatamente 30 são capixabas não torcedores do Vasco.
Errado. O enunciado não fornece informações suficientes para concluirmos "exatamente". Com o que foi passado, podemos apenas fazer considerações sobre quantidades máximas e/ou mínimas.

D) no máximo 40 são capixabas torcedores do Vasco.
Correto, foi uma das conclusões que chegamos com a resolução do exercício.

E) é possível que nenhuma delas seja capixaba torcedor do Vasco.
Errado. Isso seria verdade se a soma das duas quantidades fosse inferior a 70.

Feita essa primeira resolução, vamos desenhar uns diagramas para entender o problema sobre um outro ângulo!



"C" é o conjunto dos capixabas, "V" é o conjunto dos torcedores do Vasco, "P" é o conjunto formado por todas as 70 pessoas (é **o conjunto universo**). Além disso, temos que "x" denota todas as pessoas que são capixabas e torcem para o Vasco. Por sua vez, "y" é exatamente o contrário, ele denota a quantidade de pessoas que não são capixabas e não são torcedores do Vasco.

Como o enunciado falou que **o total de pessoas é 70**, quando somamos todas essas quantidades destacadas nos diagramas, devemos ter exatamente essas 70 pessoas.

$$(50 - x) + x + (40 - x) + y = 70 \quad \rightarrow \quad y - x = 20 \quad \rightarrow \quad x = 20 + y$$

Note que "x" é tanto maior quanto for "y". Assim, quando "y" for máximo "x" também será.

No começo da solução vimos que **a quantidade máxima de pessoas que não podem ser capixabas nem torcerem para o Vasco é 20**. Sendo assim, o valor máximo para "x", que é a quantidade de pessoas que são capixabas e torcedoras do Vasco é de:

$$x_{max} = 20 + y_{max} \quad \rightarrow \quad x_{max} = 20 + 20 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_{max} = 40}$$

Logo, no máximo, **podemos ter 40 pessoas que são capixabas e torcedoras do Vasco**.

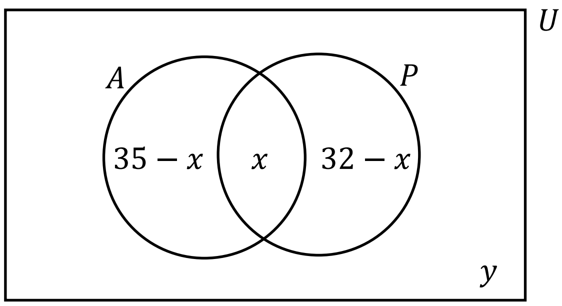
Gabarito: LETRA D.

12. (FGV/MPE-GO/2022) Em um grupo de 48 pessoas, há 35 advogados e 32 policiais. Nesse grupo, o número mínimo de pessoas que são ao mesmo tempo advogados e policiais é

A) 13.
B) 16.
C) 19.
D) 32.
E) 35.

Comentários:

Essa questão parece com a anterior, não é verdade? Vamos resolvê-la usando diagramas.



Nessa questão, "A" representa o conjunto dos advogados, "P" o conjunto dos policiais e "U" é o nosso conjunto universo (*compreende todas as 48 pessoas*). Ademais, **"x" representa a quantidade de advogados que também são policiais** e **"y" é a quantidade de pessoas que não são advogados nem policiais**. Quando somamos todas as quantidades destacadas no nosso diagrama, devemos obter as 48 pessoas.

$$(35 - x) + x + (32 - x) + y = 48 \quad \rightarrow \quad y - x = -19 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = y + 19}$$

Observe que encontramos uma relação entre "x" e "y".

A questão pede o valor mínimo de pessoas que são ao mesmo tempo advogadas e policiais, ou seja, o valor mínimo de "x". **Para que "x" seja mínimo, devemos ter que "y" também seja mínimo**. Note que quanto menor "y", menor também será "x".

A pergunta que vem agora é: *qual é o menor valor possível para "y"?*

A situação que minimiza "y" seria aquela em não existiria ninguém (entre essas 48 pessoas) que não fosse advogado ou policial, ou seja, $y_{min} = 0$. Com isso:

$$x_{min} = y_{min} + 19 \quad \rightarrow \quad x_{min} = 0 + 19 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_{min} = 19}$$

Gabarito: LETRA C.

13. (FGV/SEMSA-MANAUS/2022) Em um grupo de 50 pessoas, 27 gostam de filmes de suspense e 32 gostam de filmes de terror. Com relação a essas 50 pessoas, é correto concluir que

A) no máximo 18 delas não gostam de filmes de suspense nem de filmes de terror.

B) exatamente 9 delas gostam tanto de filmes de suspense como de filmes de terror.

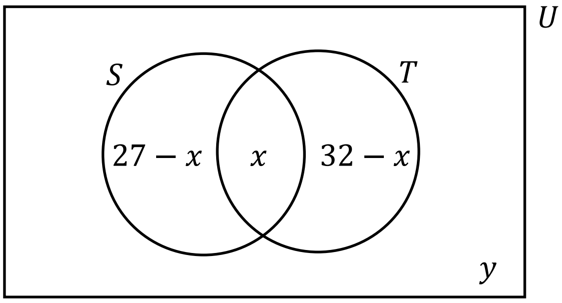
C) exatamente 18 delas só gostam de filmes de suspense.

D) exatamente 23 delas só gostam de filmes de terror.

E) no mínimo 18 delas gostam tanto de filmes de suspense como de filmes de terror.

Comentários:

Mais uma nesse estilo! Todas de 2022! Vamos usar os diagramas de novo!



- "S" denota o conjunto formado por aqueles que gostam de filmes de suspense;
- "T" denota o conjunto formado por aqueles que gostam de filmes de terror;
- "U" denota o conjunto universo, **formado por todas as 50 pessoas** mencionadas na questão;
- "x" é a quantidade de pessoas que gostam tanto de filmes de suspense quanto de terror;
- "y" é a quantidade de pessoas que não gostam de filmes de suspense nem de terror.

Quando fazemos o diagrama da forma acima, **a soma** das quantidades destacadas deve totalizar o número de pessoas envolvidas, ou seja:

$$(27 - x) + x + (32 - x) + y = 50 \quad \rightarrow \quad 59 - x + y = 50 \quad \rightarrow \quad \boxed{y = x - 9}$$

Encontramos uma relação entre "x" e "y". Note que **quanto maior "x", maior será "y"**.

Sendo assim, para maximizarmos "y", devemos determinar o valor máximo de "x".

Para isso, note que temos 27 pessoas que gostam de filme de suspense e 32 pessoas que gostam de terror.

Observe que, em uma situação extrema, as 27 pessoas que gostam de suspense podem também gostar de terror. **Essa seria a situação que "x" assumiria seu máximo valor.** **Não** poderíamos ter, por exemplo, 28 pessoas gostando de suspense e terror, já que sabemos que **apenas 27 gostam de suspense**. Tudo bem? **Esse é o "batente" para o "x"**. Descoberto isso, podemos usar na expressão que determinamos anteriormente.

$$y_{max} = x_{max} - 9 \quad \rightarrow \quad y_{max} = 27 - 9 \quad \rightarrow \quad \boxed{y_{max} = 18}$$

Gabarito: LETRA A.

14. (FGV/MPE-GO/2022) Uma empresa possui 32 funcionários que trabalham nos setores A, B e C. Sabe-se que 20 funcionários trabalham no setor A, 14 funcionários trabalham no setor B e 9 funcionários trabalham no setor C. Há funcionários que trabalham simultaneamente nos setores A e B, há funcionários que trabalham simultaneamente nos setores A e C, mas nenhum funcionário trabalha simultaneamente nos setores B e C. O número de funcionários que trabalha apenas no setor A é igual a

A) 4
B) 5
C) 6
D) 8
E) 9

Comentários:

Questão para usarmos o **Princípio da Inclusão-Exclusão**. Vamos anotar os dados que a questão passa:

- 32 funcionários trabalham nos setores A, B e C.

$$n(A \cup B \cup C) = 32$$

- 20 funcionários trabalham no setor A.

$$n(A) = 20$$

- 14 funcionários trabalham no setor B.

$$n(B) = 14$$

- 9 funcionários trabalham no setor C.

$$n(C) = 9$$

- Nenhum funcionário trabalha simultaneamente nos setores B e C.

$$n(B \cap C) = 0$$

Observe que como não existe funcionário que trabalhe simultaneamente em B e C, consequentemente **não podemos ter funcionário que trabalhe simultaneamente nos três setores:** A, B e C.

$$n(A \cap B \cap C) = 0$$

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, temos:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$32 = 20 + 14 + 9 - n(A \cap B) - n(A \cap C) - 0 + 0$$

$$n(A \cap B) + n(A \cap C) = 11$$

O enunciado pede o número de funcionários que trabalham **apenas** no setor A. Para encontrar seu valor, devemos subtrair de $n(A)$ o número de elementos das intersecções de A com os outros conjuntos. Afinal, queremos a quantidade de elementos que estejam **apenas em A.**

$$Apenas\ no\ Setor\ A = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$Apenas\ no\ Setor\ A = 20 - 11 - 0$$

$$\boxed{Apenas\ no\ Setor\ A = \mathbf{9}}$$

Gabarito: LETRA E.

15. (FGV/SEMSA-MANAUS/2022) Uma pesquisa foi feita com 40 funcionários de uma empresa e entre as perguntas havia as que estão abaixo:

- Você tem filhos?
- Você tem animal de estimação?

20 pessoas responderam SIM para a primeira pergunta.
15 pessoas responderam SIM para a segunda pergunta.
11 pessoas deixaram as duas perguntas em branco.

As instruções da pesquisa estabeleciam que deixar em branco significaria dizer NÃO. Sendo assim, o número de pessoas que possuem filhos e animais de estimação é igual a
A) 2.
B) 3.
C) 4.
D) 5.
E) 6.

Comentários:
Nós vamos resolver essa questão por meio do Princípio da Inclusão-Exclusão. Inicialmente, considere que "**F**" denota o conjunto formado por aqueles que tem **filhos**. Por sua vez, "**A**" denota o conjunto formado por aqueles que tem **animal de estimação**. Dos 40 funcionários que responderam as perguntas, **11 deixaram as duas perguntas em branco** (na prática, a pesquisa considerou que essas **11 pessoas não possuem filhos nem animal de estimação**). Com isso, podemos escrever:

$$n(A \cup F) = 40 - 11 \qquad \rightarrow \qquad n(A \cup F) = 29$$

Por sua vez, como **20 responderam que tem filhos**, podemos escrever $n(F) = 20$.

E, ainda, como **15 responderam que possuem animal de estimação**, $n(A) = 15$.

Com essas três informações, conseguimos encontrar o número de pessoas que possuem filhos **e** animais de estimação - $n(A \cap F)$ - por meio da aplicação do **Princípio da Inclusão-Exclusão**:

$$n(A \cup F) = n(A) + n(F) - n(A \cap F)$$

Substituindo os valores,

$$29 = 20 + 15 - n(A \cap F) \qquad \rightarrow \qquad n(A \cap F) = 35 - 29 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{n(A \cap F) = 6}}$$

Gabarito: LETRA E.

16. (FGV/PC-RN/2021) Em um grupo de esportistas, 1/3 deles só gostam de vôlei e, dos demais, 2/5 gostam de vôlei e também de basquete. Todos os esportistas desse grupo gostam de, pelo menos, um desses dois esportes. Em relação ao total de membros desse grupo, a fração daqueles que só gostam de basquete é:

A) 2/3;
B) 2/5;
C) 3/5;
D) 4/15;
E) 1/15.

Comentários:

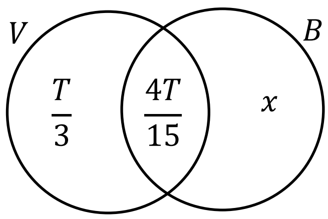
Considere que "V" denota o conjunto daqueles que gostam de Vôlei e "B" denota o conjunto daqueles que gostam de basquete. Por fim, considere que "T" é o total de esportistas desse grupo.

1) Como 1/3 desses esportistas só gostam de vôlei, então podemos escrever que **a quantidade dos que só gostam de vôlei é T/3**.

2) **Atenção aqui!!** Depois da informação acima, o enunciado fala: "DOS DEMAIS", ou seja, refere-se aqueles que não gostam só de vôlei ou não gostam de vôlei mesmo. Assim, **essa quantia é 2T/3**! Temos que **2/5 dessa quantidade gostam de vôlei <u>e</u> de basquete**.

$$\frac{2T}{3} \cdot \frac{2}{5} = \boldsymbol{\frac{4T}{15}}$$

No diagrama, ficamos com o seguinte:



Estamos procurando a fração daqueles que só gostam de basquete, ou seja, o valor de "x/T".

Vamos perceber algumas coisas aqui:

1) Todos nesse grupo gostam de, <u>**pelo menos**</u>, um desses dois esportes. Isso significa que **não temos ninguém fora de "V" ou "B"**.

2) Ademais, lembre-se que quando somamos as quantidades destacadas no diagrama, **ela deve totalizar o número de membros desse grupo**.

$$\frac{T}{3}+\frac{4T}{15}+x=T \quad \rightarrow \quad \frac{9T}{15}+x=1 \quad \rightarrow \quad x=\frac{6T}{15} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{x}{T}=\frac{2}{5}}$$

Gabarito: LETRA B.

17. (FGV/IMBEL/2021) Os 38 empregados novos da fábrica de brinquedos BLIME estão passando por um treinamento inicial. Uma das tarefas do treinamento é a de assistir aos filmes A e B sobre o funcionamento de duas partes da fábrica. Em uma reunião com os novos empregados o coordenador perguntou a todos quem já tinha assistido aos filmes recomendados e ele percebeu, pelas respostas, que

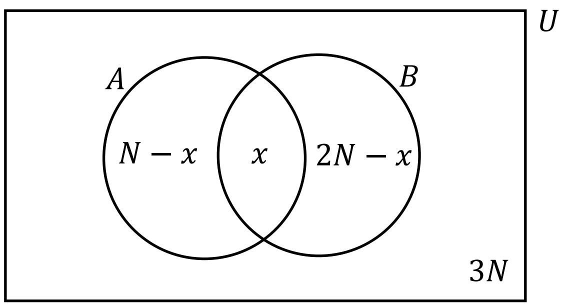
- N pessoas assistiram ao filme A.
- 2N pessoas assistiram ao filme B.
- 3N pessoas não assistiram a nenhum dos dois filmes.

É correto concluir que o número mínimo de pessoas que assistiu aos dois filmes foi

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

Comentários:

Vamos colocar essas informações em um diagrama para uma melhor avaliação do problema.



A soma das quantidades destacadas no diagrama **deve totalizar o número de empregados novos** (38).

$$(N-x)+x+(2N-x)+3N=38$$

$$6N-x=38 \quad \rightarrow \quad \boxed{x=6N-38}$$

Vamos voltar nossa atenção à expressão que destaquei acima. Note que **"x" e "N" são números naturais**, pois estão mensurando **a quantidade de empregados**. Não podemos ter "1,5" pessoas. *Concorda?* Além disso, **deve ser uma quantidade maior ou igual a zero**. Não faz sentido encontrarmos "-3" empregados!

Com isso, **o valor mínimo de "x" é o primeiro valor em que ele é positivo**. Isso acontece quando $\boldsymbol{N = 7}$.

$$x = 6 \cdot 7 - 38 \quad \rightarrow \quad x = 42 - 38 \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x = 4}}$$

Note que para valores de "N" abaixo de 7, o valor de "x" é negativo. Não sendo uma solução possível para o problema.

Gabarito: LETRA D.

18. (FGV/IMBEL/2021) Trinta estudantes praticam judô, natação e basquete, sendo que todos eles praticam pelo menos um desses esportes. Há 15 que praticam judô, 17 que praticam natação e 12 que praticam basquete. Há 10 estudantes que praticam pelo menos dois esportes. O número de estudantes que praticam os três esportes é

A) 4.
B) 5.
C) 6.
D) 7.
E) 8.

Comentários:

Vamos resolver essa questão usando o **Princípio da Inclusão-Exclusão**.

- "J" denota o conjunto daqueles que praticam judô;
- "N" denota o conjunto daqueles que praticam natação;
- "B" denota o conjunto daqueles que praticam basquete.

1) Trinta estudantes praticam judô, natação e basquete.

$$n(J \cup N \cup B) = 30$$

2) 15 praticam judô.

$$n(J) = 15$$

3) 17 praticam natação.

$$n(N) = 17$$

4) 12 praticam basquete.

$$n(B) = 12$$

5) Há 10 estudantes que praticam pelo menos dois esportes.

$$n(J \cap B) + n(N \cap B) + n(J \cap N) - \mathbf{2n(J \cap N \cap B)} = 10$$

Aqui está o "pulo do gato", pessoal!

A subtração em vermelho deve ser feita pois **estamos contando a "intersecção tripla" três vezes** quando fazemos a soma $n(J \cap B) + n(N \cap B) + n(J \cap N)$. No final, **só queremos contar ela uma <u>única vez</u>!** Por isso, subtraímos $\mathbf{2n(J \cap N \cap B)}$. Agora, vamos escrever a expressão acima de uma forma mais conveniente, que você irá entender em breve.

$$n(J \cap B) + n(N \cap B) + n(J \cap N) = 10 + 2n(J \cap N \cap B)$$

Do PIE, temos:

$$n(J \cup N \cup B) = n(J) + n(N) + n(B) - n(J \cap B) - n(N \cap B) - n(J \cap N) + n(J \cap N \cap B)$$

Substituindo as informações,

$$30 = 15 + 17 + 12 - \left(\mathbf{10 + 2n(J \cap N \cap B)}\right) + n(J \cap N \cap B)$$

$$30 = 15 + 17 + 12 - 10 - 2n(J \cap N \cap B) + n(J \cap N \cap B)$$

$$30 = 34 - n(J \cap N \cap B) \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{n(J \cap N \cap B) = 4}}$$

Gabarito: LETRA A.

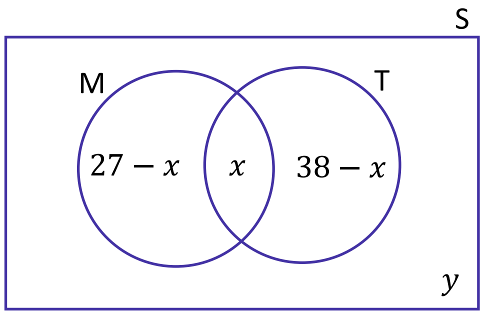
19. (FGV/PM-AM/2022) Em um grupo de 45 soldados, 27 gostam de marchar e 38 gostam de praticar tiro ao alvo. Sejam:

X: o número de soldados desse grupo que gostam de marchar e também de praticar tiro ao alvo;
Y: o número de soldados desse grupo que não gostam nem de marchar nem de praticar tiro ao alvo.

Nesse caso, é correto afirmar que

A) X é no máximo 20.
B) Y é no mínimo 7.
C) quando X = 23, tem-se Y = 7.
D) quando Y = 7, tem-se X = 20.
E) quando Y = 5, tem-se X = 25.

Comentários:
Vamos desenhar os diagramas!



No diagrama acima, "M" representa o conjunto daqueles soldados que **gostam de marchar**. Por sua vez, "T" representa o conjunto daqueles que **gostam de praticar tiro ao alvo**. Dito isso, perceba o seguinte:

1) Representamos com "x" a quantidade de soldados na **intersecção dos dois conjuntos**, ou seja, "x" é a quantidade de soldados que gostam de marcar **e** de praticar tiro ao alvo. Com isso, podemos concluir que "$27 - x$" é a quantidade de soldados que gosta **apenas** de marchar.

2) Da mesma forma que raciocinamos anteriormente, podemos concluir que "$38 - x$" é a quantidade de soldados que gostam **apenas** de praticar tiro ao alvo.

3) **Fora** dos conjuntos "M" e "T", colocamos o "y". Esse "y" é a quantidade de soldados que **não** gostam de marchar **nem** de praticar tiro ao alvo.
E agora? O que fazemos?

Agora, nós utilizamos a informação de que **o total de soldados é igual a 45**. Ou seja, quando **somamos** cada uma das regiões desse diagrama, **devemos obter o total de soldados**, isto é,

$$(27 - x) + x + (38 - x) + y = 45 \quad \rightarrow \quad 65 - x + y = 45 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 20 + y}$$

Essa é a relação entre "x" e "y". Perceba que quando $y = 5$, temos $x = 25$, **exatamente** como consta na alternativa E.

Gabarito: LETRA E.

20. (FGV/PREF. SALVADOR/2019) 50 atletas estão treinando e todos usam bermuda e camiseta do mesmo modelo, mas com cores diversas. Entre esses atletas há 20 com bermudas brancas, 25 com camisetas brancas e 12 com bermudas e camisetas brancas. Assinale a opção que indica o número de atletas que não estão vestindo nenhuma peça branca.

a) 5
b) 13
c) 15
d) 17
e) 20

Comentários:

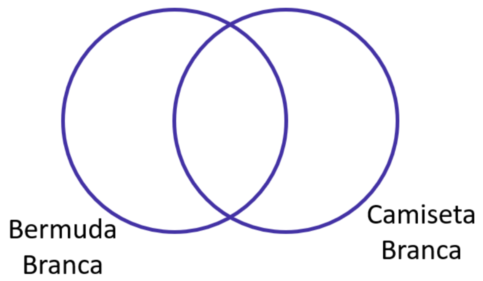
Beleza, moçada. Vamos extrair as informações do enunciado.

- Atletas com bermudas brancas. $n(B) = 20$
- Atletas com camisetas brancas. $n(C) = 25$
- Atletas com bermudas **e** camisetas brancas. $n(B \cap C) = 12$

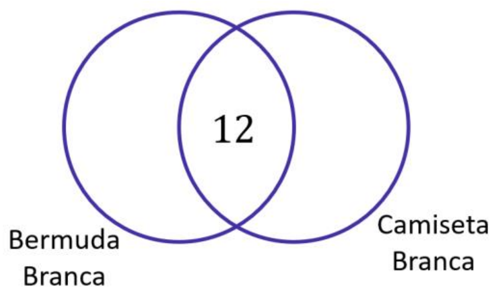
Podemos resolver de duas maneiras.

1ª) Por diagrama de Venn.

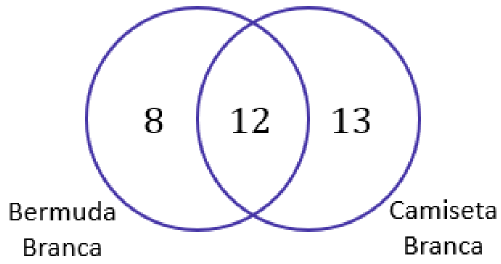
- Primeiro passo: desenhar os dois conjuntos.



- Segundo passo: colocar o valor da intersecção. No nosso caso, seria quantos estão de bermuda branca e de camiseta branca.



- Terceiro passo: subtraímos as quantidades totais de cada conjunto pela quantidade que já colocamos na intersecção. Dessa forma, encontraremos quantas pessoas usaram **apenas a bermuda branca** $(20 - 12 = 8)$ ou **apenas a camiseta branca** $(25 - 12 = 13)$.



- Quarto passo: somar os números para obter a quantidade de pessoas que está usando o bermuda branca ou camiseta branca (incluindo os dois ao mesmo tempo) = 8 + 12 + 13 = 33. Logo, se temos 33 atletas que estão vestindo alguma peça branca de um total de 50, então 50 - 33 = **17 não estão**.

2ª) Por Princípio da Inclusão-Exclusão.

Aplicar na fórmula que aprendemos na teoria e descobrir $n(B \cup C)$.

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$$

$$n(B \cup C) = 20 + 25 - 12$$

$$n(B \cup C) = 33$$

Logo, 33 atletas estão usando algo branco. Como ao todo são 50 atletas, 50 - 33 = **17 não estão vestindo nenhuma peça branca**.

Gabarito: LETRA D.

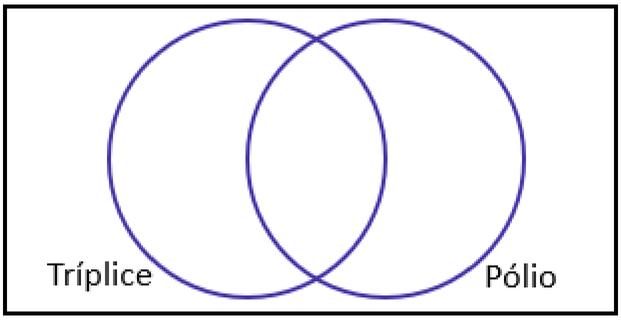
21. (FGV/PREF. ANGRA/2019) Aos 5 anos, toda criança deve tomar um reforço das vacinas tríplice e pólio. Uma pesquisa feita com as 80 crianças que entraram no 1º ano do Ensino Fundamental de uma escola mostrou que:

- 54 alunos tomaram a vacina tríplice.
- 52 alunos tomaram a vacina pólio.
- 16 alunos não tomaram nenhuma das duas vacinas.

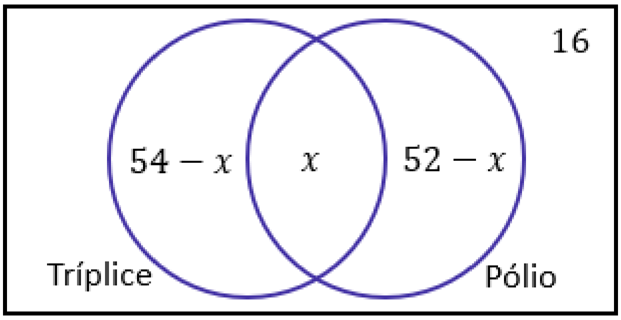
O número de alunos que tomou as duas vacinas é
a) 42.
b) 44.

c) 46.
d) 48.
e) 50.

Comentários:
- Primeiro passo: desenhar os conjuntos daqueles que tomaram a vacina tríplice e daqueles que tomaram a vacina pólio.



- Segundo passo: Adicionar as informações que foram passadas no enunciado. Conforme aprendemos, sempre devemos **começar pelo valor que está na intersecção**. Na questão, **esse valor equivale ao número de pessoas que tomaram a vacina tríplice e a pólio**. Como não sabemos, podemos simplesmente chamar de x.



É importante perceber que devemos colocar a quantidade de pessoas que não tomaram nenhuma das vacinas também. No nosso caso, **essa quantidade é o 16**.

- Terceiro passo: somar todas as quantidades do diagrama e a **igualar a quantidade de pessoas participantes da pesquisa**. De acordo com o enunciado, foram **80 crianças**. Assim,

$$(54 - x) + x + (52 - x) + 16 = 80 \quad \rightarrow \quad 122 - x = 80 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 42}$$

Portanto, **42 alunos tomaram as duas vacinas**.

Gabarito: LETRA A.

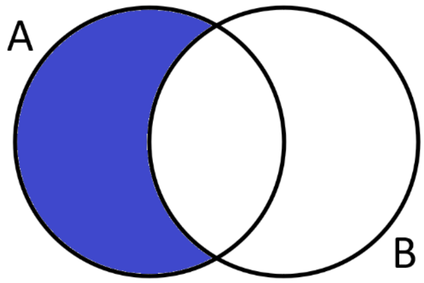
22. (FGV/MPE-RJ/2019) Sobre os conjuntos A e B, sabe-se que:

- $(A - B)$ tem 7 elementos;
- A tem 28 elementos;
- A união de A e B tem 38 elementos

O número de elementos do conjunto B é:
a) 10;
b) 18;
c) 19;
d) 31;
e) 35.

Comentários:
De acordo com o enunciado, temos o seguinte:
- $n(A-B)=7$
- $n(A)=28$
- $n(A\cup B)=38$

Não sei se você lembra, mais $A-B$ é o conjunto formado por todos **os elementos de A que não são elementos de B**. Graficamente, representamos assim:



Veja que para obter o número de elementos dessa região, basta pegarmos **a totalidade do conjunto A e subtrair da intersecção**. Matematicamente,

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

Usando essa fórmula, devemos encontrar $n(A\cap B)$. Substituindo os valores que temos, ficamos com:

$$7=28-n(A\cap B) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n(A\cap B)=21}$$

Com o valor da intersecção descoberto, podemos usar o princípio da inclusão-exclusão para determinar $n(B)$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$38 = 28 + n(B) - 21$$

$$\boldsymbol{n(B) = 31}$$

Gabarito: LETRA D.

23. (FGV/BANESTES/2018) Um conjunto tem 8 elementos, outro conjunto tem 9 elementos e a união deles tem 12 elementos. O número de elementos da interseção desses conjuntos é:

a) 1;

b) 2;

c) 3;

d) 4;

e) 5.

Comentários:

Essa é uma questão bem direta e que devemos usar o **Princípio da Inclusão-Exclusão** para resolvê-la. Vamos chamar um conjunto de A e o outro de B. Assim,

- Um conjunto tem 8 elementos → $n(A) = 8$.
- Um outro conjunto tem 9 elementos → $n(B) = 9$.
- A **união** deles tem 12 elementos → $n(A \cup B) = 12$.

Lembre-se da fórmula:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Substituindo o que temos:

$$12 = 8 + 9 - n(A \cap B) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n(A \cap B) = 5}$$

Gabarito: LETRA E.

24. (FGV/COMPESA/2018) Em uma empresa trabalham 40 técnicos e todos falam português. Entre eles, há técnicos que falam inglês e há técnicos que falam alemão, porém, entre os que falam apenas um idioma estrangeiro, o número dos que falam inglês é o dobro do número dos que falam alemão. Sabe-se que 15 técnicos falam apenas português e que 4 técnicos falam tanto inglês quanto alemão. O número de técnicos que falam inglês é

a) 7

b) 11

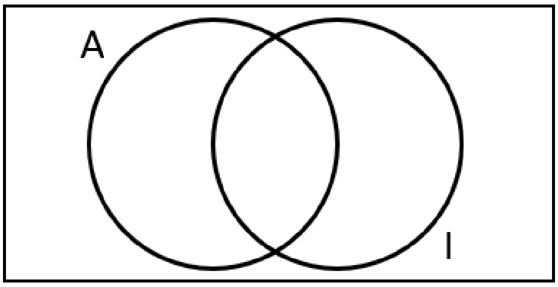
c) 14

d) 18

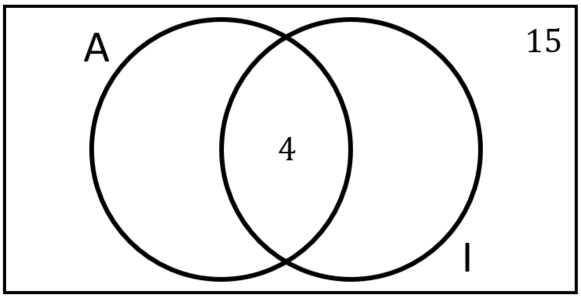
e) 20

Comentários:

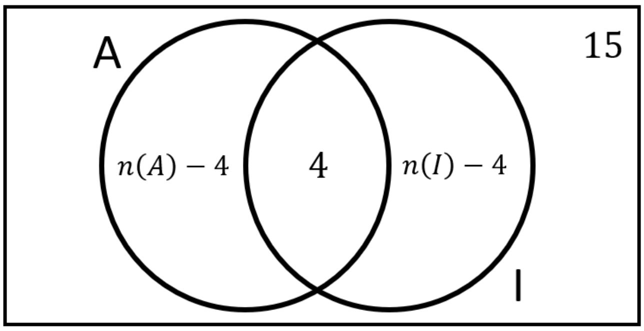
Ok, moçada! Muita informação, né?! Se formos com calma, dá certo! Temos **dois conjuntos**: o primeiro formado pelos técnicos que falam alemão (A) e o segundo formado pelos técnicos que falam inglês (I). Em diagramas, podemos representar assim:



Para começar a preencher esse diagrama, devemos pegar a intersecção. Observe que o enunciado diz que 4 técnicos falam tanto inglês quanto alemão. **Esse é o valor da intersecção**. Além disso, **15 técnicos falam apenas português**, ou seja, não falam alemão ou inglês. Ficamos com,



Considere que o número de técnicos que falam alemão seja $\boldsymbol{n(A)}$ e o número de técnicos que falam inglês seja $\boldsymbol{n(I)}$. Assim,



Quando somamos todos os valores do nosso diagrama, **devemos obter o total de técnicos**. O enunciado disse que são 40. Logo,

$$n(A) - 4 + 4 + n(I) - 4 + 15 = 40$$

$$n(A) + n(I) + 11 = 40$$

$$n(A) + n(I) = 29$$

Observe que temos **dois valores desconhecidos**. Precisamos de **mais uma equação para formar um sistema**. De onde vamos tirar a outra equação? Ora, do enunciado! Veja que o examinador diz *"entre os que falam apenas um idioma estrangeiro, o número dos que falam inglês é o dobro do número dos que falam alemão"*. Matematicamente, temos:

$$n(I) - 4 = 2 \cdot (n(A) - 4)$$

$$n(I) - 4 = 2 \cdot n(A) - 8$$

$$n(I) = 2 \cdot n(A) - 4$$

Agora, devemos pegar essa relação e **substituir na primeira equação** que encontramos.

$$n(A) + 2 \cdot n(A) - 4 = 29$$

$$3 \cdot n(A) = 33$$

$$n(A) = 11$$

Portanto, 11 técnicos falam alemão. Consequentemente, $29 - 11 =$ **18 falam inglês**.

Gabarito: LETRA D.

25. (FGV/BANESTES/2018) As equipes de Abel e de Nádia têm o mesmo número de funcionários. Cinco funcionários participam das duas equipes. Não há outros funcionários com essa característica. Juntando-se as duas equipes tem-se 41 funcionários ao todo. As equipes de Abel e de Nádia têm cada uma:

a) 26
b) 25
c) 24
d) 23
e) 22

Comentários:

Uma ótima questão para aplicarmos **o Princípio da Inclusão-Exclusão**. Vamos primeiro entender o que cada informação do enunciado significa. Considere que o conjunto dos funcionários na equipe de Abel seja representada pelo **conjunto A**. Analogamente, o conjunto dos funcionários na equipe de Nádia é **representado por N**.

- As equipes de Abel e de Nádia têm o mesmo número de funcionários $\rightarrow$ $\boldsymbol{n(A) = n(N).}$

- Cinco funcionários participam das duas equipes $\rightarrow$ $\boldsymbol{n(A \cap N) = 5.}$

- Juntando-se as duas equipes tem-se 41 funcionários ao todo $\rightarrow$ $\boldsymbol{n(A \cup N) = 41.}$

Assim, usando o Princípio da Inclusão-Exclusão, sabemos que:

$$n(A \cup N) = n(A) + n(N) - n(A \cap N)$$

$$41 = n(A) + n(A) - 5$$

$$2 \cdot n(A) = 46$$

$$n(A) = 23$$

Como o número de funcionários são iguais nas duas equipes, **cada uma possui 23**.

Gabarito: LETRA D.

QUESTÕES COMENTADAS - FGV

Conjuntos Numéricos

1. (FGV/MEC/2009) Sejam X e Y dois números inteiros positivos. Se $X^2 + Y^2$ é ímpar, então se pode afirmar de maneira correta que:

A) X^Y é par.
B) Y^X é par.
C) XY é par.
D) $X - Y$ é par.
E)$X + Y$ é par.

Comentários:

Moçada, antes de qualquer análise, é importante guardar que **X e Y são dois números inteiros positivos**. Ou seja, **não são números negativos, nem quebrados, nem mesmo podem ser iguais a zero**. Tudo bem? Além disso, vamos lembrar o seguinte:

- $\text{PAR} \pm \text{PAR} = \text{PAR}$
- $\text{ÍMPAR} \pm \text{ÍMPAR} = \text{PAR}$
- $\mathbf{ÍMPAR \pm PAR = ÍMPAR}$

A única opção em que o resultado de uma soma ou subtração é um número ímpar, **é quando um dos números é ímpar e o outro é par**. Assim, se X^2+Y^2 é ímpar, ou X^2 é par e Y^2 é ímpar OU X^2 é ímpar e Y^2 é par.

Perceba que um número par elevado a qualquer expoente inteiro positivo será sempre um número par. O mesmo acontece com um número ímpar. Para começar a entender esse fato, **você pode pensar em alguns exemplos, tais como o $\mathbf{3^2 = 9, 3^3 = 27, 4^2 = 16, 4^3 = 64}$.**

Isso acontece pois **um número par sempre terá o fator "2".** Portanto, quando multiplicar esse número várias vezes, o 2 sempre estará lá!

$$(2n)^5 = (2n) \cdot (2n) \cdot (2n) \cdot (2n) \cdot (2n) = 2 \cdot (2^4 n)$$

Por sua vez, **números ímpares não possuem o fator "2".** Se você multiplica um número que não tem o fator 2 pelo mesmo número, o resultado continuará sem o fator "2", ou seja, será um número ímpar. Tudo bem?! Essas conclusões são válidas apenas quando temos expoentes números inteiros positivos.

Agora, voltando para o problema, vamos analisar as alternativas.

A) X^Y é par.

ERRADO. Pessoal, se X for o número par, então estaria correto. No entanto, **X pode ser o ímpar**. Não sabemos. Nesse sentido, X^Y também pode ser um número ímpar.

B) Y^X é par.
ERRADO. É pelo mesmo motivo da alternativa anterior: se Y fosse o número par, então estaria correto. No entanto, **Y pode ser o ímpar**. Não sabemos. Nesse sentido, Y^X também pode ser um número ímpar.

C) XY é par.
CERTÍSSIMO. O produto de um número par por um número ímpar é um número par. Isso acontece pois o número par possui o fator "2", que leva o fator para a multiplicação.

D) $X - Y$ é par.
ERRADO. Sabemos que a soma ou subtração de um número par com um número ímpar, resultará em um número ímpar.

E)$X + Y$ é par.
ERRADO. Pelo mesmo motivo do item anterior: a soma ou subtração de um número par com um número ímpar, resultará em um número ímpar.

Gabarito: LETRA C.

2. (FGV/SEFAZ-MS/2006) O maior número inteiro que é menor que ou igual a -5,7 é:
A) -6
B) -5
C) -4
D) -3
E) -2

Comentários:
Os números inteiros são os números "não quebrados", podendo ser negativos ou positivos. Veja que **-5,7 não é um número inteiro**. Queremos o primeiro inteiro menor do que ele! Ora, -6 é o número que a questão está procurando.

Perceba que **não pode ser -5 pois o -5 é MAIOR que -5,7**. O enunciado pergunta pelo maior inteiro que é menor do que -5,7. A banca tentou pegar o candidato com essa história de "maior que é menor", causando confusão facilmente.

Gabarito: LETRA A.

3. (FGV/ALESP/2002) Um número racional qualquer:

A) Tem sempre um número finito de ordens (casas) decimais.
B) Tem sempre um número infinito de ordens (casas) decimais.
C) Não se pode expressar em forma decimal exata.
D) Tem sempre como denominador um número diferente de zero.

Comentários:
A) Tem sempre um número finito de ordens (casas) decimais.
ERRADO. Vimos na teoria que as dízimas periódicas, **apesar da representação decimal infinita, são números racionais**, pois conseguimos expressá-la na forma de uma fração, com denominador não-nulo.

B) Tem sempre um número infinito de ordens (casas) decimais.
ERRADO. Há números racionais que possuem um número finito de casas decimais. Para isso, basta lembrar que **0,5, por exemplo, é um número racional**.

C) Não se pode expressar em forma decimal exata.
ERRADO. Um número racional é qualquer número que pode ser escrito na forma de uma fração denominador não nulo. Como consequência, **tanto números decimais exatos quanto dízimas periódicas são exemplos de números racionais**.

D) Tem sempre como denominador um número diferente de zero.
CERTO. Pessoal, é exatamente parte da definição de um número racional: **qualquer número que pode ser escrito na forma de uma fração, com denominador diferente de zero**. Caso não seja possível, teremos um número irracional.

Gabarito: LETRA D.

4. (FGV/AL-MT/2013) Suponha que o valor da expressão $\frac{5x}{6} - \frac{x}{2}$ seja um número inteiro. O valor de x é necessariamente
A) positivo.
B) par.
C) múltiplo de 3.
D) múltiplo de 6.
E) múltiplo de 12.

Comentários:
Sabemos que um número inteiro é um número "não quebrado". **Não pode ter casa decimal!** A expressão do enunciado foi:

$$E = \frac{5x}{6} - \frac{x}{2}$$

Vamos tirar o MMC e calcular na forma de uma única fração.

$$E=\frac{5x}{6}-\frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad E=\frac{10x-6x}{12} \quad \rightarrow \quad E=\frac{4x}{12} \quad \rightarrow \quad E=\frac{x}{3}$$

Note que **x deve ser um múltiplo de 3** (3, 6, 9, 12, 15, 18, ...). Caso não fosse, quando o dividíssemos por 3, resultaria em um número quebrado e, **portanto, não teríamos um inteiro**.

Gabarito: LETRA C.

QUESTÕES COMENTADAS - FGV

Problemas

1. (FGV/BANESTES/2023) A quantidade de números inteiros e positivos formados por 2 algarismos cuja diferença vale 4 é igual a

A) 5.
B) 6.
C) 10.
D) 11.
E) 15.

Comentários:

Os números **inteiros** e **positivos** formados por 2 algarismos **são todos aqueles que vão de 10 até 99**. A questão pede quantos existem tal que **a diferença entre esses algarismos seja igual a 4**. Um número que obedece a essa condição seria o 40, pois 4 - 0 = 4. Como não são tantos números, podemos listá-los!

$$15, 26, 37, 40, 48, 51, 59, 62, 73, 84, 95$$

Ou seja, **11 números**! Podemos marcar a alternativa D.

Gabarito: LETRA D.

2. (FGV/SEAD-AP/2022) A soma de dois números naturais é 33. O maior valor para o produto deles é

a) 271.
b) 271,75.
c) 272.
d) 272,25.
e) 273.

Comentários:

Inicialmente, perceba que estamos trabalhando com números naturais. Na prática, não consideraremos os números "quebrados" ou negativos, pois:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

A questão informa que **temos dois números naturais tais que a soma deles é igual a 33**.

$$x + y = 33$$

Queremos saber **qual é o valor máximo do produto xy**. Para isso, pode ser interessante escrevermos uma tabela. Acompanhe:

x	y	xy	$x+y$
1	32	32	33
2	31	62	33
3	30	90	33
4	29	116	33
5	28	140	33
6	27	162	33

Na tabela acima listei algumas possibilidades para "x" e para "y" de forma que a soma $x + y$ fosse sempre igual a 33 (pois é a condição do enunciado).

Agora, vamos olhar o produto xy. Observe que **ele aumenta conforme aumentamos "x" e diminuímos "y"**. *Será que esse aumento ocorre indefinidamente?* Vamos continuar a tabela e observar mais um pouco!

x	y	xy	$x+y$
7	26	182	33
8	25	200	33
...	...	...	33
15	18	270	33
16	**17**	**272**	**33**
17	**16**	**272**	**33**
18	15	270	33

Pronto! Observe que o valor máximo do produto ocorre quando $x = 16$ e $y = 17$ (ou o contrário).

$$\boxed{(xy)_{máx} = 272}$$

Professor, mas na prova eu terei que desenhar essa tabela toda?

Na prática, não! O interessante é perceber que o produto aumenta até atingir um máximo e depois começa a diminuir! Assim, você pode ir pulando algumas possibilidades (como fizemos na última tabela de x=7 para x=15) até encontrar o momento em que o produto começa a diminuir.

Gabarito: Letra C

3. (FGV/IMBEL/2021) Sabe-se que a soma de dez números naturais é par. Em relação a esses dez números é correto afirmar que

A) todos são, obrigatoriamente, pares.

B) todos são, obrigatoriamente, ímpares.

C) pelo menos um deles é par.

D) a quantidade de números pares é ímpar.

E) a quantidade de números ímpares é par.

Comentários:

Vamos comentar alternativa por alternativa!

A) todos são, obrigatoriamente, pares.

Errado. Isso não é necessariamente verdade, pessoal. É bem verdade que se somarmos dez números pares, vamos obter um número par. No entanto, se somarmos dez números ímpares, também obteremos um número par. Faça o teste!

B) todos são, obrigatoriamente, ímpares.

Errado. É a mesma justificativa dada anteriormente. Se somarmos dez números ímpares, vamos obter um número par! Mas essa obrigatoriedade não existe! Da mesma forma, se somarmos dez números pares, também vamos obter um número par.

C) pelo menos um deles é par.

Errado. Por exemplo, em uma situação em que nove são ímpares (I) e apenas um é par, teremos o seguinte:

$$\underbrace{I+I}_{par}+\underbrace{I+I}_{par}+\underbrace{I+I}_{par}+\underbrace{I+I}_{par}+\underbrace{I+P}_{ímpar}=\underbrace{P+I}_{ímpar}=I$$

D) a quantidade de números pares é ímpar.

Errado. Na situação da alternativa anterior temos uma quantidade de números pares que é ímpar. Mesmo assim, vimos que o resultado foi um número ímpar.

E) a quantidade de números ímpares é par.

Correto. Precisamos de uma quantidade par de números ímpares, pois sabemos que **a soma de dois ímpares sempre resultará em um par**. Com isso, esses pares, ao serem somado com outros números pares, resultará em um número par.

Gabarito: LETRA E.

4. (FGV/MEC/2009) Sejam X e Y dois números inteiros positivos. Se $X^2 + Y^2$ é ímpar, então se pode afirmar de maneira correta que:

A) X^Y é par.
B) Y^X é par.
C) XY é par.
D) $X - Y$ é par.
E)$X + Y$ é par.

Comentários:
Moçada, antes de qualquer análise, é importante guardar que **X e Y são dois números inteiros positivos**. Ou seja, **não são números negativos, nem quebrados, nem mesmo podem ser iguais a zero**. Tudo bem? Além disso, vamos lembrar o seguinte:

- $\text{PAR} \pm \text{PAR} = \text{PAR}$
- $\text{ÍMPAR} \pm \text{ÍMPAR} = \text{PAR}$
- $\mathbf{ÍMPAR \pm PAR = ÍMPAR}$

A única opção em que o resultado de uma soma ou subtração é um número ímpar, **é quando um dos números é ímpar e o outro é par**. Assim, se X^2+Y^2 é ímpar, ou X^2 é par e Y^2 é ímpar OU X^2 é ímpar e Y^2 é par.

Perceba que um número par elevado a qualquer expoente inteiro positivo será sempre um número par. O mesmo acontece com um número ímpar. Para começar a entender esse fato, **você pode pensar em alguns exemplos, tais como o $\mathbf{3^2 = 9, 3^3 = 27, 4^2 = 16, 4^3 = 64}$.**

Isso acontece, pois, **um número par sempre terá o fator "2".** Portanto, quando multiplicar esse número várias vezes, o 2 sempre estará lá!

$$(2n)^5 = (2n) \cdot (2n) \cdot (2n) \cdot (2n) \cdot (2n) = 2 \cdot (2^4 n)$$

Por sua vez, **números ímpares não possuem o fator "2".** Se você multiplica um número que não tem o fator 2 pelo mesmo número, o resultado continuará sem o fator "2", ou seja, será um número ímpar. Tudo bem?! Essas conclusões são válidas apenas quando temos expoentes números inteiros positivos.

Agora, voltando para o problema, vamos analisar as alternativas.
A) X^Y é par.
ERRADO. Pessoal, se X for o número par, então estaria correto. No entanto, **X pode ser o ímpar**. Não sabemos. Nesse sentido, X^Y também pode ser um número ímpar.

B) Y^X é par.
ERRADO. É pelo mesmo motivo da alternativa anterior: se Y fosse o número par, então estaria correto. No entanto, **Y pode ser o ímpar**. Não sabemos. Nesse sentido, Y^X também pode ser um número ímpar.

C) XY é par.
CERTÍSSIMO. O produto de um número par por um número ímpar é um número par. Isso acontece pois o número par possui o fator "2", que leva o fator para a multiplicação.

D) $X - Y$ é par.
ERRADO. Sabemos que a soma ou subtração de um número par com um número ímpar, resultará em um número ímpar.

E)$X + Y$ é par.
ERRADO. Pelo mesmo motivo do item anterior: a soma ou subtração de um número par com um número ímpar, resultará em um número ímpar.

Gabarito: LETRA C.

5. (FGV/SEFAZ-MS/2006) O maior número inteiro que é menor que ou igual a -5,7 é:
A) -6
B) -5
C) -4
D) -3
E) -2

Comentários:
Os números inteiros são os números "não quebrados", podendo ser negativos ou positivos. Veja que **-5,7 não é um número inteiro**. Queremos o primeiro inteiro menor do que ele! Ora, -6 é o número que a questão está procurando.

Perceba que **não pode ser -5 pois o -5 é MAIOR que -5,7**. O enunciado pergunta pelo maior inteiro que é menor do que -5,7. A banca tentou pegar o candidato com essa história de "maior que é menor", causando confusão facilmente.

Gabarito: LETRA A.

6. (FGV/ALESP/2002) Um número racional qualquer:
A) Tem sempre um número finito de ordens (casas) decimais.
B) Tem sempre um número infinito de ordens (casas) decimais.
C) Não se pode expressar em forma decimal exata.
D) Tem sempre como denominador um número diferente de zero.

Comentários:
A) Tem sempre um número finito de ordens (casas) decimais.

ERRADO. Vimos na teoria que as dízimas periódicas, **apesar da representação decimal infinita, são números racionais**, pois conseguimos expressá-la na forma de uma fração, com denominador não-nulo.

B) Tem sempre um número infinito de ordens (casas) decimais.
ERRADO. Há números racionais que possuem um número finito de casas decimais. Para isso, basta lembrar que **0,5, por exemplo, é um número racional**.

C) Não se pode expressar em forma decimal exata.
ERRADO. Um número racional é qualquer número que pode ser escrito na forma de uma fração denominador não nulo. Como consequência, **tanto números decimais exatos quanto dízimas periódicas são exemplos de números racionais**.

D) Tem sempre como denominador um número diferente de zero.
CERTO. Pessoal, é exatamente parte da definição de um número racional: **qualquer número que pode ser escrito na forma de uma fração, com denominador diferente de zero**. Caso não seja possível, teremos um número irracional.

Gabarito: LETRA D.

7. (FGV/AL-MT/2013) Suponha que o valor da expressão $\frac{5x}{6} - \frac{x}{2}$ seja um número inteiro. O valor de x é necessariamente
A) positivo.
B) par.
C) múltiplo de 3.
D) múltiplo de 6.
E) múltiplo de 12.

Comentários:
Sabemos que um número inteiro é um número "não quebrado". **Não pode ter casa decimal!** A expressão do enunciado foi:

$$E = \frac{5x}{6} - \frac{x}{2}$$

Vamos tirar o MMC e calcular na forma de uma única fração.

$$E = \frac{5x}{6} - \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad E = \frac{10x - 6x}{12} \quad \rightarrow \quad E = \frac{4x}{12} \quad \rightarrow \quad E = \frac{x}{3}$$

Note que **x deve ser um múltiplo de 3** (3, 6, 9, 12, 15, 18, ...). Caso não fosse, quando o dividíssemos por 3, resultaria em um número quebrado e, **portanto, não teríamos um inteiro**.

Gabarito: LETRA C.

LISTA DE QUESTÕES - FGV

Introdução à Teoria dos Conjuntos

1. (FGV/TCE-SP/2023) Considere o conjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$. O número de subconjuntos de A com 3 elementos, sendo pelo menos um elemento ímpar, é:

A) 16

B) 15

C) 14

D) 12

E) 8

2. (FGV/PREF. SALVADOR/2019) Em uma classe de 20 estudantes, 12 são meninas. Além disso, dos 20 estudantes, 15 gostam de Matemática. É correto concluir que

a) nenhuma menina gosta de Matemática.

b) todas as meninas gostam de Matemática.

c) no máximo 7 meninas gostam de Matemática.

d) no mínimo 7 meninas gostam de Matemática.

e) exatamente 7 meninas gostam de Matemática.

3. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Na matemática, as coleções são chamadas de conjuntos. Se uma coleção tem apenas um elemento, ela é dita um conjunto unitário. Um exemplo de conjunto unitário é a coleção formada pelos números que são:

a) ao mesmo tempo, divisores de 4 e 9;

b) divisores de 4;

c) divisores de 9;

d) maiores que 4 e menores que 9;

e) formados pelos algarismos 4 e 9.

4. (FGV/PREF. OSASCO/2014) Conjunto é o nome dado, na Matemática, a qualquer coleção. Entretanto, uma coleção pode não ter elementos. Nesse caso, diz-se que esse é um conjunto vazio. Um exemplo de conjunto vazio é a coleção:

a) de meses do ano que começam pela letra J;

b) de dias da semana que começam pela letra T;

c) dos números que são, ao mesmo tempo, pares e ímpares;

d) dos números menores que 10 e maiores que 6;

e) das pessoas brasileiras que são casadas.

5. (FGV/CODEBA/2010) Sejam $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 2, 4\}$ dois conjuntos. Com relação aos conjuntos A e B, analise as afirmativas a seguir:

I. $B \subset A$
II. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
III. $A \cap B = \{0, 2\}$

Está(ão) correta(s) somente
a) I.
b) II.
c) III.
d) I e II.
e) II e III.

6. (FGV/BADESC/2010) Dado um conjunto A, chamamos subconjunto próprio não vazio de A a qualquer conjunto que pode ser formado com parte dos elementos do conjunto A, desde que:

- algum elemento de A seja escolhido;
- não sejam escolhidos todos os elementos de A.

Sabemos que a quantidade de subconjuntos próprios não vazios de A é 14. A quantidade de elementos de A é igual a:
a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

7. (FGV/ALESP/2002) São dados os conjuntos: D = divisores de 24 (divisores positivos), M = múltiplos de 3 (múltiplos positivos), S = D ∩ M e n = números de subconjuntos de S. Portanto, n é igual a:
a) 64
b) 16
c) 32
d) 8

GABARITO

1. LETRA A
2. LETRA D
3. LETRA A
4. LETRA C
5. LETRA E
6. LETRA A
7. LETRA B

LISTA DE QUESTÕES - FGV

União, Intersecção, Complementar e Diferença

1. (FGV/BANESTES/2023) Sejam A e B dois conjuntos finitos tais que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $\{1, 2, 5\}$ é o conjunto de elementos que estão em A e não estão em B. O conjunto dos elementos que não estão em A ou estão em B é

A) {3, 4}.

B) {3, 6}.

C) {3, 4, 6}.

D) {4, 6, 7}.

E) {3, 4, 6, 7}.

2. (FGV/SSP-AM/2022) Sobre dois conjuntos A e B sabe-se que:

- A união de A e B tem 130 elementos.
- A diferença B – A tem 50 elementos.
- A diferença A – B tem 60 elementos.

Sendo x o número de elementos de A e y o número de elementos de B, o valor de x + y é igual a

A) 110.

B) 120.

C) 130.

D) 140.

E) 150.

3. (FGV/SEFAZ-MS/2006) Os conjuntos A, B e C satisfazem $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$:

a) nunca.

b) se e somente se A = B = C.

c) se e somente se B = C.

d) se e somente se B ∩ C = ∅.

e) sempre.

4. (FGV/SEFAZ-MS/2006) Se X, Y e Z são conjuntos, $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup Z$:

a) nunca.

b) se e somente se X = Y = Z.

c) se e somente se $Z \subset X$

d) se e somente se $Z \subset Y$

e) sempre.

GABARITO

1. LETRA E
2. LETRA E
3. LETRA E
4. LETRA C

LISTA DE QUESTÕES - FGV

Princípio da Inclusão-Exclusão

1. (FGV/CÂMARA DOS DEPUTADOS/2023) Dra. Míriam é a responsável pelo atendimento psicológico de 97 estudantes de uma escola, às segundas, quartas e sextas. Há 21 estudantes que só procuram a Dra. Míriam na segunda-feira, 20 que só comparecem às quartas e 17 que só vão às sextas. Dra. Míriam atende 48 estudantes às segundas, 53 às quartas e 43 às sextas. O número de estudantes que são atendidos três vezes por semana é igual a

A) 7.

B) 8.

C) 9.

D) 10.

E) 11.

2. (FGV/PM-SP/2023) Em um conjunto de 20 objetos, 12 têm a característica A e 9 têm a característica B. Apenas 3 dos objetos não possuem nem a característica A, nem a característica B. Assim, a quantidade de objetos desse conjunto que possuem simultaneamente as características A e B é igual a

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

3. (FGV/MPE-SP/2023) Em um grupo de 55 pessoas, 32 jogam pôquer, 36 jogam truco, 34 jogam buraco, 18 jogam pôquer e truco, 21 jogam truco e buraco e 20 jogam buraco e pôquer. Se há, no grupo, uma única pessoa que não joga quaisquer desses três jogos de cartas, então a quantidade de pessoas que jogam esses três jogos é

A) 12.

B) 11.

C) 9.

D) 7.

E) 6.

4. (FGV/SEFAZ-MG/2023) Sobre 3 conjuntos A, B e C, sabe-se que:

A tem 16 elementos;

B tem 24 elementos;

C tem 18 elementos;

$A \cap B$ tem 5 elementos;

$B \cap C$ tem 7 elementos;
$A \cap B \cap C$ tem 3 elementos;
$A - (B \cup C)$ tem 8 elementos.

O número de elementos do conjunto $A \cup B \cup C$ é igual a
a) 35.
b) 43.
c) 47.
d) 48.
e) 58.

5. (FGV/SENADO FEDERAL/2022) Um clube tem 180 associados que participam de suas duas atividades sociais. Há 130 frequentadores da cinemateca, enquanto 92 sócios participam das aulas de dança de salão. Sendo assim, é correto afirmar que
a) mais de 40 sócios participam das duas atividades.
b) menos de 30 sócios participam das duas atividades.
c) mais de 55 sócios só vão às aulas de dança.
d) menos de 80 sócios só vão à cinemateca.
e) menos de 45 sócios só vão às aulas de dança.

6. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Em uma assembleia com 172 votantes, duas propostas independentes, A e B, foram colocadas em votação. Cada votante votou a favor ou contra cada uma das duas propostas. Sabe-se que 138 votaram a favor da proposta A, 74 votaram a favor da proposta B e 32 votaram contra as duas propostas. O número de votantes que votaram a favor da proposta A e contra a proposta B é
a) 66.
b) 69.
c) 72.
d) 74.
e) 140.

7. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) A prefeitura de certo município formou com seus funcionários 3 comissões para examinar assuntos diferentes. Sabe-se que:

- há funcionários que participam de mais de uma comissão.
- cada comissão é formada por 15 funcionários.
- em cada comissão há 5 funcionários que não participam de mais nenhuma outra comissão.
- há 2 funcionários que participam das três comissões.

O número de funcionários que participam de, pelo menos, uma comissão é igual a
a) 29.

b) 31.
c) 36.
d) 39.
e) 43.

8. (FGV/CM TAUBATÉ/2022) Uma empresa disponibilizou 3 cursos de aperfeiçoamento para seus funcionários: o Curso A, o Curso B e o Curso C. Como o horário permitia, cada funcionário poderia se matricular em mais de um curso. Terminado o prazo de matrículas, verificou-se que 8 funcionários se matricularam no curso A, 10 no curso B e 12 no curso C. Havia 4 funcionários matriculados nos cursos A e B, 4 funcionários nos cursos B e C e, também, 4 nos cursos A e C. Sabe-se ainda que há 1 único funcionário matriculado apenas no curso A. O número de funcionários que estão matriculados em ao menos 1 curso é
a) 19.
b) 21.
c) 23.
d) 27.
e) 30.

9. (FGV/SEJUSP-MG/2022) Um grupo de 60 estudantes que se formaram juntos no Ensino Médio resolveu formar 2 grupos no WhatsApp: GP1 e GP2. Sabe-se que dos 60 estudantes, 7 resolveram não participar do GP1 nem do GP2 e que os números de participantes do GP1 e do GP2 são, respetivamente, 41 e 32. O número de estudantes que participam simultaneamente dos dois grupos é
a) 7.
b) 13.
c) 20.
d) 23.
e) 32.

10. (FGV/SEJUSP-MG/2022) Os conjuntos A, B e C possuem, cada um, 10 elementos e são tais que: A e B possuem elementos em comum, B e C possuem elementos em comum, mas A e C não possuem elementos comuns. Entre os elementos da união dos três conjuntos sabe-se que 8 elementos pertencem apenas ao conjunto A e 5 elementos pertencem apenas ao conjunto C. O número de elementos que pertencem apenas ao conjunto B é
a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

11. (FGV/SEFAZ-ES/2022) Em um grupo de 70 pessoas, há 50 capixabas e 40 torcedores do Vasco. Em relação a esse grupo de pessoas, é correto concluir que

A) no máximo 20 são capixabas torcedores do Vasco.

B) no mínimo 20 não são nem capixabas nem torcedores do Vasco.

C) exatamente 30 são capixabas não torcedores do Vasco.

D) no máximo 40 são capixabas torcedores do Vasco.

E) é possível que nenhuma delas seja capixaba torcedor do Vasco.

12. (FGV/MPE-GO/2022) Em um grupo de 48 pessoas, há 35 advogados e 32 policiais. Nesse grupo, o número mínimo de pessoas que são ao mesmo tempo advogados e policiais é

A) 13.

B) 16.

C) 19.

D) 32.

E) 35.

13. (FGV/SEMSA-MANAUS/2022) Em um grupo de 50 pessoas, 27 gostam de filmes de suspense e 32 gostam de filmes de terror. Com relação a essas 50 pessoas, é correto concluir que

A) no máximo 18 delas não gostam de filmes de suspense nem de filmes de terror.

B) exatamente 9 delas gostam tanto de filmes de suspense como de filmes de terror.

C) exatamente 18 delas só gostam de filmes de suspense.

D) exatamente 23 delas só gostam de filmes de terror.

E) no mínimo 18 delas gostam tanto de filmes de suspense como de filmes de terror.

14. (FGV/MPE-GO/2022) Uma empresa possui 32 funcionários que trabalham nos setores A, B e C. Sabe-se que 20 funcionários trabalham no setor A, 14 funcionários trabalham no setor B e 9 funcionários trabalham no setor C. Há funcionários que trabalham simultaneamente nos setores A e B, há funcionários que trabalham simultaneamente nos setores A e C, mas nenhum funcionário trabalha simultaneamente nos setores B e C. O número de funcionários que trabalha apenas no setor A é igual a

A) 4

B) 5

C) 6

D) 8

E) 9

15. (FGV/SEMSA-MANAUS/2022) Uma pesquisa foi feita com 40 funcionários de uma empresa e entre as perguntas havia as que estão abaixo:

- Você tem filhos?

- Você tem animal de estimação?

20 pessoas responderam SIM para a primeira pergunta.
15 pessoas responderam SIM para a segunda pergunta.
11 pessoas deixaram as duas perguntas em branco.

As instruções da pesquisa estabeleciam que deixar em branco significaria dizer NÃO. Sendo assim, o número de pessoas que possuem filhos e animais de estimação é igual a

A) 2.
B) 3.
C) 4.
D) 5.
E) 6.

16. (FGV/PC-RN/2021) Em um grupo de esportistas, 1/3 deles só gostam de vôlei e, dos demais, 2/5 gostam de vôlei e também de basquete. Todos os esportistas desse grupo gostam de, pelo menos, um desses dois esportes. Em relação ao total de membros desse grupo, a fração daqueles que só gostam de basquete é:

A) 2/3;
B) 2/5;
C) 3/5;
D) 4/15;
E) 1/15.

17. (FGV/IMBEL/2021) Os 38 empregados novos da fábrica de brinquedos BLIME estão passando por um treinamento inicial. Uma das tarefas do treinamento é a de assistir aos filmes A e B sobre o funcionamento de duas partes da fábrica. Em uma reunião com os novos empregados o coordenador perguntou a todos quem já tinha assistido aos filmes recomendados e ele percebeu, pelas respostas, que

- N pessoas assistiram ao filme A.
- 2N pessoas assistiram ao filme B.
- 3N pessoas não assistiram a nenhum dos dois filmes.

É correto concluir que o número mínimo de pessoas que assistiu aos dois filmes foi

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

18. (FGV/IMBEL/2021) Trinta estudantes praticam judô, natação e basquete, sendo que todos eles praticam pelo menos um desses esportes. Há 15 que praticam judô, 17 que praticam natação e 12 que

praticam basquete. Há 10 estudantes que praticam pelo menos dois esportes. O número de estudantes que praticam os três esportes é

A) 4.

B) 5.

C) 6.

D) 7.

E) 8.

19. (FGV/PM-AM/2022) Em um grupo de 45 soldados, 27 gostam de marchar e 38 gostam de praticar tiro ao alvo. Sejam:

X: o número de soldados desse grupo que gostam de marchar e também de praticar tiro ao alvo;
Y: o número de soldados desse grupo que não gostam nem de marchar nem de praticar tiro ao alvo.

Nesse caso, é correto afirmar que

A) X é no máximo 20.

B) Y é no mínimo 7.

C) quando X = 23, tem-se Y = 7.

D) quando Y = 7, tem-se X = 20.

E) quando Y = 5, tem-se X = 25.

20. (FGV/PREF. SALVADOR/2019) 50 atletas estão treinando e todos usam bermuda e camiseta do mesmo modelo, mas com cores diversas. Entre esses atletas há 20 com bermudas brancas, 25 com camisetas brancas e 12 com bermudas e camisetas brancas. Assinale a opção que indica o número de atletas que não estão vestindo nenhuma peça branca.

a) 5

b) 13

c) 15

d) 17

e) 20

21. (FGV/PREF. ANGRA/2019) Aos 5 anos, toda criança deve tomar um reforço das vacinas tríplice e pólio. Uma pesquisa feita com as 80 crianças que entraram no 1º ano do Ensino Fundamental de uma escola mostrou que:

- 54 alunos tomaram a vacina tríplice.
- 52 alunos tomaram a vacina pólio.
- 16 alunos não tomaram nenhuma das duas vacinas.

O número de alunos que tomou as duas vacinas é

a) 42.
b) 44.
c) 46.
d) 48.
e) 50.

22. (FGV/MPE-RJ/2019) Sobre os conjuntos A e B, sabe-se que:

- $(A - B)$ tem 7 elementos;
- A tem 28 elementos;
- A união de A e B tem 38 elementos

O número de elementos do conjunto B é:
a) 10;
b) 18;
c) 19;
d) 31;
e) 35.

23. (FGV/BANESTES/2018) Um conjunto tem 8 elementos, outro conjunto tem 9 elementos e a união deles tem 12 elementos. O número de elementos da interseção desses conjuntos é:
a) 1;
b) 2;
c) 3;
d) 4;
e) 5.

24. (FGV/COMPESA/2018) Em uma empresa trabalham 40 técnicos e todos falam português. Entre eles, há técnicos que falam inglês e há técnicos que falam alemão, porém, entre os que falam apenas um idioma estrangeiro, o número dos que falam inglês é o dobro do número dos que falam alemão. Sabe-se que 15 técnicos falam apenas português e que 4 técnicos falam tanto inglês quanto alemão. O número de técnicos que falam inglês é
a) 7
b) 11
c) 14
d) 18
e) 20

25. (FGV/BANESTES/2018) As equipes de Abel e de Nádia têm o mesmo número de funcionários. Cinco funcionários participam das duas equipes. Não há outros funcionários com essa característica. Juntando-se as duas equipes tem-se 41 funcionários ao todo. As equipes de Abel e de Nádia têm cada uma:

a) 26
b) 25
c) 24
d) 23
e) 22

Gabarito

1. LETRA B
2. LETRA D
3. LETRA B
4. LETRA B
5. LETRA A
6. LETRA A
7. LETRA A
8. LETRA A
9. LETRA C
10. LETRA C
11. LETRA D
12. LETRA C
13. LETRA A
14. LETRA E
15. LETRA E
16. LETRA B
17. LETRA D
18. LETRA A
19. LETRA E
20. LETRA D
21. LETRA A
22. LETRA D
23. LETRA E
24. LETRA D
25. LETRA D

LISTA DE QUESTÕES - FGV

Conjuntos Numéricos

1. (FGV/MEC/2009) Sejam X e Y dois números inteiros positivos. Se $X^2 + Y^2$ é ímpar, então se pode afirmar de maneira correta que:

A) X^Y é par.

B) Y^X é par.

C) XY é par.

D) $X - Y$ é par.

E)$X + Y$ é par.

2. (FGV/SEFAZ-MS/2006) O maior número inteiro que é menor que ou igual a -5,7 é:

A) -6

B) -5

C) -4

D) -3

E) -2

3. (FGV/ALESP/2002) Um número racional qualquer:

A) Tem sempre um número finito de ordens (casas) decimais.

B) Tem sempre um número infinito de ordens (casas) decimais.

C) Não se pode expressar em forma decimal exata.

D) Tem sempre como denominador um número diferente de zero.

4. (FGV/AL-MT/2013) Suponha que o valor da expressão $\frac{5x}{6} - \frac{x}{2}$ seja um número inteiro. O valor de x é necessariamente

A) positivo.

B) par.

C) múltiplo de 3.

D) múltiplo de 6.

E) múltiplo de 12.

GABARITO

1. LETRA C
2. LETRA A
3. LETRA D
4. LETRA C

Lista de Questões - FGV

Problemas

1. (FGV/BANESTES/2023) A quantidade de números inteiros e positivos formados por 2 algarismos cuja diferença vale 4 é igual a

A) 5.

B) 6.

C) 10.

D) 11.

E) 15.

2. (FGV/SEAD-AP/2022) A soma de dois números naturais é 33. O maior valor para o produto deles é

a) 271.

b) 271,75.

c) 272.

d) 272,25.

e) 273.

3. (FGV/IMBEL/2021) Sabe-se que a soma de dez números naturais é par. Em relação a esses dez números é correto afirmar que

A) todos são, obrigatoriamente, pares.

B) todos são, obrigatoriamente, ímpares.

C) pelo menos um deles é par.

D) a quantidade de números pares é ímpar.

E) a quantidade de números ímpares é par.

4. (FGV/MEC/2009) Sejam X e Y dois números inteiros positivos. Se $X^2 + Y^2$ é ímpar, então se pode afirmar de maneira correta que:

A) X^Y é par.

B) Y^X é par.

C) XY é par.

D) $X - Y$ é par.

E)$X + Y$ é par.

5. (FGV/SEFAZ-MS/2006) O maior número inteiro que é menor que ou igual a $-5,7$ é:

A) -6

B) -5

C) -4

D) -3

E) -2

6. (FGV/ALESP/2002) Um número racional qualquer:

A) Tem sempre um número finito de ordens (casas) decimais.

B) Tem sempre um número infinito de ordens (casas) decimais.

C) Não se pode expressar em forma decimal exata.

D) Tem sempre como denominador um número diferente de zero.

7. (FGV/AL-MT/2013) Suponha que o valor da expressão $\frac{5x}{6} - \frac{x}{2}$ seja um número inteiro. O valor de x é necessariamente

A) positivo.

B) par.

C) múltiplo de 3.

D) múltiplo de 6.

E) múltiplo de 12.

Gabarito

1. LETRA D
2. LETRA C
3. LETRA E
4. LETRA C
5. LETRA A
6. LETRA D
7. LETRA C

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.