

Aula 00 - Profº Juliano Pelegrin

*Conhecimentos Específicos p/
PETROBRAS (Téc de Inspeção de
Equipamentos Jr.) 2021 - Pré-Edital*

Autor:
Felipe Canella, Juliano de Pelegrin

30 de Agosto de 2020

Sumário

Apresentação e Cronograma do Curso	4
Estática.....	6
1 – Estática.....	7
1.1 – Conceitos	7
1.2 – Sistemas de forças.....	8
1.3 – Momento.....	11
1.4 – Equilíbrio	13
1.5 – Análise de estruturas.....	19
1.6 – Forças Distribuídas	27
1.7 – Momento de Inércia	33
1.8 – Vigas - Efeitos Internos.....	38
Dinâmica	42
1 - Introdução	42
2 - Cinemática de partículas	43
2.1 - Movimento Retilíneo.....	44
2.2 - Movimento Curvilíneo.....	46
2.3 - Movimento de um projétil	47
2.4 - Movimento curvilíneo: Coordenadas Tangencial e Normal	48
2.5 - Movimento absoluto dependente de duas partículas.....	52
2.6 - Movimento relativo usando eixos de translação.....	54
3 - Cinética das partículas.....	55
3.1 - Equações de movimento coordenadas retangulares	56



3.2 - Equações de movimento: Coordenadas Normais e Tangenciais	60
4 - Cinética de uma partícula: trabalho e energia	61
4.1 - Trabalho de uma força constante se deslocando ao longo de uma linha reta.....	62
4.2 - Trabalho de um peso.....	63
4.3 - Trabalho realizado por uma mola	64
4.4 - Princípio do Trabalho e Energia	64
4.5 - Potência e eficiência	66
4.6 - Forças Conservativas e energia potencial.....	67
4.7 - Conservação de energia	68
5 - Impulso e quantidade de movimento	70
5.1 - Princípio do impulso e quantidade de movimento linear.....	70
5.2 - Conservação da quantidade de movimento linear.....	73
5.3 - Impacto	74
6 - Cinemática do movimento plano de um corpo rígido.....	76
6.1 - Movimento plano de um corpo	77
6.2 - Translação	77
6.3 - Rotação em torno de um eixo	79
6.4 - Análise do movimento absoluto	83
6.5 - Análise de movimento relativo para determinação de velocidade	85
6.6 - Centro instantâneo de velocidade nula.....	90
6.7 - Análise do movimento relativo para a determinação da aceleração.....	92
7 - Cinética do movimento plano de um corpo rígido.....	93
7.1 - Momento de inércia de massa.....	93



7.2 - Equações de movimento plano geral.....	94
7.3 - Trabalho e Energia.....	95
Considerações Finais	97
Bateria de Questões Comentadas.....	97
CESGRANRIO.....	97
Outras bancas.....	126
Lista de Questões	164
CESGRANRIO.....	164
Outras bancas.....	175
Gabarito	191
Resumo	192
Estática	192
Dinâmica.....	194



APRESENTAÇÃO E CRONOGRAMA DO CURSO

Olá, meus caros amigos do Estratégia Concursos, tudo bem?

É com imensa satisfação que iniciamos hoje o nosso “**Curso para Técnico(a) de Inspeção de Equipamentos Jr**”. Antes de mais nada, gostaríamos de nos apresentar.

Prof. Juliano

*Eu sou o **Juliano de Pelegrin**, engenheiro mecânico graduado pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR. Durante a minha graduação realizei intercâmbio nos EUA, onde estudei durante um ano, na ASU - Arizona State University.*

Atualmente estou cursando mestrado em engenharia elétrica, também pela UTFPR. Durante dois anos atuei no ramo da engenharia, na indústria, trabalhando com manutenção mecânica e inspeções em caldeiras e vasos de pressão. Há aproximadamente um ano comecei, paralelamente aos meus estudos e trabalho de engenharia, a me envolver com concursos públicos iniciando na produção de Vade-Mécuns e compilação de materiais para o Estratégia Concursos. Atualmente resido no município de Cascavel, no Estado do Paraná e sou professor do Estratégia Concursos.

Prof. Felipe

*Eu sou **Felipe Canella**. Sou formado em Engenharia de Produção Mecânica pelo Centro Universitário da FEI e mestre em Engenharia de Produção. Atuei em empresas como a Scania na área de Purchasing e na Johnsons&Johnsons na área de Trade Marketing. Além disso, passei no programa de trainee da Riachuelo em um processo de mais de 40 mil inscritos para 10 vagas, ao passo que concluía meu Mestrado em Engenharia de Produção na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.*

*Continuando com meus estudos, fui aprovado no concurso do TRE-PR, para Técnico Judiciário Administrativo, meu segundo concurso (ficando em 208º – longe, mas fiquei), o que para mim foi uma vitória (rs). Continuei estudando e fiquei em 12º em Agente Legislativo na Câmara Municipal do Guarujá, mas cometi um “erro amador” na segunda fase e fui eliminado (nem só de felicidade vivemos, não é?). Todavia, posteriormente, **SEM DESISTIR**, alcancei o 6º lugar para Assistente em Administração pública para Câmara de Cubatão.*

Estrategista, essa breve introdução com o nosso passado e história é para vocês entenderem que concursos é... **CONSTÂNCIA EM SEU OBJETIVO!**



Podemos, às vezes, cometer erros infantis (como eu já cometi e já presenciei colegas cometendo, também). Entretanto, você não pode se deixar abater, pois isso acontece com TODO MUNDO. Mantenha a calma, a paciência e saiba que tudo vai dar certo! Estude e siga nossas dicas para alcançarmos juntos esse nosso objetivo: **a sua aprovação!**

Este curso é um material com o **máximo de imagens** possível, para que as aulas sejam claras, mas **sem perder a objetividade**. Afinal, a intenção é trazer um curso vertical abordando somente o que já foi exigido, ou possa vir a ser, em concursos de engenharia.

Para isso, todo o nosso **curso** é elaborado **baseado em fontes consagradas** da engenharia mecânica, em que é feita uma abordagem teórica de cada assunto seguida por exercícios, retirados de provas de concursos passados, comentados. **Fique atento aos comentários das questões**, pois estes podem vir a complementar a teoria podendo se tornar um diferencial em sua preparação.

Sem mais delongas, deixaremos aqui nossos contatos pessoais para quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões que possam surgir. Lembre-se, caro(a) concurseiro (a), **estamos aqui** para lhe dar o **suporte que você precisa para passar no seu concurso!** Sinta-se à vontade para nos contatar.

Para **tirar dúvidas** e ter **acesso a dicas e conteúdos gratuitos**, acesse nossas redes sociais:

Instagram - [@profjulianodp](#)

E-mail – profjulianodp@gmail.com

Instagram - [@prof.canelas](#)

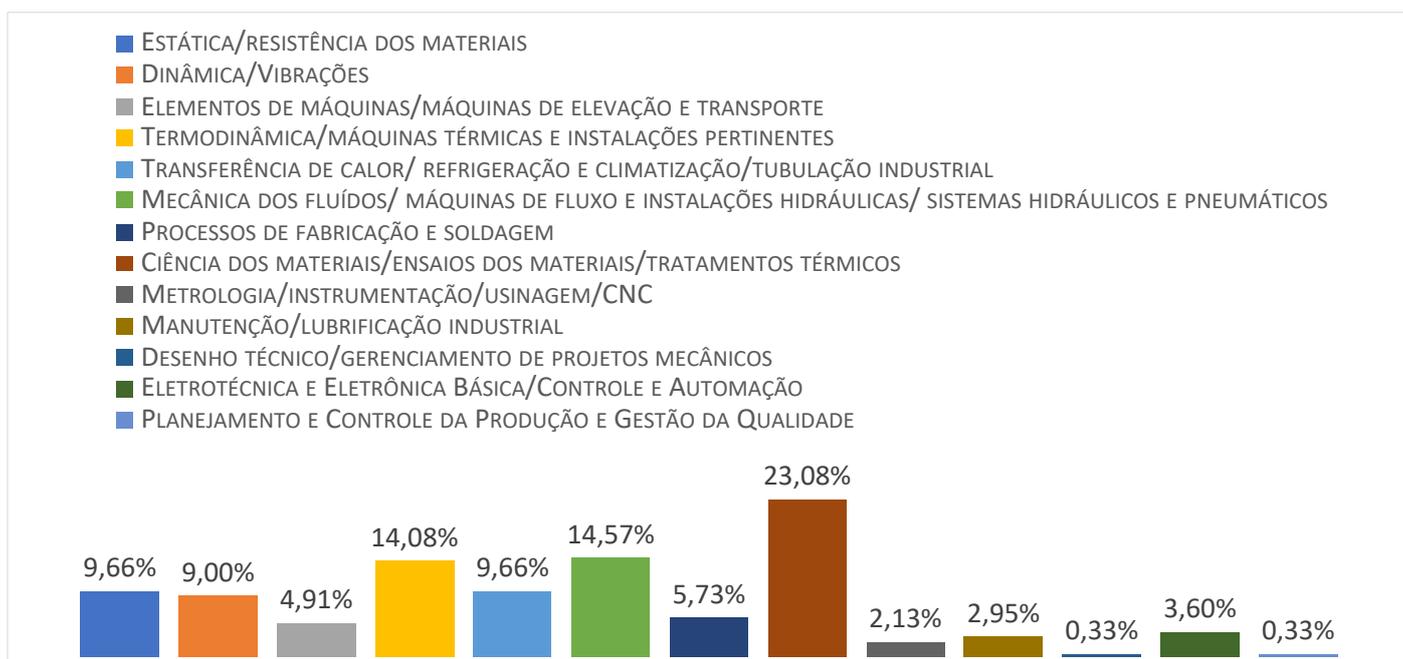
E-mail - canellas100@gmail.com

Apresentamos agora para vocês o **cronograma** de nosso curso e a seguir um **Raio-X Estratégico da banca CESGRANRIO** com as porcentagens dos assuntos já cobrados em concurso e que já foram exigidos pela banca. Assim você poderá ter uma ideia de quais são as **aulas mais abordadas** pelos examinadores e decidir em quais o seu **foco deve ser redobrado**.

AULA	TÓPICOS ABORDADOS	DATA
Aula 00	Estática. Dinâmica	30/08
Aula 01	Desenho Técnico	15/09
Aula 02	Metrologia. Sistema Internacional de Unidade. Medição de temperatura e suas escalas/ Conversão de Unidades.	30/09



Aula 03	Aço Carbono – Diagrama de Equilíbrio. Soldagem – Eletrodo revestido e TIG;	15/10
Aula 04	Eletricidade básica; Ondas mecânicas e eletromagnéticas.	30/10
Aula 05	Transferência de calor; Dilatação térmica.	15/11
Aula 06	Processos de Fabricação e Soldagem	30/11
Aula 07	Mudanças de Estado e Calorimetria	15/12



Os tópicos do raio X estão divididos por grandes áreas, mesmo assim é possível se ter uma ideia da tendência de cobrança da banca. Também recomendamos, que você **se polície** para estudar **TODAS as aulas** com dedicação e aqueles assuntos que você tem mais dificuldade ou não goste muito, pois às vezes inconscientemente deixamos de lado esses temas.

Apresentações realizadas, cronograma analisado, vamos ao que interessa! Na próxima página, iniciaremos o nosso curso com a aula 00! Vamos lá?

ESTÁTICA

Caro(a) concurseiro(a), nada melhor para iniciarmos o nosso curso de engenharia do que estudarmos a mecânica geral, não concorda?! A mecânica é uma ciência que trata dos efeitos de forças sobre objetos. Para termos um melhor embasamento podemos definir a **mecânica** como um ramo das ciências físicas que **lida do estado de repouso e movimento de corpos sujeitos à ação**



de forças.¹ Em nosso curso estudaremos a princípio a mecânica dos corpos rígidos. Posteriormente, de acordo com o desenvolvimento do curso, abordaremos a mecânica dos corpos deformáveis e mecânica dos fluidos.

Nesta aula, iremos abordar a **mecânica dos corpos rígidos estáticos** em conjunto com a **Dinâmica**. Devemos passar pelo estudo da mecânica geral estática para posteriormente desenvolvermos nosso conhecimento na mecânica geral dinâmica. Vamos iniciar pelo o estudo da estática, bora lá?

1 – Estática

A primeira subdivisão da mecânica dos corpos rígidos que iremos estudar é a **estática**. Esta, aborda o **equilíbrio dos corpos em repouso**. Alguns autores gostam de adotar a estática como um caso especial da dinâmica, pois esta pode ser considerada um caso onde não há aceleração, contudo devemos estudá-la separadamente, pois muitos projetos de objetos são desenvolvidos para se manterem parados, ou tecnicamente falando em equilíbrio.

Vamos iniciar estudando alguns conceitos a respeito da estática e sequência passaremos a estudar os seguintes tópicos: força; momento; equilíbrio; análise estrutural, momento de inércia, centróide, atrito e forças distribuídas.

1.1 – Conceitos

Para começarmos a entender um pouco mais sobre a estática e, como está é cobrada em concursos públicos, iniciaremos o aprendizado com alguns conceitos básicos:

Força: basicamente é uma **grandeza vetorial** sendo a ação de um objeto (corpo) sobre outro. Normalmente tende a mover o objeto na direção para qual está age.

Espaço: **região geométrica** a qual os corpos ocupam. As posições dos objetos são definidas no espaço, a partir da origem, através de medidas lineares e angulares dentro de um sistema cartesiano que pode ser de duas ou três dimensões.

Massa: grandeza que demonstra a **quantidade de matéria** de um corpo, sendo está a sua resistência a variação de velocidade. A massa é uma grandeza muito presente nos problemas de estática.

Partícula: é um corpo com dimensões desprezíveis, sendo um **elemento infinitesimal** de um corpo.

¹ R.C. Hibbeler – Mecânica para engenharia.



Corpo rígido: é aquele cujo as propriedades do material não precisam ser consideradas na análise das grandezas físicas que atuam sobre ele. Quando analisamos problemas que envolvem mecanismos de grande porte ou com boas propriedades mecânicas, as **deformações** que podem ocorrer no objeto são **desprezadas** por serem relativamente pequenas, assim podemos denominar este objeto como um corpo rígido.

Conhecidos alguns conceitos, no próximo tópico abordaremos os sistemas de forças.

1.2 – Sistemas de forças

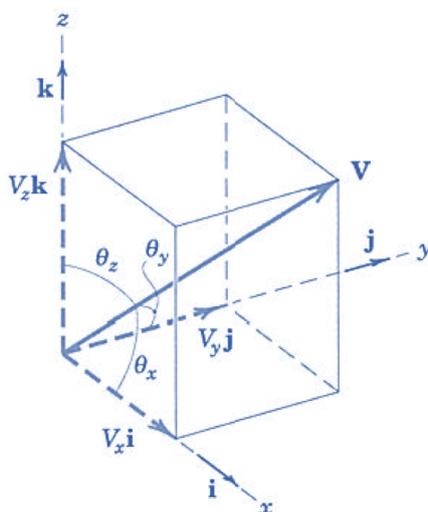
Antes de começarmos o estudo dos sistemas de forças envolvidas na mecânica geral estática, vamos relembrar rapidamente o conteúdo de grandezas escalares e vetoriais.

Na mecânica utilizamos dois tipos de grandezas que são as escalares e as vetoriais. Alguns exemplos de **grandezas escalares** são: tempo, volume, massa, densidade... e o que elas tem em comum? Todas são definidas apenas como **um valor**. Já as grandezas vetoriais, além de possuírem um valor possuem direção, alguns exemplos de grandezas vetoriais são: velocidade, aceleração, força... além disso o módulo das grandezas vetoriais é um escalar. Os vetores podem ser decompostos em componentes relativas ao sistema de coordenadas cartesianas, logo podemos representar um vetor V da seguinte forma:

$$V = V_x i + V_y j + V_z k$$

Onde i , j e k são vetores com valores unitários nas direções x , y e z respectivamente.

Os **valores das componentes** de um vetor podem ser calculados através dos **cossenos diretores**, de acordo com a imagem abaixo, onde o vetor é representado graficamente por uma flecha, que define sua intensidade, direção (ângulo) e sentido. Vejamos:



Fonte: J.L. Meriam e L.G. Kraige, 2008



Assim podemos definir as componentes do vetor da seguinte maneira:

$$V_x = V \cdot \cos(\theta_x); V_y = V \cdot \cos(\theta_y); V_z = V \cdot \cos(\theta_z)$$

E, por fim, o módulo do vetor também pode ser obtido pela seguinte expressão:

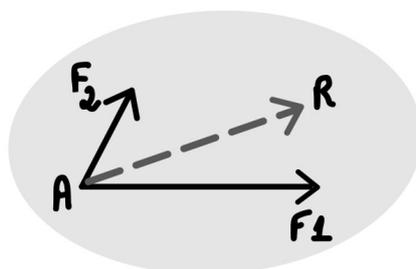
$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

Agora que retomamos alguns conhecimentos básicos a respeito de grandezas escalares e vetoriais passamos ao estudo das forças que atuam em equipamentos de engenharia e estruturas. Aconselho a **resolução** de diversos exercícios neste tópico, você precisa ficar afiado em **TODO este tópico**, pois isto ajudará no estudo de análise de tensões, nesta aula, projeto de máquinas e escoamento de fluídos em aulas futuras.

Antes de abordarmos um conjunto de forças devemos conhecer as propriedades de uma única força. Para especificarmos completamente a ação de uma força precisamos conhecer seu módulo, direção e ponto de aplicação. Uma força aplicada a um suporte causa efeitos de reação (não demonstrado) do suporte em direção contrária ao da força. Conforme a terceira Lei de Newton a atuação de uma força é sempre respondida por uma reação igual e oposta.

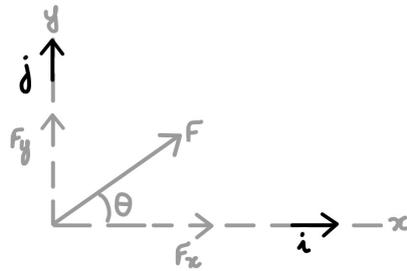
As **forças** podem ser **concentradas ou distribuídas**, usualmente, como as dimensões da área são muito pequenas em relação ao tamanho total do corpo analisado, adotamos a força como concentrada em apenas um ponto para análise. A **unidade padrão** da força em unidades do SI é o **Newton** (N) no sistema inercial e o **quilograma-força** (kgf) no sistema gravitacional.

Como qualquer grandeza matemática podemos realizar operações com vetores como multiplicação por escalar, adição, subtração e decomposição. A figura abaixo exemplifica a resultante R obtida, através da soma dos vetores F1 e F2.



Quando abordamos a decomposição bidimensional de um vetor de força, aplicamos a **regra do paralelogramo**, onde o **vetor F** pode ser escrito como a **soma entre** as respectivas **componentes** X e Y. Os componentes escalares podem ser de grandeza positiva ou negativa de acordo para qual quadrante F aponta. A figura abaixo representa a regra do paralelogramo onde os valores de cada componente do vetor F podem ser calculados pelas seguintes equações:



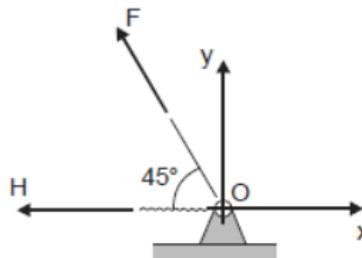


$$F_x = F \cdot \cos \theta ; F_y = F \cdot \sin \theta ; F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} ; \theta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right)$$

Como exemplificado anteriormente a força é uma grandeza que pode ser representada por um vetor com valor e direção em mais de um sentido. Além de podermos combinar forças, usualmente necessitamos **decompor uma força** em suas componentes vetoriais, para então resolvermos determinadas questões em que se exige a determinação da resultante entre mais de uma força.



(FCC/METRO-SP – 2016) Considere o vínculo e o referencial xOy abaixo representados.



No ponto O atuam as forças $F=20\sqrt{2}\text{N}$ e $H=10\text{N}$. A projeção da resultante destas forças nos eixos x e y, segundo a orientação estabelecida para os eixos x e y, respectivamente, é

- a) $R_x = -10\text{N}$; $R_y = 10\text{N}$.
- b) $R_x = 30\text{N}$; $R_y = -20\text{N}$.
- c) $R_x = -30\text{N}$; $R_y = 20\text{N}$.
- d) $R_x = 30\text{N}$; $R_y = 20\text{N}$.
- e) $R_x = -10\text{N}$; $R_y = -20\text{N}$.

Comentário:

Questão simples e objetiva onde temos duas forças atuando sobre o ponto O. A primeira força F, como podemos notar, possui **uma inclinação** de 45° , isto é um indicativo que ela possui **duas**



componentes tanto no eixo X como no eixo Y. A força H possui a mesma direção do eixo cartesiano X não possuindo inclinação relativa a este e sendo perpendicular ao eixo Y, portanto ela possui componentes $H_x = -10 \text{ N}$, $H_y = 0 \text{ N}$.

Para se **decompor a força F** devemos encontrar as componentes F_x e F_y que são obtidas através da multiplicação do módulo da força pelos **cossenos diretores**, que coincidentemente neste caso é igual em relação ao eixo X e ao eixo Y. Assim, para $F = 20\sqrt{2} \text{ N}$ temos que:

$$F_x = F \cdot \cos(45^\circ) = 20 \text{ N}; \quad e \quad F_y = F \cdot \sin(45^\circ) = 20 \text{ N}$$

Onde F_x possuirá sinal negativo por estar no sentido contrário ao usualmente adotado na convenção de sinal (primeiro quadrante positivo). Por fim, conhecidas as componentes de cada força, devemos realizar a adição das componentes vetoriais para se encontrar o valor da resultante $R = F + H$. Somando as componentes X e Y de F e H temos o seguinte: $R_x = -20 - 10 = -30 \text{ N}$ e $R_y = 20 + 0 = 20 \text{ N}$.

Portanto a projeção resultante das forças em relação ao ponto O é $R_x = -30 \text{ N}$ e $R_y = 20 \text{ N}$. Logo a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.

Conhecidas a grandeza força vamos ao estudo do momento, que nada mais é que atuação de uma força sobre um objeto tendendo a girar este em relação a um eixo.

1.3 – Momento

Quando aplicamos uma força perpendicular à superfície de uma porta, sobre a maçaneta, estamos ocasionando um **momento** em relação as dobradiças desta. Agora pense em abrir a porta, exercendo uma força no meio desta, entre a dobradiça e a maçaneta, a força que deve ser aplicada é maior pois a **distância até o ponto** que está sendo aplicado o momento é menor.

O momento também conhecido como **torque** está presente em diversas situações de nosso cotidiano, como o ato de desaparafusar a roda do carro quando precisamos trocar o pneu. Exercemos uma **força** sobre a chave de boca, **a uma distância** do parafuso, ocasionando um momento sobre a porca do parafuso. Esta tendência a rotação é conhecida como momento.

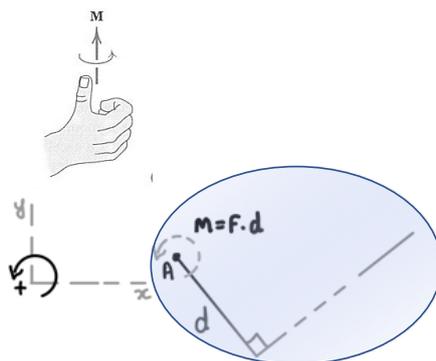
O **momento** é um vetor M sempre **perpendicular** ao plano do corpo. O sentido deste depende da direção para qual a força F aplicada, a uma distância (d), tende a girar o corpo. Com isso, o **módulo do momento** é proporcional ao módulo da força e a distância (d), também conhecido como **braço da alavanca**. Definimos o módulo do momento através da seguinte expressão:

$$M = F \cdot d$$

Para definirmos o **sentido do momento**, utilizamos a **"regra da mão direita"** onde o momento F em torno de um ponto O é definido como um vetor no sentido do polegar e o sentido de giro é representado pelos dedos curvados. Normalmente como convenção adotamos o



momento no sentido **anti-horário como positivo**. A **unidade** básica do momento é **newton-metro** (N.m.). Vejamos a figura abaixo que exemplifica a regra da mão direita:



Muitas questões envolvendo momento bidimensional e tridimensional é apropriado adotar um enfoque vetorial para o cálculo. Sendo assim, a **análise vetorial cartesiana** é usada frequentemente para solucionar questões em **três dimensões**, em que a direção positiva dos eixos x, y e z é definida pelos vetores cartesianos unitários i, j e k respectivamente. Para se determinar a resultante de um sistema de forças concorrentes, devemos expressar cada uma das forças como um vetor e somar suas componentes i, j e k.

Para facilitarmos a resolução de questões trabalhamos com vetores, assim o momento de uma força em notação vetorial, pode ser obtido através do determinante entre as coordenadas x, y e z do ponto r a partir do ponto O e as componentes das forças em cada direção. Vejamos:

$$M_o = r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Em questões de **duas dimensões**, é apropriado adotar o **princípio dos momentos**, também conhecido como **teorema de Varignon**, o qual determina que o momento de uma força em relação a um ponto é igual à **soma dos momentos** dos componentes **da força em relação ao ponto**.



(FEPES/CELESC - 2018) Uma força aplicada no espaço possui as componentes $F_x = 220 \text{ N}$, $F_y = 140 \text{ N}$ e $F_z = 80 \text{ N}$, sendo aplicada num ponto definido pelas coordenadas $x = 0,4 \text{ m}$, $y = 0,8 \text{ m}$ e $z = 1,2 \text{ m}$.

O momento resultante (M_o) dessa força com relação à origem do sistema de coordenadas é dado por:



- a) $M_o = (-88i - 112j + 96k) \text{ Nm}$.
- b) $M_o = (-104i + 232j - 120k) \text{ Nm}$.
- c) $M_o = (332i + 296j + 232k) \text{ Nm}$.
- d) $M_o = (104i - 232j + 120k) \text{ Nm}$.
- e) $M_o = (88i + 112j + 96k) \text{ Nm}$.

Comentário:

Para resolvermos esta questão devemos realizar o produto vetorial através do determinante, composto pelo vetor unitário $(i \ j \ k)$, as coordenadas do ponto definido $(0,4 \ 0,8 \ 1,2)$ e o vetor força $(220 \ 140 \ 80)$, assim obtemos:

$$\begin{array}{ccccc} i & j & k & i & j \\ 0,4 & 0,8 & 1,2 & 0,4 & 0,8 \\ 220 & 140 & 80 & 220 & 140 \end{array}$$

Resolvendo o determinante:

$$= (0,8 \times 80i) + (1,2 \times 220j) + (0,4 \times 140k) - (0,8 \times 220k) - (1,2 \times 140i) - (0,4 \times 80j)$$

Por fim, para encontrarmos a M_o somamos os correspondentes obtendo: $M_o = (-104i + 232j - 120k) \text{ N.m}$. Logo a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.

Vamos ao estudo do equilíbrio em duas dimensões.

1.4 – Equilíbrio

Caro concurseiro, ao estudarmos a **estática** basicamente estamos analisando as condições necessárias para mantermos o **equilíbrio de forças** em máquinas e estruturas de engenharia. Sendo assim, o estudo do equilíbrio é a parte mais importante sobre a estática e serve também para a resolução de questões de dinâmica que serão abordadas na aula 01 de nosso curso.

Quando um corpo (estrutura) está em **equilíbrio** isto quer dizer que ele está **imóvel** e a resultante do somatório de todas as forças e momentos que atuam sobre este corpo são iguais a zero. Logo as condições necessárias para um corpo estar em equilíbrio são:

$$\sum F = 0 \text{ e } \sum M = 0$$

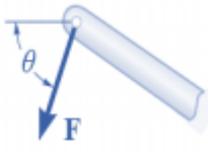
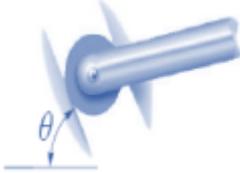
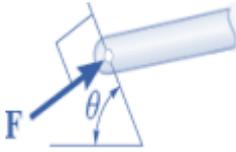
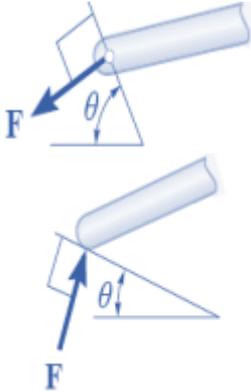
Apesar de todos os corpos serem tridimensionais, podemos tratá-los, em sua maioria, como bidimensionais quando as forças as quais estes estão submetidos atuam em um único plano ou podem ser projetadas em um plano somente, essa é uma facilitação muito empregada em questões de engenharia.

Antes de partirmos para aplicação dos equacionamentos acima descritos nas resoluções de questões é **fundamental** que você saiba **representar esquematicamente o sistema isolado como**



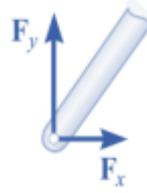
um **único corpo**, essa representação é denominada **diagrama de corpo livre (DCL)**. Esta é a primeira etapa e, a meu ver, a mais importante na solução de questões em mecânica.

Para montarmos um diagrama de corpo livre corretamente é necessária uma especificação completa de todas as forças conhecidas e desconhecidas que atuam no sistema analisado. Assim devemos saber os **tipos de ligação** entre estruturas e as reações causadas por cada um. Também é importante sabermos os **números de incógnitas envolvidas** em cada tipo de contato. Vejamos a tabela abaixo com os principais tipos de conexão:

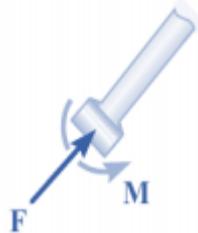
TIPO DE CONEXÃO (CONTATO)	REAÇÃO (AÇÃO SOBRE O CORPO A SER ISOLADO)	NÚMERO DE INCÓGNITAS
 Cabo		A força atua fora do membro na mesma direção do cabo sendo uma força trativa. Uma incógnita.
 Rolete		A reação atua perpendicular à superfície onde há o contato. Uma incógnita.
 Rolete ou pino confinado em ranhura sem atrito	 Ou	Uma incógnita. A reação causada atua no sentido perpendicular a ranhura.
 Superfície lisa		A força de contato é compressiva e normal a superfície. Uma incógnita. Em superfícies rugosas existirá uma força de atrito tangencial F e uma componente resultante R.



Pino

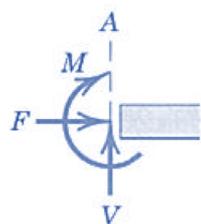
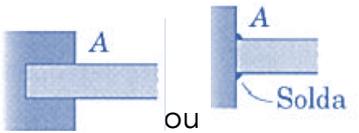


Duas incógnitas. As reações são duas componentes no eixos x e y. Quando o pino não tiver liberdade de rotação ele suportará um momento M também.



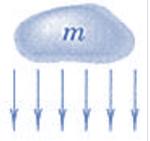
As reações são o momento M e a força normal à barra. Duas incógnitas.

Elemento fixo a colar deslizante em uma barra lisa



As reações em um engaste são: Força axial F, Força cortante V e momento fletor M. Três incógnitas.

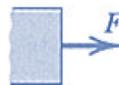
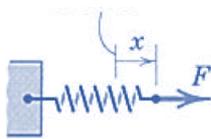
Apoio fixo ou engastado



$$W = m \cdot g$$

A força resultante de uma massa é o seu peso W, obtido pela multiplicação da massa e da atração da gravidade. Esta sempre será na direção do centro da terra passando pelo centro de massa G do corpo analisado. Uma incógnita.

Atração da gravidade



A força da mola é trativa se a mola estiver esticada e compressiva se estiver comprimida. A força da mola é obtida pelo produto de sua rigidez k e a distância x, $F = k \cdot x$. Uma incógnita.

Ação de uma mola

Agora conhecidos os principais tipos de reações exigidos em concursos, vamos definir um passo a passo para a composição de um diagrama de corpo livre.



DIAGRAMA DE CORPO LIVRE

1 - Definir os eixos x e y com orientação adequada

2 - Definir o sistema a ser isolado.

3 - Desenhar um diagrama que represente o contorno externo do sistema.

4 - Identificar todas forças, reações, suas intensidades e sentidos conhecidos e supor os desconhecidos.

Caro estrategista, é impreterível que na hora da resolução de questões você tenha em mente um enfoque lógico e sistemático incluindo os passos do DCL. Outra dica importante é sempre analisar o número de incógnitas e de equações independentes que você possui para a resolução. Por fim, sempre busque escolher o ponto de **aplicação de momento** em que passam o **maior número de incógnitas e forças possíveis**.

Não se esqueça de incluir no DCL TODAS as forças que possuem valores obviamente desprezíveis. A tabela abaixo exemplifica o diagrama de corpo livre de vários sistemas.

EXEMPLO DE SISTEMA

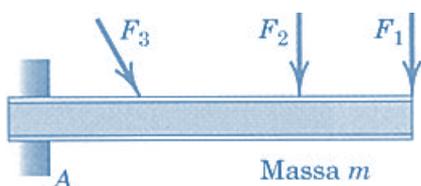
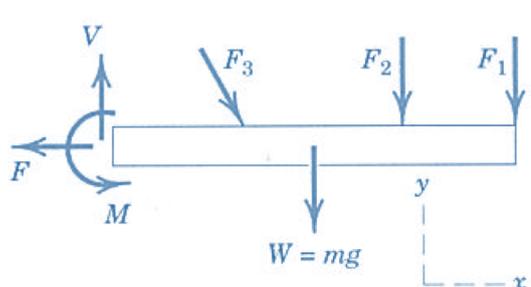
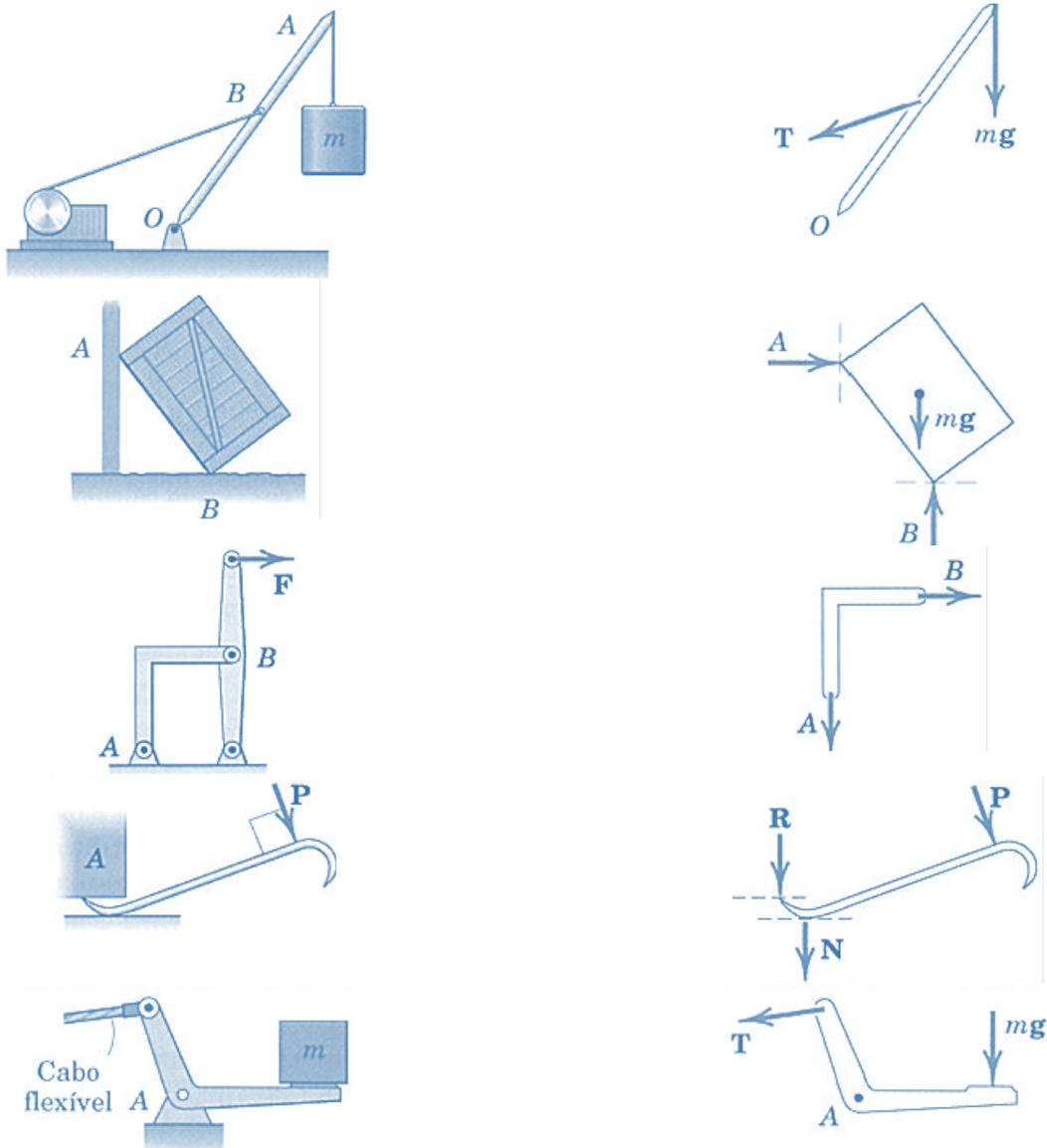


DIAGRAMA DE CORPO LIVRE



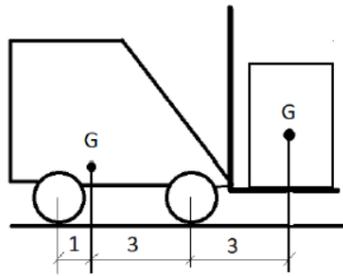


Fonte: J.L. Meriam e L.G. Kraige 2008



(FUNDATEC/ALERS-2018) A figura abaixo representa uma empilhadeira com peso de 1.200 kgf, carregando uma carga de 800 kgf. Assinale a alternativa que apresenta o valor mais aproximado da força de reação em cada um dos dois pneus dianteiros.

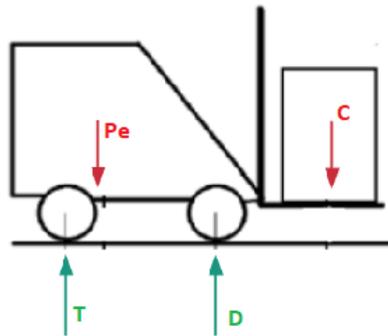




- a) 300 kgf.
- b) 630 kgf.
- c) 850 kgf.
- d) 1.200 kgf.
- e) 1.600 kgf.

Comentário:

Para a resolução da questão vamos iniciar com a montagem de nosso diagrama de corpo de livre. Como estamos trabalhando com um problema em um sistema bidimensional vamos adotar o eixo x e y com primeiro quadrante positivo. As forças irão atuar somente no sentido do eixo y devido ao fato de as forças pesos atuarem perpendicularmente ao chão, não havendo reações no sentido do eixo x. Logo o diagrama de corpo livre pode ser desenhado como:



Onde P_e é o peso da empilhadeira, C o peso da carga, T é a reação no conjunto de rodas traseiro e D é a reação no conjunto de rodas dianteiro. Constituído o DCL, nota-se que temos duas incógnitas T e D , portanto precisamos de duas equações independentes para solucionarmos o problema, assim devemos aplicar as seguintes equações de equilíbrio:

$$\sum F_y = 0 \text{ e } \sum M = 0$$
$$-P_e - C + T + D = 0 \text{ e } \sum M_T = 0 = -(P_e \cdot 1) - (C \cdot 7) + (D \cdot 4)$$
$$T = P_e + C - D \text{ e } D = \frac{7C + P_e}{4}$$

Nota-se que o momento foi aplicado no ponto T , logo as distâncias 1, 7 e 4 foram adotadas para as forças P_e , C e D respectivamente. Substituindo as incógnitas pelos valores correspondentes na equação obtemos $D=1700\text{kgf}$ e $T=300\text{kgf}$. Como no enunciado pede a reação em cada um dos



DOIS pneus dianteiros dividimos $1700/2$ e obtemos que a reação em cada pneu será de 850kgf. Logos a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.

Após a compreensão das equações de equilíbrio, vamos ao estudo de estruturas de engenharia. Caro estrategista, para um correto entendimento do nosso próximo tópico da aula é essencial que você possua de maneira clara, em sua mente, todos os conhecimentos dos tópicos estudados até aqui nesta aula. Caso ainda sinta que está faltando algo, recomendo que você resolva algumas questões na nossa bateria no fim da aula e após a compreensão dos temas anteriores retome o estudo a partir deste ponto.

Por favor, não hesite em me procurar em nosso fórum de dúvidas para que você não fique com dúvidas para trás. Borá para o estudo de treliças?!?!

1.5 – Análise de estruturas

Neste tópico iremos analisar as forças que atuam internamente em diversas estruturas de engenharia dando enfoque em treliças, suportes e máquinas. A análise das reações desconhecidas nestas estruturas, pode ser realizada através da correta concepção do diagrama de corpo livre e aplicação das equações de equilíbrio.



As **treliças planas** são basicamente formadas por **elementos delgados unidos** em suas extremidades. Alguns exemplos de treliças são: pontes (ao lado), tesouras de telhados, guindastes (gruas), entre outros. Diversos materiais podem ser utilizados para a montagem de treliças dentre eles destacam-se madeira e metais, sendo que a união dos pontos nas extremidades (nós) dos elementos podem ser via soldagem, rebites, pinos ou parafusos.

Uma **treliça simples** pode ser formada por **três barras unidas** por pinos em suas extremidades, constituindo uma estrutura rígida. A figura abaixo representa diversos tipos de configurações de treliças que podem ser exemplificadas como treliças planas.

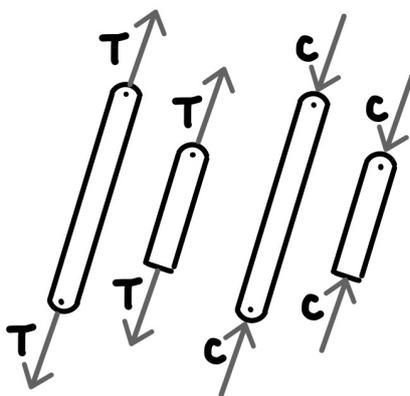




Fonte: Beer (2010)

Para analisarmos uma treliça é necessário a **obtenção da força** em **cada um de seus elementos**. Nelas todas as cargas são aplicadas aos nós e geralmente o peso dos elementos são desprezados, contudo quando o peso deve ser considerado é comum atribuí-lo como uma força vertical distribuída igualmente entre as extremidades de cada elemento. Por fim, devemos considerar que os elementos que compõe a treliça são interligados entre si por pinos lisos, assim cada elemento atua como uma barra de duas forças.

Se uma força tende a **alongar o elemento** é denominada força de **tração** se tende a **comprimi-lo** chamamos de força de **compressão**. Quando um elemento é comprimido, geralmente este deve ser mais espesso que um elemento tracionado, devido a flambagem que este pode sofrer. A figura abaixo representa forças de tração e compressão em elementos.



Força de tração (T) e força de compressão (C)

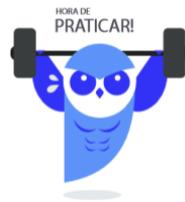
Lembre-se que um elemento sujeito a **tração** está **"puxando"** o nó e sujeito a **compressão** está **"empurrando"** o nó. Existem dois métodos para a análise de treliças que são: métodos dos nós e método das seções.



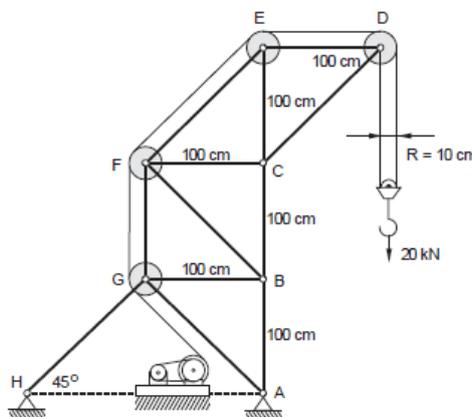
Método dos nós: através da consideração de **equilíbrio em um nó** da treliça a força sobre um elemento se torna externa em nosso DCL assim podemos aplicar as equações de equilíbrio nos eixos X e Y. Na utilização deste método primeiro devemos desenhar o diagrama de corpo livre dos nós e após aplicar as equações de equilíbrio em cada um.

No método dos nós devemos sempre começar a análise naquele que possui apenas uma força conhecida e não mais que duas desconhecida. Dessa forma aplicando as duas equações de equilíbrio ($\sum F_x = 0$ e $\sum F_y = 0$) teremos duas equações algébricas para duas incógnitas.

Para determinarmos o correto sentido de uma força indeterminada podemos admitir sempre que as forças indeterminadas dos elementos de um nó são de tração, assim com a correta solução numérica o **sinal positivo** irá indicar a **força sob tração** e um **escalar negativo** indicará um escalar **sof compressão**. Outra forma de determinar o sentido correto de uma força desconhecida é através da visualização (inspeção) dos sentidos das forças conhecidas atuantes e da percepção do sentido da força resultante para o sistema se manter em equilíbrio. Isto pode ser obtido através da prática, na resolução de questões.



(FCC/TRF-3ªRegião-2014) O guindaste da figura abaixo tem estrutura na forma de treliça, com polias de raio $R = 10$ cm em alguns nós. As barras verticais e horizontais têm comprimento 100 cm. O cabo tem uma extremidade fixa no ponto D e a outra em um tambor que é acionado por um motor através de uma transmissão.



A força na barra BC, em kN, quando a carga é 20 kN, é igual a

- a) 80.
- b) 40.



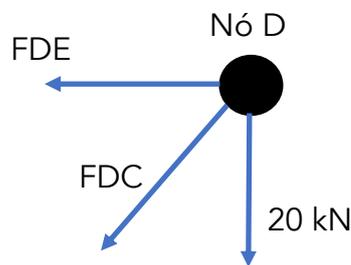
- c) 20.
- d) 41.
- e) 82.

Comentário:

Vamos aplicar o método dos nós para a resolução desta questão. Apesar de a banca trazer os dados dos raios das polias, este é um dado que não precisamos considerar para a resolução da questão, pois as reações nos pontos D e E, pinos da estrutura onde as polias estão fixadas, são iguais e opostas aos componentes de tração na corda da polia.

Lembre-se que devemos sempre **começar** a nossa análise nos **pontos onde temos uma força conhecida e não mais que duas desconhecidas**, portanto vamos começar analisando o nó D onde a carga é conhecida. Primeiramente vamos montar o DCL do nó D:

Aplicando as equações de equilíbrio em D e sabendo que o ângulo entre as forças é de 45° devido as barras serem iguais possuindo 100cm de comprimento, podemos decompor a força FDC em X e Y e assim obtemos:



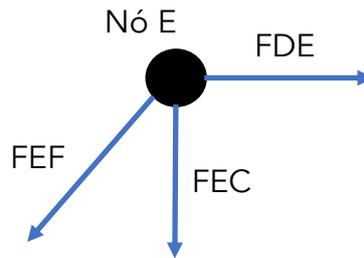
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -20 \text{ kN} - FDC_y = 0 \Rightarrow FDC_y = -20 \text{ kN (C)}$$
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -FDC_x - FDE = 0 \Rightarrow -\left(\frac{FDC_y}{\cos 45^\circ} \cdot \cos 45^\circ\right) - FDE = 0$$
$$-\left(\frac{-20 \text{ kN}}{\cos 45^\circ} \cdot \cos 45^\circ\right) - FDE = 0 \Rightarrow FDE = 20 \text{ kN (T)}$$

Note que adotamos as forças sempre “saindo” do nó e carregamos o sinal, positivo ou negativo, para toda a análise, pois quando este for positivo a força será de tração (T) e quando for negativo a força será de compressão (C).

Encontradas as forças em nosso nó D ainda não conseguimos analisar o nó C, o qual precisamos chegar para encontrar a nossa resposta, pois este terá quatro forças atuando e conhecemos até então apenas a força FDC. No entanto, podemos realizar a análise do nó E, pois neste conhecemos a força FED e temos duas incógnitas FEF e FEC. Vamos ao diagrama de corpo livre e análise do ponto E:

Similarmente ao realizado no nó D as equações de equilíbrio para encontrarmos os valores das duas forças desconhecidas. Vejamos:



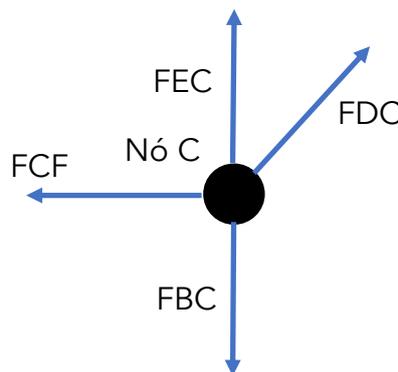


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow FDE - FEF_x = 0 \Rightarrow FEF_x = 20 \text{ kN. (T)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -FEC - FEF_y = 0 \Rightarrow -FEC - \left(\frac{FEF_x}{\cos 45^\circ} \cdot \cos 45^\circ \right) = 0 \Rightarrow FEC = -20 \text{ kN (C)}$$

Agora que conhecemos as forças FEC e FDC podemos analisar o nó C para encontrarmos a força na barra BC, que vamos chamar de FCB. Vamos ao DCL do ponto C:

Das equações de equilíbrio obtemos:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -FCF + FDC_x = 0 \Rightarrow -FCF + (-20 \text{ kN}) = 0 \Rightarrow FCF = -20 \text{ kN (C)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -FBC + FEC + FDC_y = 0 \Rightarrow -FBC + (-20 \text{ kN}) + (-20 \text{ kN}) = 0$$

$$FBC = -40 \text{ kN (C)}$$

Logo, a força que age sobre a barra BC é de 40kN, com natureza compressiva devido ao sinal, portanto a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.



As **treliças** são muito utilizadas em engenharia pois, suas **barras sofrem esforços axiais**, não havendo transmissão de momento fletor entre seus elementos. As forças são somente de tração ou compressão devido ao fato de todos os pontos que ligam os elementos serem livres de rotação.

Para que uma **treliça seja estável** ela deve satisfazer a seguinte equação:

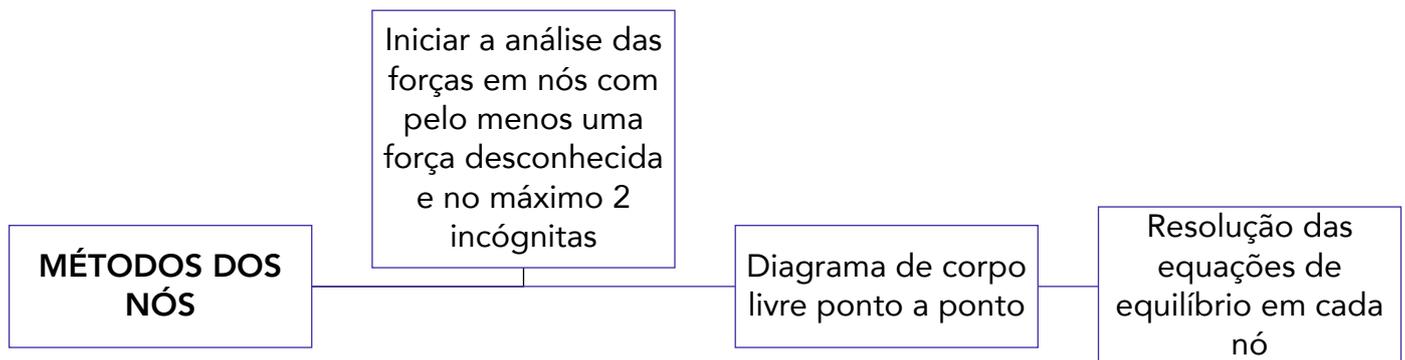


$$b \geq 2.n - 3$$

Onde b é o número de elementos que compõem a treliça e n é o número de nós.

Para análise estrutural de treliças também existe o **método das seções**. Este método parte do princípio de que se um corpo está em equilíbrio, qualquer parte deste também está em equilíbrio. Como o nome do método já diz, podemos utilizá-lo para **seccionar os elementos de uma treliça**. No entanto, como existem apenas três equações de equilíbrio devemos "cortar" uma seção por onde não passem mais do que três elementos com forças desconhecidas.

Este método pode ser mais **eficaz**, em **treliças de grande porte**, do que o método dos nós, pois não precisa ser realizada a análise em cada ponto de ligação dos elementos. No entanto cabe a você caro concurseiro, a escolha de qual método é o mais adequado para a resolução das questões na hora de sua prova. Como não há grande incidência de questões de treliças em provas de engenharia, acredito que dominando o **método dos nós**, que na minha opinião é **mais simples**, você já conseguirá acertar as questões sobre o tema. O método das seções será abordado mais adiante nesta aula nos estudos dos efeitos internos.



Por fim, o **método dos nós** desenvolvido para treliças planas também pode ser utilizado para **treliças espaciais**, satisfazendo a equação vetorial $\sum F = 0$, para cada nó. Nesse caso, podem estar envolvidas um grande número de equações, em que se torna necessário soluções computadorizadas.

Ainda dentro da análise de estruturas, vamos ao estudo de suportes e máquinas que são estruturas que possuem ao menos um **elemento multiforça**. Estes elementos recebem essa denominação por possuírem **três ou mais forças atuando** sobre si geralmente em direções



diferentes dos elementos, portanto não podemos utilizar o método das seções ou nós para realizar a análise destas estruturas.

Para uma resolução facilitada destes tipos de sistemas devemos realizar o diagrama de corpo livre da seguinte maneira:



Diagrama de Corpo Livre

1 - Isolar cada parte da estrutura/máquina e desenhar seu contorno, identificando todas as forças e/ou momentos que estão atuando e determinar o sistema de coordenada x e y . Podemos adotar o sentido de forças desconhecido, caso o sentido adotado for errado no final a intensidade ou momento será negativo.

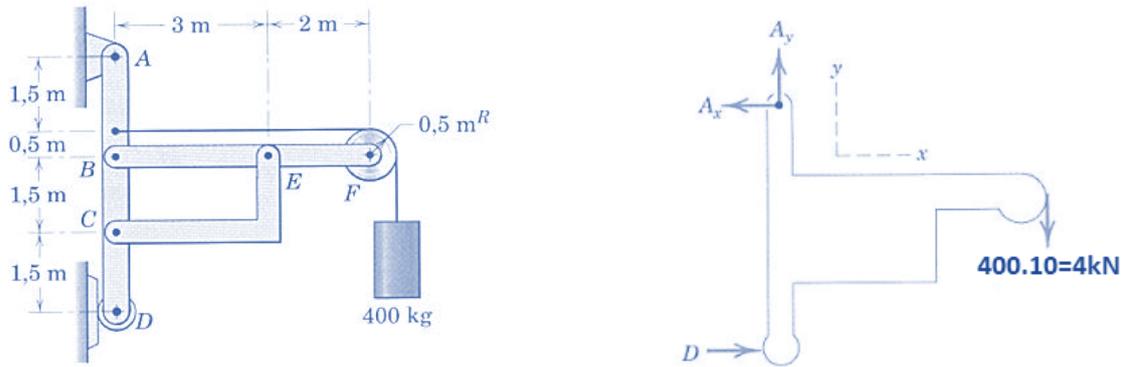
2 - Desmembrar o suporte e desenha o DCL de cada elemento.

3 - Conte o número de incógnitas e veja se bate com o número de equações de equilíbrio disponíveis (três no máximo). Aplique as equações de equilíbrio.

Some os momentos em relação a um ponto onde há o maior número de forças desconhecidas possíveis.

Vejamos um exemplo na figura abaixo onde temos um suporte sustentando uma carga. Desprezando os pesos dos elementos, vamos calcular **todas as forças** que atuam na estrutura, iniciando com o DCL da parte externa.





Fonte: J.L. Meriam e L.G. Kraige, 2008

Aplicando as equações de equilíbrio, e adotando a aceleração da gravidade igual 10m/s^2 , podemos determinar as **reações**, D , A_x e A_y .

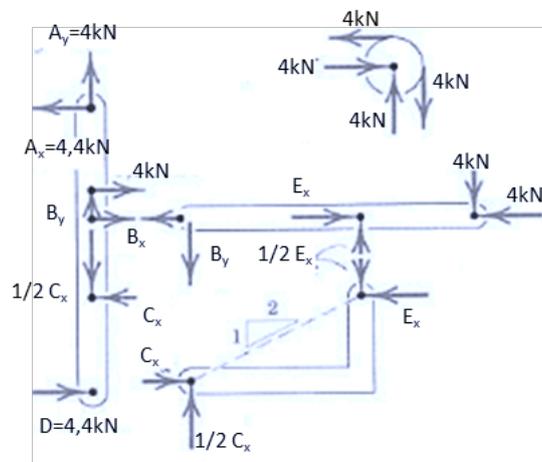
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -(400 \cdot 10) \cdot (2 + 3 + 0,5) + D \cdot (1,5 + 1,5 + 1,5 + 0,5) = 0 \Rightarrow D = 4,4\text{kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -A_x + D = 0 \Rightarrow A_x = 4,4\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 4\text{kN} = 0 \Rightarrow A_y = 4\text{kN}$$

DICA: lembre-se de adicionar a distância do raio da polia na hora de calcular o momento da força peso.

Em seguida devemos desmembrar cada elemento de nossa estrutura e montar os seus respectivos DCLs. Vejamos:



Fonte: Adaptado de J.L. Meriam e L.G. Kraige, 2008



Feito isso podemos aplicar as equações de equilíbrio em cada elemento e calcular todos os esforços do sistema. Analisando o elemento CE, aplicando as equações de equilíbrio obtemos as seguintes relações:

$$E_y = \frac{1}{2}E_x \text{ e } C_y = \frac{1}{2}C_x$$

O **componente CE** possui reações iguais e opostas, sendo um elemento de **duas forças**.

No diagrama de corpo livre da polia fica nítido que as **reações no ponto F** são iguais a carga de **tração no cabo**. Conhecidas algumas das forças, vamos a análise do elemento BF:

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow B_y \cdot 3 - 4kN \cdot 2 = 0 \Rightarrow B_y = 2,67kN$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +E_y - B_y - 4kN = 0 \Rightarrow E_y = 6,67kN \text{ logo } E_x = 13,34kN$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -B_x + E_x - 4kN = 0 \Rightarrow B_x = 9,34kN$$

Por inspeção notamos que os valores de E_x e C_x são iguais, assim podemos analisar o elemento AD que nos resta para descobrirmos se todos os esforços calculados na estrutura estão corretos. Para $T = \text{tração no cabo} = 4kN$, vejamos:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow +A_x \cdot 3,5 - B_x \cdot 1,5 + D \cdot 1,5 - T \cdot 2 = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -A_x + B_x + D + T - C_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -C_y + B_y + A_y = 0$$

Encerramos assim o estudo das estruturas de engenharia através do estudo de treliças e de estruturas, passamos ao estudo das forças distribuídas.

1.6 – Forças Distribuídas

Caro aluno(a), até o momento tratamos as forças em nossas aulas apenas como sendo concentradas em um único ponto. Como introdução a este tópico, vamos abordar as **forças de maneira distribuída** tentando abordar a real situação de contato. Basicamente existem **três tipos** de forças distribuídas, que são:

Distribuição linear: ocorre quando a força está **disposta ao longo de uma linha** como carga vertical em que a carga w possui a unidade de $[N/m]$.

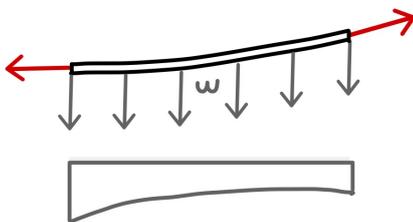


Distribuição em uma área: quando uma força está **disposta sobre uma área**, como a pressão que a água exercer sobre as paredes de um balde de água. A intensidade da força é dada em $[N/m^2]$.

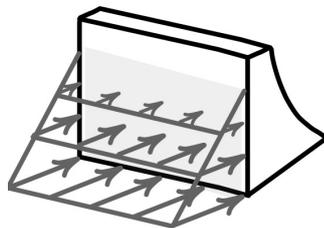
Distribuição Volumétrica: ocorre quando uma força está **distribuída sobre o volume** de um corpo. A força de corpo mais comum é a atração da gravidade. A Figura abaixo exemplifica os três tipos de forças distribuídas. Vejamos:



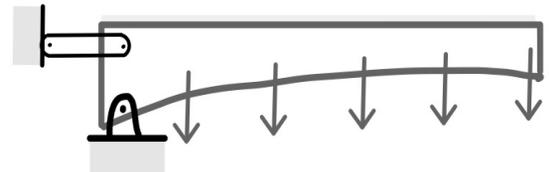
DISTRIBUIÇÃO LINEAR



DISTRIBUIÇÃO AO LONGO DE UMA ÁREA



DISTRIBUIÇÃO VOLUMÉTRICA



Antes de abordarmos a aplicação de forças distribuídas em corpos rígidos, e solucionarmos questões de concursos a respeito, devemos conhecer como se é determinado o **centro de gravidade** de um corpo.

Vamos abordar agora a determinação do **ponto em um corpo em que há atuação da força gravitacional**, analisando as propriedades geométricas associadas. Vamos iniciar pelo estudo do centro de massa que é um ponto hipotético onde existe a concentração de toda a massa de um sistema físico e que se movimenta como se todas as forças externas atuassem neste ponto.

Para determinarmos o centro de gravidade de um corpo, matematicamente, usamos o princípio dos momentos ao sistema paralelo das forças gravitacionais. Quando abordamos o campo gravitacional como uniforme e paralelo podemos adotar o centro de gravidade como o centro de massa de nosso corpo, assim podemos expressar as coordenadas do centro de massa como:

$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dm}{m} \quad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dm}{m} \quad \bar{z} = \frac{\int z \cdot dm}{m}$$

Para se expressar as equações das coordenadas da forma vetorial, adotando $r = xi + yj + zk$ e $\bar{r} = \bar{x}i + \bar{y}j + \bar{z}k$, a seguinte equação é utilizada:



$$\bar{r} = \frac{\int r \cdot dm}{m}$$

Em grande parte dos cálculos da posição do centro de massa via integral, podemos simplificá-los a partir da **correta escolha dos eixos de referência**. Também, quando existir linha ou plano de simetria em um corpo considerado homogêneo, um eixo ou um plano coordenado, estes devem ser considerados como referência.

Em questões de concursos existe uma maior incidência de questões abordando apenas formas geométricas. Nesse caso, adotamos o termo centróide como se fosse o centro de massa (expressão adotada quando falamos de um corpo físico real).



Quando a massa específica de um corpo não variar, sendo uniforme em todo o corpo, as posições do centro de massa e do centroide serão idênticas.

Uma vez que uma **figura ou um corpo** pode ser apropriadamente **dividido em mais de uma parte** cujos centro de massa sejam facilmente determinados, usamos o **princípio dos momentos** e adotamos cada uma dessas partes como um elemento finito do íntegro. Assim podemos encontrar as coordenadas do centro de massa de um corpo, na direção x, através do **somatório** de cada parte da seguinte forma:

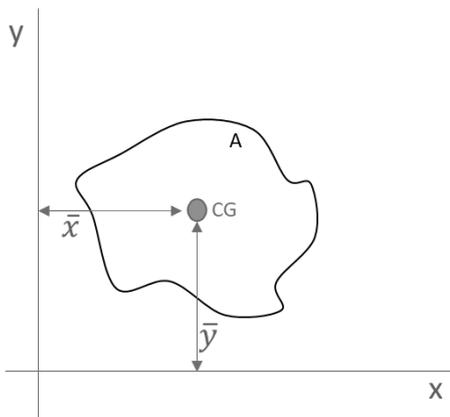
$$\bar{X} = \frac{m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + m_3\bar{x}_3 \dots}{(m_1 + m_2 + m_3 \dots)}$$

Onde \bar{X} é a coordenada x do centro de massa do corpo inteiro. Outra forma de expressar o somatório, em que as mesmas relações podem ser adotadas para as coordenadas y e z do centro de massa de um corpo é dada pelas seguintes expressões:

$$\bar{X} = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum m} \quad \bar{Y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m} \quad \bar{Z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m}$$

Relações similares podem ser utilizadas **para linhas, áreas e volumes compostos**, em que m é substituído por L, A e V respectivamente. Em questões de concursos, há maior incidência de cobrança de centróide para **áreas**. Vejamos uma representação em que o centroide de uma determinada área pode ser adotado como:





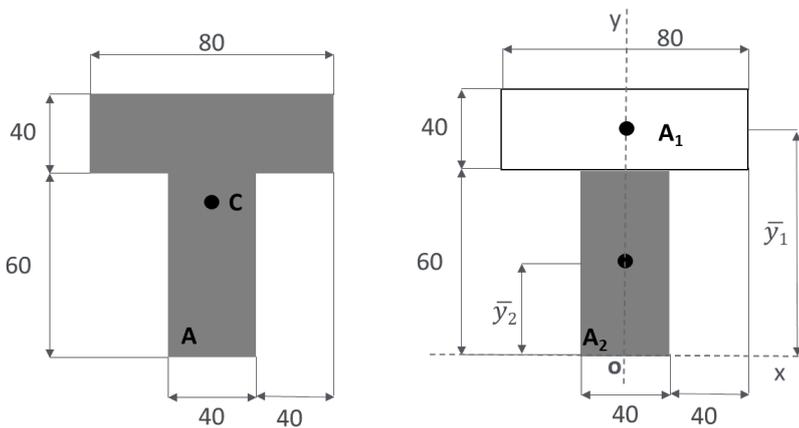
$$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dA}{A} \rightarrow \bar{X} = \frac{\sum \bar{x} \cdot A}{\sum A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y \cdot dA}{A} \rightarrow \bar{Y} = \frac{\sum \bar{y} \cdot A}{\sum A}$$



Quando um vazio ou cavidade forem tidos como elementos de um corpo ou figura composta, à massa correlata à cavidade ou ao vazio é abordada como uma quantidade negativa.

Vejamos um exemplo de como determinar o centróide de uma figura composta



Para determinarmos o **centróide** da área indicada, devemos adotar o **eixo de coordenadas** e dividi-la em dois retângulos. Conforme a figura ao lado.

Nota-se que o centróide está localizado no eixo y, pois este é um eixo de simetria. Portanto, $\bar{X} = 0$.

Adotando que as dimensões são em milímetros, sabendo que $\bar{y}_1 = 80mm$ e $\bar{y}_2 = 30mm$ vamos calcular a ordenada Y do centróide da área. Para **simplificarmos**, vamos utilizar uma **tabela** para a realização do cálculo:

	Área [mm ²]	\bar{y} [mm]	A. \bar{y} [mm ³]
A ₁	40.80 = 3200	80	256 x 10 ³
A ₂	40.60 = 2400	30	72 x 10 ³
	$\sum A = 5600$		$\sum A \cdot \bar{y} = 328 \times 10^3$



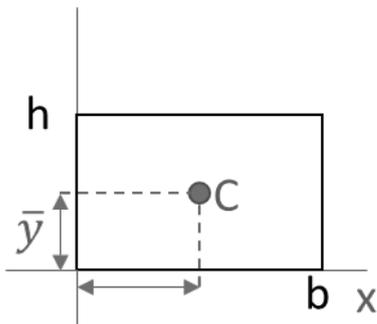
$$\bar{Y} = \frac{\sum A \cdot \bar{y}}{\sum A} = \frac{328 \times 10^3}{5,6 \times 10^3} = 58,6 \text{ mm}$$

Como visto no exemplo, usualmente **questões em provas** que envolvem centróide tratam a respeito de **figuras geométricas comuns** como triângulos, retângulos e círculos ou a combinação desses. Como o tempo médio para resolução de questões não pode ser muito grande a ponto de você realizar uma integração durante sua prova, você decorando as coordenadas X e Y desses elementos e sabendo realizar o cálculo das coordenadas C e Y do centróide de figuras compostas, poderá ser o suficiente para a resolução da grande maioria de questões envolvendo centróide de área.

Veamos a **tabela** abaixo que traz as propriedades das **três principais figuras planas**:

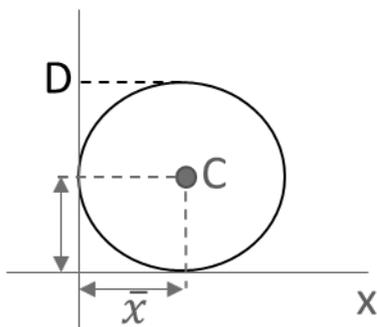
Retângulo

$$\bar{x} = \frac{b}{2} \text{ e } \bar{y} = \frac{h}{2} \rightarrow A = b \cdot h$$



Círculo

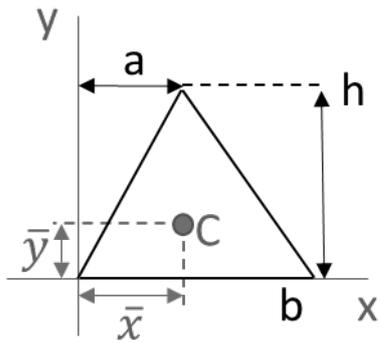
$$\bar{x} = \frac{D}{2} \text{ e } \bar{y} = \frac{D}{2} \rightarrow A = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2$$



Triângulo

$$\bar{x} = \frac{a+b}{3} \text{ e } \bar{y} = \frac{h}{3}$$



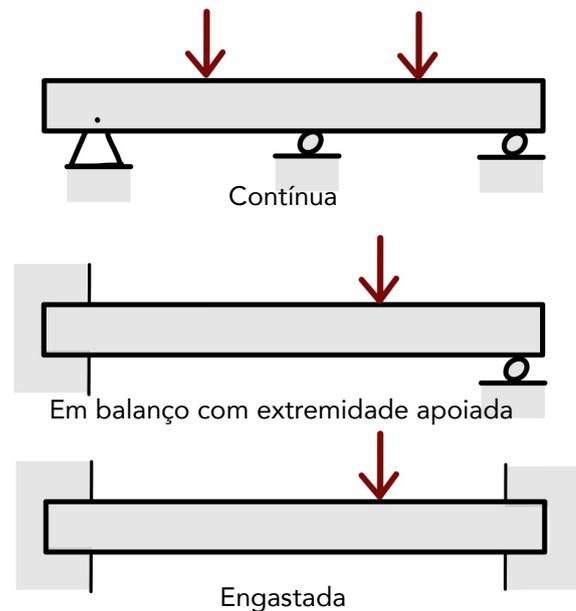
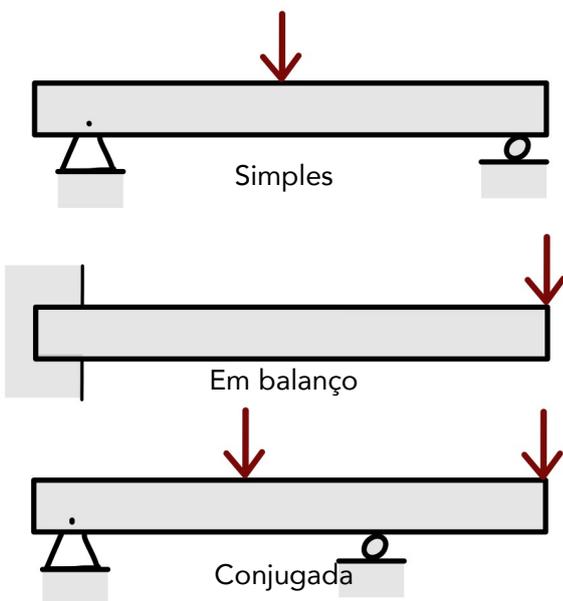


Agora que sabemos determinar o centro de massa de corpos, podemos analisar esforços em vigas com **cargas distribuídas**. Vigas são corpos estruturais que resistem a flexão devido a carga aplicadas, com certeza são os principais elementos estruturais existentes no mundo da engenharia.

Existem dois tipos de **classificação para as vigas** que são as **estaticamente determinadas e as estaticamente indeterminadas**. As vigas que se encontram apoiadas, de maneira que podemos calcular as reações aos seus apoios externos aplicando somente os métodos estudados até agora na estática, são chamadas de vigas estaticamente determinadas. Vigas que possuem mais pontos de apoios do que o necessário para que estejam em equilíbrio, são denominadas estaticamente indeterminadas. Vejamos alguns exemplos:

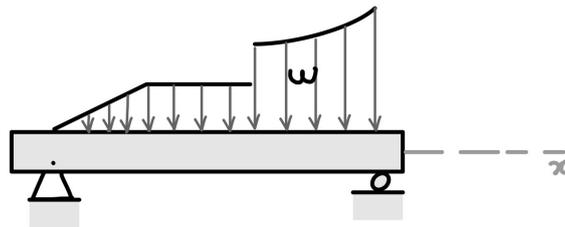
VIGAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS

VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS



Podemos também identificar as vigas pelos **tipos de carregamentos externos** a qual estão expostas. Estas podem sofrer cargas concentradas, como vistas na figura acima ou distribuídas, conforme a figura abaixo.



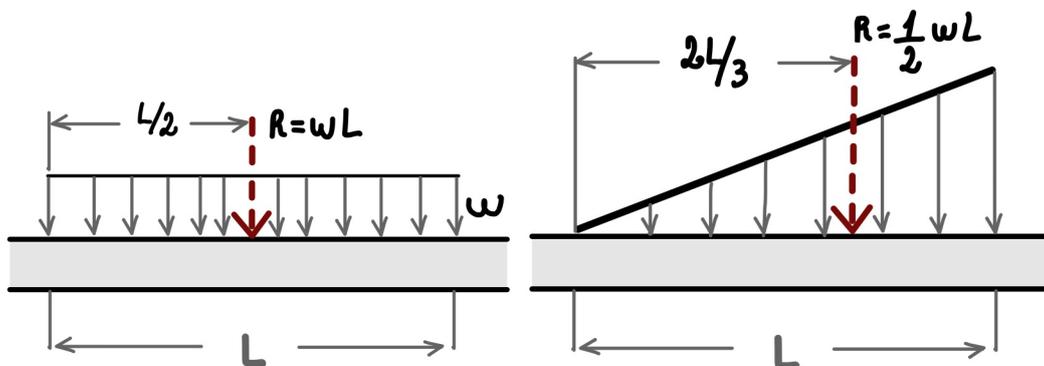


Por fim, a **força resultante da concentração** de uma força distribuída em uma viga sempre estará localizada no **centróide** da área em consideração. Portanto, podemos considerar uma carga distribuída concentrada em apenas uma resultante em um ponto e, assim, poderemos analisar os esforços em uma viga com carga distribuída através de análise estática direta.

A **resultante de uma distribuição de carga** é dada por:

$$R = \int w \cdot dx$$

Vejamos alguns **exemplos de resultantes** para alguns tipos de carregamento na **figura abaixo**, com a possibilidade de redução das cargas distribuídas para apenas um ponto, podemos analisar os esforços em uma viga através da análise estática.



Passaremos agora ao estudo do momento de inércia de figuras planas, tópico esse estreitamente relacionado a definição de centróide.

1.7 – Momento de Inércia

Na seção anterior, quando efetuamos o cálculo do centróide de uma área através da integral, consideramos o momento de primeira ordem da área em torno de um eixo. Em alguns casos no estudo da resistência dos materiais se torna necessário calcularmos a integral do **momento de segunda ordem** de uma área, que denominamos de **momento de inércia**. Para uma área inteira o momento de inércia é determinado pelas seguintes integrais:

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA$$



Didaticamente falando temos que em relação a uma superfície plana de área A referida a dois eixos coordenados x e y, a somatória integral dos produtos dos elementos de área dA pelos quadrados das suas distâncias ao eixo considerado é a definição de momento de inércia.

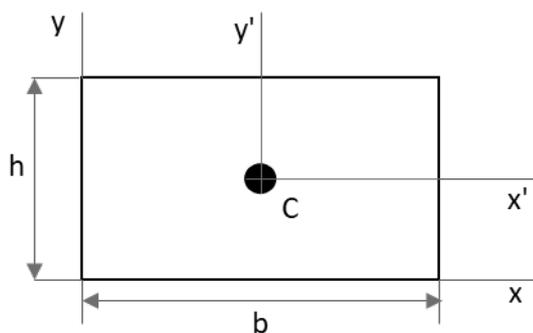
Também, em algumas situações, podemos nos deparar com a necessidade de expressar o momento de segunda ordem do elemento diferencial **em torno do polo O ou eixo Z**, que é chamado de **momento polar de inércia**. Vejamos:

$$J_o = \int r^2 dA = I_x + I_y$$

Onde r é a distância perpendicular entre o polo (eixo z) e o elemento dA.

Os **momentos de inércia sempre serão positivos** e suas unidades sempre serão em alguma unidade de comprimento elevada a quarta potência.

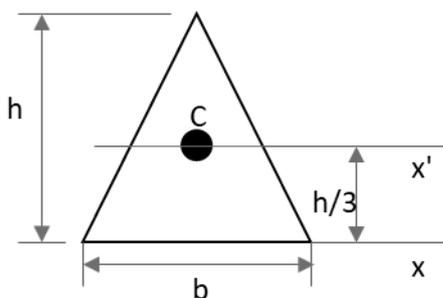
Prezado estrategista, como dito anteriormente, durante sua prova não é comum a necessidade da realização de integrais para a resolução de questões. Portanto, as **fórmulas para calcular o momento de inércia** de uma área simples, de figuras geométricas retangulares e circulares, devem ser **obrigatoriamente de seu conhecimento**. Vejamos a tabela abaixo onde temos os principais momentos de inércia.



$$I_{x'} = \frac{1}{12}bh^3; \quad I_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$$

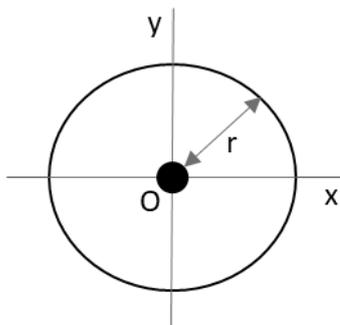
$$I_x = \frac{1}{3}bh^3; \quad I_y = \frac{1}{3}b^3h$$

$$J_c = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$$



$$I_{x'} = \frac{1}{36}bh^3; \quad I_x = \frac{1}{12}bh^3$$





$$I_x = I_y = \frac{1}{4} \pi r^4$$

$$J_o = \frac{1}{2} \pi r^4$$

Se o momento de inércia de uma área situada em torno de um eixo centroide for conhecido, é possível determinar o momento de inércia da área em torno de um **eixo paralelo** correspondente através do **TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS**. Esse teorema é muito utilizado na hora de calcularmos o momento de inércia de **áreas compostas**. As equações que definem o teorema dos eixos paralelos são:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2; \quad I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2; \quad J_o = \bar{J}_c + Ad^2$$

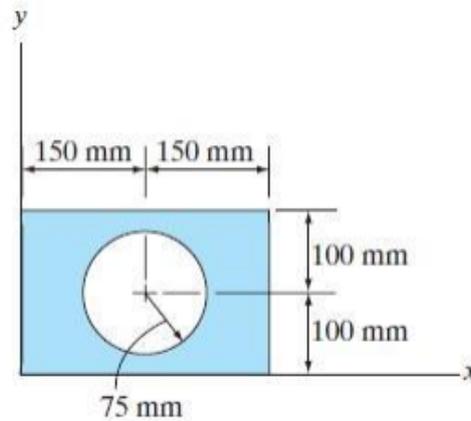
Onde A é a área do corpo e d é a distância entre os dois eixos.

Essas equações definem que o momento de inércia de uma área em torno de um eixo é igual ao momento de inércia em torno de um eixo paralelo que passa pelo centroide, somado ao produto entre a área e o quadrado da distância perpendicular entre os eixos. Para finalizar, devemos ter em mente que o **teorema dos eixos paralelos** só pode ser utilizado se **um dos eixos for um eixo centroidal**.



(NUCEPE/PC-PI - 2018) Para determinar o momento de inércia da área composta em relação ao eixo x da figura abaixo, escolha a opção **CORRETA**.





- a) $I_x = (1/3 \cdot 300^3 \cdot 200) + [1/4 \cdot \pi \cdot (75)^4 + \pi \cdot (75)^2 \cdot (100)^2]$
b) $I_x = (1/3 \cdot 300 \cdot 200^3) - [1/4 \cdot \pi \cdot (75)^4 + \pi \cdot (75)^2 \cdot (100)^2]$
c) $I_x = (1/3 \cdot 300^3 \cdot 200) - [1/4 \cdot \pi \cdot (75)^4 + \pi \cdot (75)^2 \cdot (100)^2]$
d) $I_x = (1/3 \cdot 300 \cdot 200^3) + [1/4 \cdot \pi \cdot (75)^4 + \pi \cdot (75)^2 \cdot (100)^2]$
e) $I_x = (1/3 \cdot 300^3 \cdot 200) - [1/4 \cdot \pi \cdot (75)^4]$

Comentário:

A partir das fórmulas para determinação do momento de inércia da área de figuras geométricas básicas e do teorema dos eixos paralelos podemos resolver esta questão.

Temos que calcular o momento de inércia tanto para o retângulo quanto para o círculo. Nota-se que no caso do círculo precisaremos utilizar do teorema dos eixos paralelos para encontrarmos seu momento de inércia em relação ao eixo x. Iniciemos com o cálculo do momento de inércia do retângulo em relação ao eixo x, a partir da aplicação da equação direta. Vejamos:

$$I_{x \text{ ret}} = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{300 \cdot 200^3}{3}$$

Para determinarmos o momento de inércia do círculo devemos aplicar o teorema dos eixos paralelos. Sabendo-se que a área do círculo é πr^2 e a distância entre os eixos é $d=100\text{mm}$ obtemos:

$$I_{x \text{ circ}} = \frac{\pi r^4}{4} + Ad^2 = \frac{\pi \cdot 75^4}{4} + \pi 75^2 \cdot 100^2$$

Para finalizarmos, notamos que a figura mostra que a **área do círculo é vazada**, logo o momento de inércia da nossa área composta será o **momento de inércia do retângulo subtraído o momento de inércia da área circular**. Portanto:

$$I_x = I_{x \text{ ret}} - I_{x \text{ circ}} = \left(\frac{300 \cdot 200^3}{3} \right) - \left(\frac{\pi \cdot 75^4}{4} + \pi 75^2 \cdot 100^2 \right)$$

Logo, a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.



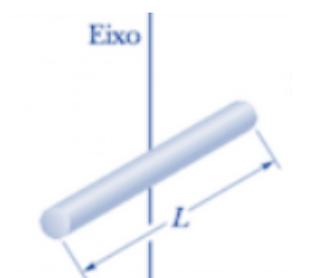
O momento de inércia de uma figura plana composta em relação a qualquer eixo particular é a soma dos momentos de inércia de suas partes em relação a esse mesmo eixo.

Por fim, vejamos uma tabela com as equações para o cálculo de **momento de inércia de massa** de um corpo distribuída em seu volume de acordo com as características geométricas destes.

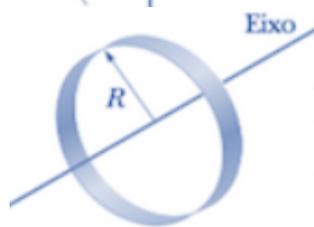
FORMATO DO CORPO

MOMENTO DE INÉRCIA DE MASSA

$$I_y = I_z = \frac{1}{12} m \cdot L^2$$

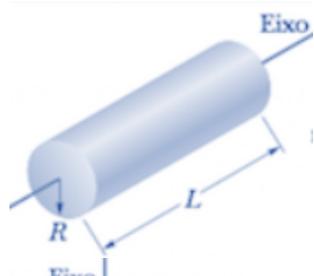


Barra esbelta de comprimento (L).



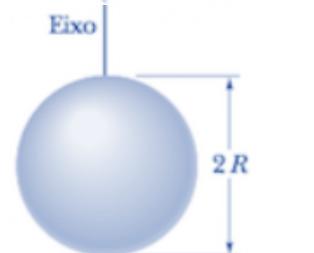
Anel fino em torno de um eixo central

$$I = M \cdot R^2$$



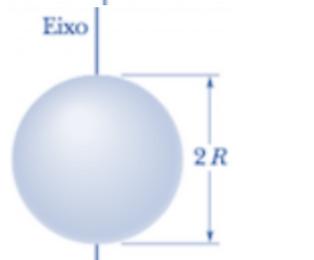
Cilindro circular de raio a e comprimento (L).

$$I = \frac{1}{2} M \cdot R^2$$



Esfera de maciça de raio (r).

$$I = \frac{2}{5} M \cdot R^2$$



Casca esférica fina em torno de um diâmetro

$$I = \frac{2}{3} M \cdot R^2$$

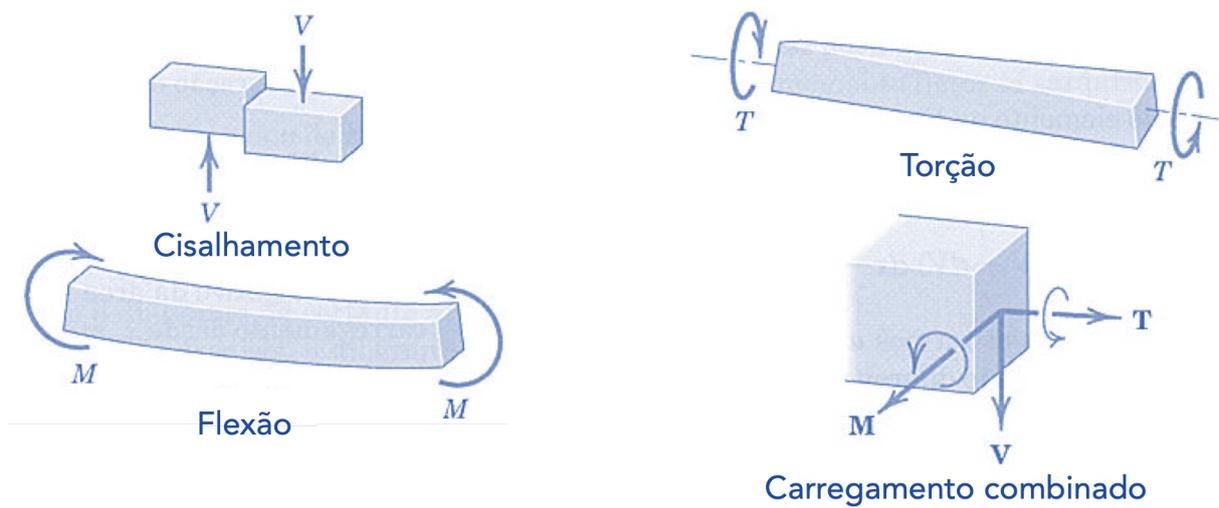


Caro aluno(a), encerramos aqui o estudo de momento de inércia a passaremos ao estudo dos efeitos internos a qual vigas estão expostas.

1.8 – Vigas - Efeitos Internos

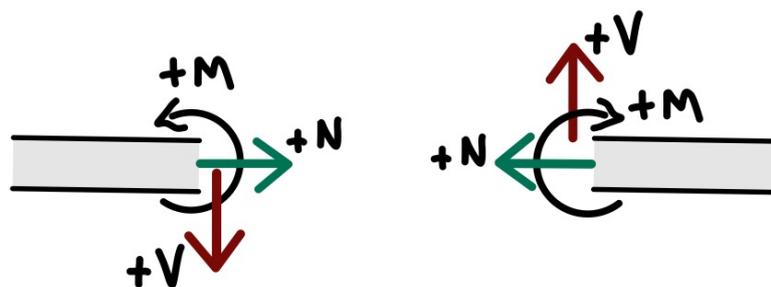
Após estudarmos como podemos reduzir uma força distribuída em uma ou mais forças concentradas e também a determinação das reações externas atuantes em um corpo, passaremos agora ao estudo dos esforços internos sofridos por um corpo a partir dos princípios da estática.

Uma **viga**, além de suportar tensões trativas e compressivas, **pode estar sujeita a cisalhamento, flexão e torção**, conforme a figura abaixo podemos perceber como cada tipo de esforço age sobre o corpo rígido.



Fonte: J.L. Meriam e L.G. Kraige, 2008

De acordo com a figura acima, a **força V** é denominada **força cisalhante ou cortante**. O **momento M** é chamado **momento fletor** e o **binário T** é denominado de **momento torçor**. Geralmente as **convenções de sinais** das forças cortantes V e dos momentos fletores M são dadas conforme a **figura abaixo**.

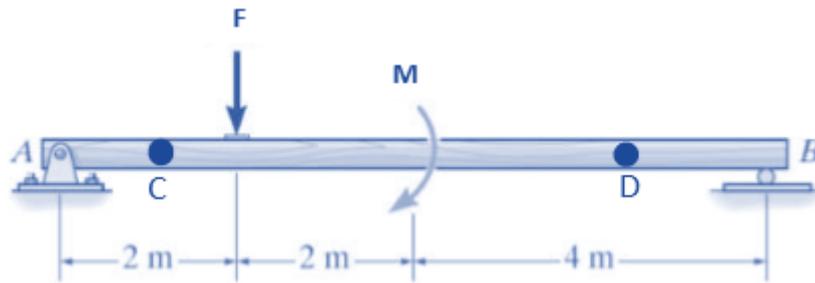


Além do momento fletor e da força de cisalhante um corpo está sujeito a **força normal N** , que age perpendicularmente à área conforme a figura acima.



Conforme a montagem do DCL e com o desenvolvimento dos cálculos os sinais algébricos indicarão o correto sentido de cada uma dessas grandezas. Vamos a resolução de uma questão exigida em concurso, como exemplo, para determinação dos esforços internos em uma viga.

(UECE-DETRAN/CE - 2018) A barra "AB", representada na figura abaixo, está submetida aos carregamentos pontuais, onde $F = 8,00 \text{ kN}$ e $M = 10,00 \text{ kN.m}$.



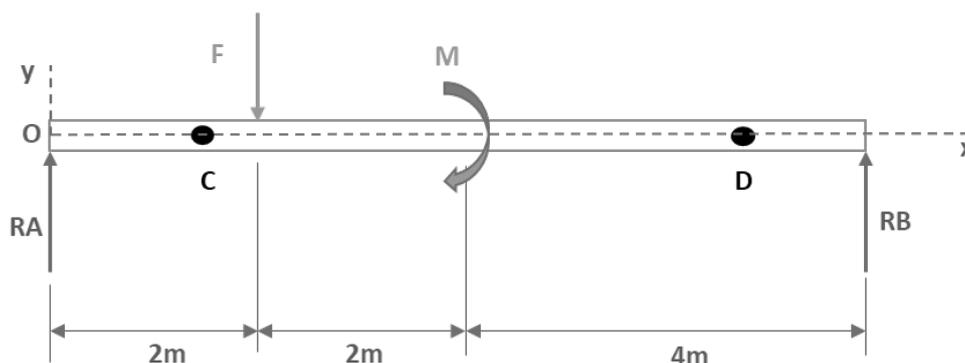
Fonte: Engineering Mechanics Statics - R.C. HIBBELER - 13th Ed.

Considerando as informações acima, é correto afirmar que, adotando-se o sistema convencional para esforço cortante positivo, os valores para os esforços cortantes nos pontos "C" (V_C) e "D" (V_D) são respectivamente

- a) 4,75 kN e $-3,25 \text{ kN}$.
- b) $-4,75 \text{ kN}$ e 10,00 kN.
- c) 4,75 kN e $-12,75 \text{ kN}$.
- d) $-4,75 \text{ kN}$ e $-8,00 \text{ kN}$.

Comentário:

A **alternativa A** está CORRETA e é o gabarito da questão. Primeiramente devemos iniciar com a montagem de nosso diagrama de corpo livre e partir deste determinarmos as reações nos pontos A e B. Em seguida, para resolvermos a questão, devemos utilizar o **método das seções** para encontrarmos os **esforços cortantes** na viga em questão. Vejamos o nosso DCL:

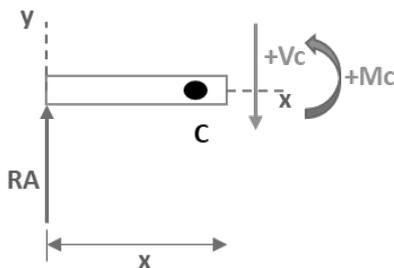


A partir dos princípios do equilíbrio, adotando com convenção o sinal positivo para o momento no sentido anti-horário, temos que:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -F \cdot 2 - M + RB \cdot 8 = 0 \Rightarrow RB = 3,25kN$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F + RA + RB = 0 \Rightarrow RA = 4,75kN$$

Agora para definirmos a força de cisalhamento V_c , o momento fletor M_c , no ponto C, que está a uma distância x de nossa origem, devemos seccionar (cortar) a nossa barra no local. Observe que como não possuímos grandezas atuando no sentido do nosso eixo X, nossa força normal será igual a zero, ou seja, não teremos força normal atuante em nossa seção transversal. Vejamos como ficará o DCL:

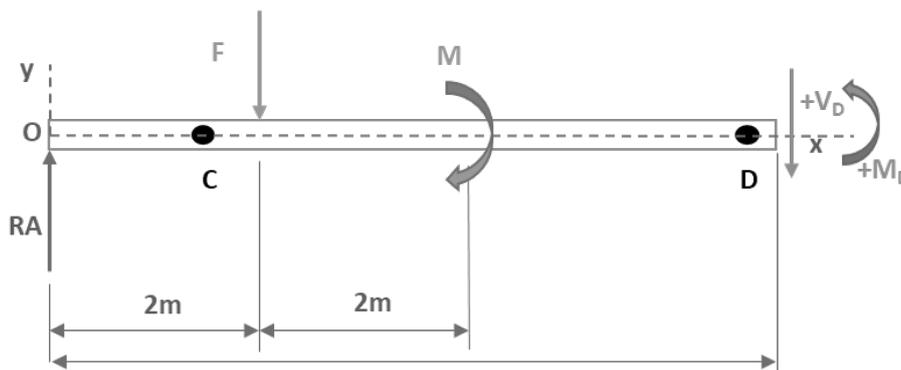


Através das equações de equilíbrio, para $0 < x < 2$, obtemos:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +RA - V_c = 0 \Rightarrow V_c = 4,75kN$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow -RA \cdot x + M_c = 0 \Rightarrow M_c = 4,75 \cdot x$$

Analogamente ao ponto C, vamos determinar os esforços internos em relação ao ponto D, $4 < x < 8$. Vejamos:

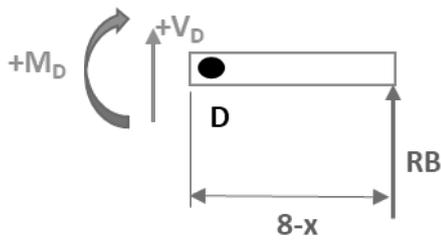


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +RA - F - V_D = 0 \Rightarrow V_D = -3,25kN$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow -RA \cdot x + F(x - 2) - M + M_D = 0 \Rightarrow M_D = -3,25x + 26$$

Uma dica importante é que para encontrarmos os esforços no ponto D podemos realizar o cálculo partindo da outra extremidade da barra, lado direito. Ficaremos com bem menos incógnitas tornando o cálculo simplificado, contudo lembre-se que o sentido positivo do momento fletor e da força cortante são diferentes neste caso. Vejamos:

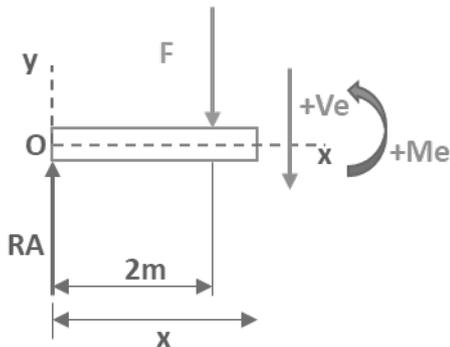




$$\sum F_y = 0 \Rightarrow RB + V_D = 0 \Rightarrow V_D = -3,25$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow -M_D + RB(8 - x) = 0 \Rightarrow M_D = -3,25x + 26$$

Podemos representar graficamente os valores da **força cortante V** e do **momento fletor M** em **função da distância ao longo do comprimento da barra**, quando feito isso obtemos os diagramas de força cortante e do momento fletor para a viga. Contudo precisamos achar o esforço cortante e o momento fletor no trecho entre $2 < x < 4$, vamos chamá-lo de ponto E. Vejamos:

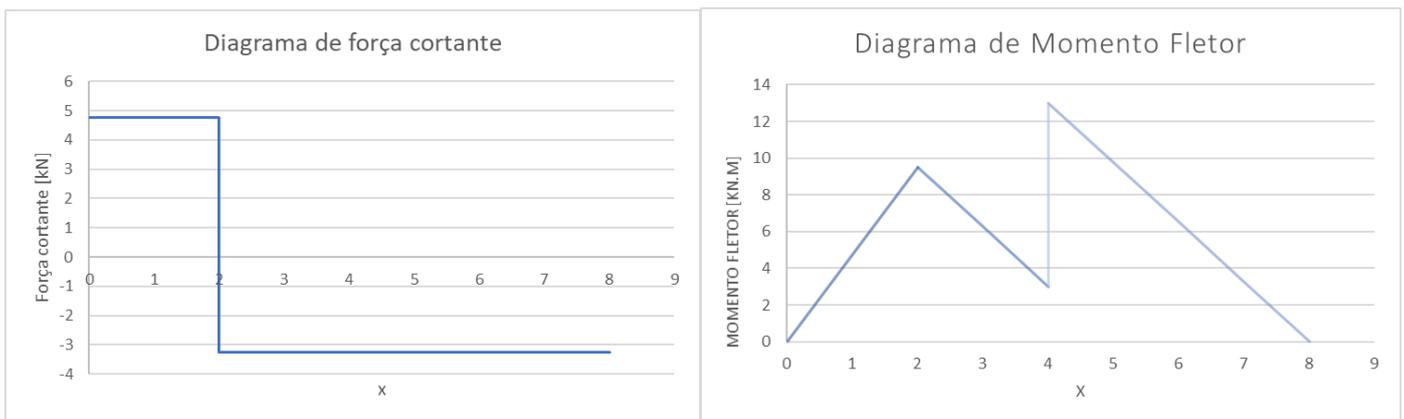


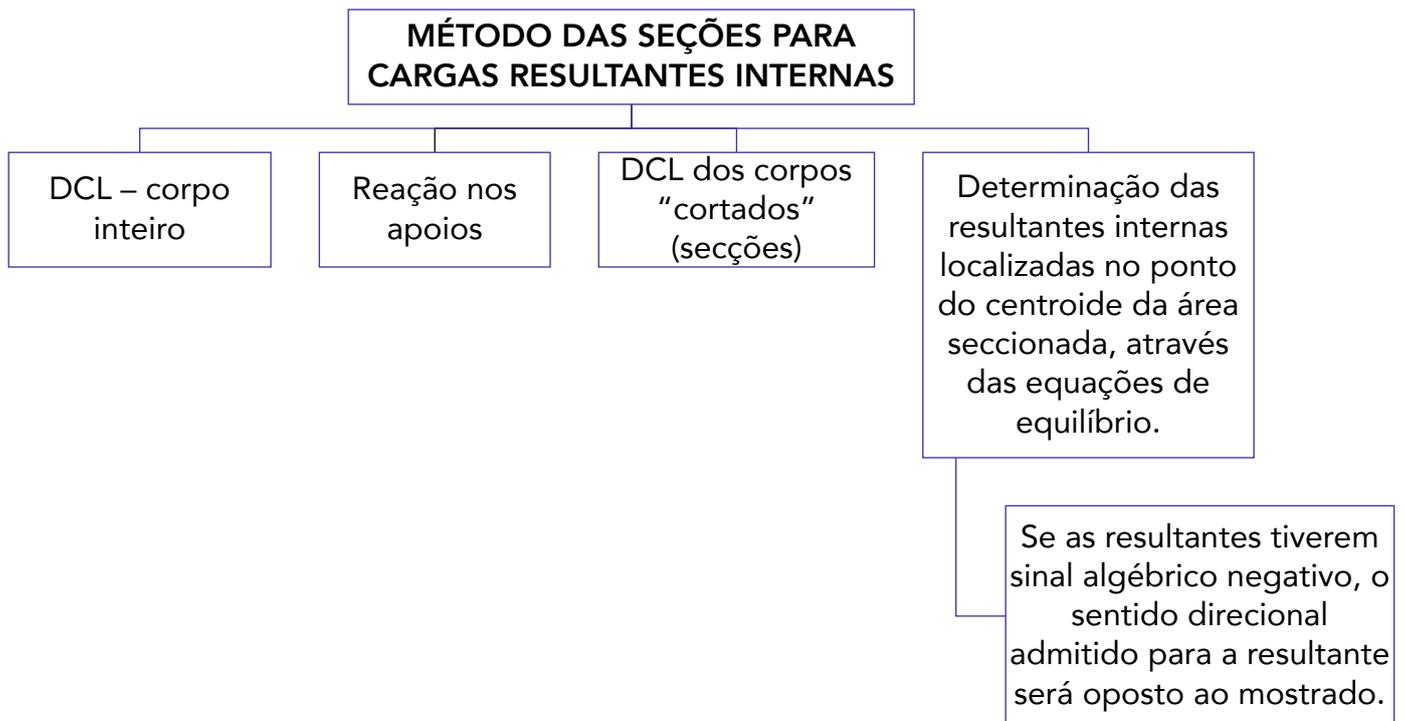
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow RA - F - V_e = 0 \Rightarrow V_e = -3,25kN$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_e + F(x - 2) - RA \cdot x = 0$$

$$M_e = -3,25 \cdot x + 16$$

Agora encontradas as reações internas nas seções da barra entre as posições dos esforços externos, vamos representar graficamente a força cortante V e o momento fletor M.





Finalizamos aqui o estudo da estática. Caso tenha ficado alguma dúvida **retome o tópico**, respire fundo e de mais uma lida, se precisar sinta-se à vontade para me procurar que iremos sanar todas as dúvidas. Passaremos agora para a dinâmica!

DINÂMICA

1 - Introdução

Caro aluno (a), para que você logre êxito nos estudos da dinâmica vamos iniciar lembrando as três leis de movimento de Newton.

Lei I – Uma partícula permanece em repouso ou mantém seu movimento com velocidade uniforme (em um percurso retilíneo com uma velocidade constante) caso não haja forças fora de equilíbrio atuando sobre ela.

Lei II – A força resultante agindo sobre uma partícula proporciona uma aceleração proporcional a ela com mesmo sentido e direção da força.

Lei III – As forças de ação e reação entre dois corpos interagindo são as mesmas em módulo, diferentes no sentido e colineares.

Dentro destas três leis a **mais relevante** no estudo da dinâmica será a **segunda lei de Newton**, onde podemos representá-la pela seguinte expressão matemática:



$$F = m \cdot a$$

Onde F= Força resultante; m= massa da partícula; e a=aceleração resultante.

Além das leis de Newton, uma grandeza usualmente presente na dinâmica é o **peso aparente de um corpo**. Este é definido como a **massa do corpo multiplicada pela atração gravitacional** da terra conforme a seguinte equação.

$$W = m \cdot g$$

Em que W=peso aparente do corpo; m=massa do corpo e g=atração gravitacional da terra. Normalmente adotamos $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ em nível do mar. Não se preocupe em decorá-lo pois em prova normalmente este valor é fornecido ou arredondado para 10 m/s^2 .

Para encerramos nossa seção introdutória, lembre-se de sempre adotar o passo a passo descrito nas considerações iniciais de nossa aula. Uma **metodologia de resolução de questões** pré-definida é fundamental para se **poupar tempo e reduzir erros** em questões de concursos públicos.

Vamos adiante!

2 - Cinemática de partículas

Vamos iniciar o estudo da dinâmica com o estudo da cinemática de um ponto ou partícula. Primeiramente devemos definir uma partícula.

Partícula: é um corpo que possui **dimensões físicas** tão **pequenas** em relação ao movimento de sua trajetória que podemos tratar este movimento **como se fosse de um ponto**. Podemos adotar como exemplo um avião partindo de São Paulo até Nova Iorque. Neste caso, como o raio de curvatura da trajetória é muito grande é possível adotarmos o avião como se você uma partícula ou ponto.

Existem diversas maneiras de descrever o movimento de uma partícula sendo que este pode ser com ou sem restrição. Um **movimento com restrição** é aquele em que existem guias físicas que **delimitam a trajetória da partícula**, por exemplo ao girarmos um ioiô segurando em sua corda restringimos o movimento dos discos. Caso o fio se rompa, os discos do ioiô passarão a possuir um movimento sem restrição.

Para **traçarmos o movimento de uma partícula**, devemos **adotar um sistema de coordenadas**, para definirmos a posição desta no instante de tempo (t). Normalmente em questões de provas são atribuídas **coordenadas retangulares** X, Y e Z a uma partícula. Contudo existem as **coordenadas cilíndricas** R, θ e Z e as **coordenadas esféricas** R, θ e ϕ para determinação da posição de um ponto em um determinado instante (t).

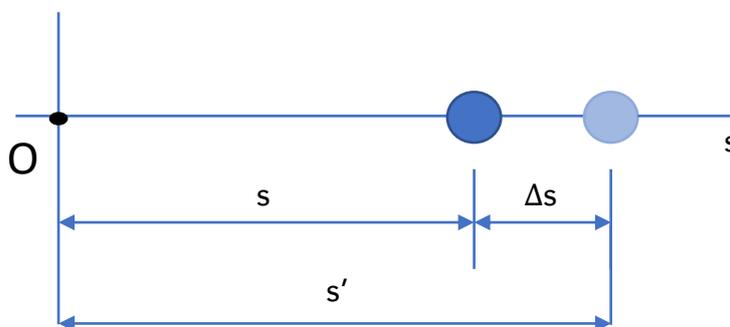


Na maioria dos casos a análise de movimento de partículas ou corpos rígidos é realizado a partir de **eixos de referências fixos** sendo denominada análise de **movimento absoluto**, todavia há situações em que essa análise pode ser realizada através de eixos de coordenadas móveis chamada de análise de movimento relativo.

Prezado estrategista, como análise de movimentos de partículas em três dimensões demandam muito tempo, dificilmente são exigidas em questões de provas. Geralmente os examinadores abordam questões onde é necessária uma análise de movimento plano, pois está pode representar o movimento de diversas máquinas e componentes mecânicos. Vamos iniciar com o estudo do movimento retilíneo.

2.1 - Movimento Retilíneo

Imagine uma partícula P realizando um movimento retilíneo em um eixo horizontal, para a direita, partindo de uma posição inicial (s_0) origem e chegando à posição final (s). O **deslocamento** (Δs) desta partícula pode ser representado pela **variação na sua posição** sendo $\Delta s = s - s_0$. Como a posição final estava à direita da inicial a partícula realizou um movimento positivo, portanto se a posição final estivesse à esquerda a inicial Δs seria negativo.



O **deslocamento** de uma partícula **não deve ser confundido com a distância** que está percorreu, uma vez que a distância percorrida é um escalar que representa o comprimento total da trajetória a qual a partícula se moveu.

A **velocidade média** de uma partícula pode ser encontrada pela **razão entre o deslocamento e o intervalo de tempo** (Δt) gasto para se percorrer a trajetória. Assim temos que:

$$v_{méd} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



Como o tempo é sempre positivo a **convenção de sinal** utilizada para definir o **sentido da velocidade é a mesma adotada para o deslocamento**. Em algumas questões você pode ser instado a definir a velocidade escalar média, está será sempre positiva, e é dada pela razão entre a distância percorrida e o tempo decorrido.

Conhecendo a velocidade de uma partícula entre dois pontos podemos encontrar a aceleração média desta durante o intervalo de tempo (Δt) pela seguinte expressão

$$a_{méd} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Onde Δv = diferença da velocidade no intervalo de tempo $\Delta v = v - v_0$. A aceleração pode ser positiva ou negativa sendo que a partícula poderá sofrer aceleração ou desaceleração respectivamente.

Quando a aceleração for constante podemos obter a velocidade e a posição em função do tempo e também a velocidade em função da posição pelas seguintes expressões, respectivamente:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (s - s_0)$$

Lembre-se que está equações podem ser utilizadas para quando a **aceleração for constante** como por exemplo quando um corpo está em queda livre sofrendo apenas aceleração da gravidade constante. Além disso, como convenção adotamos (+→) conforme a direção positiva de (s).

Quando adotamos pequenos valores para (Δt), se aproximando de zero, podemos encontrar a velocidade e aceleração instantânea pelas seguintes expressões:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad ; \quad a = \frac{dv}{dt}$$

Sendo que a velocidade é a taxa de variação no tempo da coordenada da posição (s) e a aceleração é a variação da velocidade dividida pelo intervalo de tempo. A partir da eliminação do tempo (dt) é possível obter uma terceira equação diferencial que relaciona deslocamento, velocidade e aceleração. Vejamos:

$$v \cdot dv = a \cdot ds$$

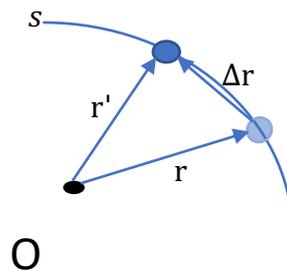
Tanto a velocidade quanto a aceleração são grandezas vetoriais conforme veremos no estudo do movimento curvilíneo.



2.2 - Movimento Curvilíneo

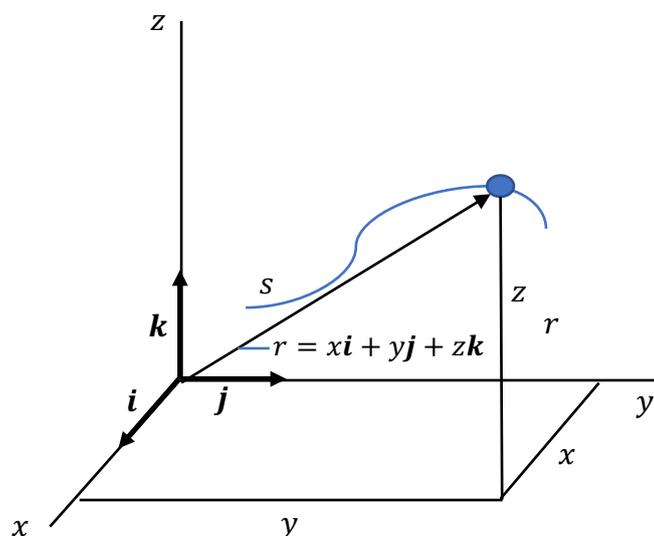
Quando uma partícula se move com uma **trajetória curva** ela está realizando um **movimento curvilíneo**. Uma vez que descrevemos essa trajetória em três dimensões torna-se necessário a utilização de grandezas vetoriais para a definição da posição, velocidade e deslocamento da partícula.

A posição da partícula é definida pelo vetor posição $r = r(t)$ e ela é mensurada tendo como referência um ponto fixo O . Se a partícula realizar movimento em um intervalo de tempo, em uma trajetória curvilínea, seu deslocamento será definida pela subtração vetorial $\Delta r = r - r_0$.



A velocidade e a aceleração serão definidas pelas mesmas equações utilizadas para o movimento retilíneo, através de uma análise vetorial.

Na maioria das vezes, a trajetória de uma partícula é expressa em coordenadas retangulares X, Y e Z. Vejamos um exemplo onde a partícula está em um ponto sobre uma trajetória curva (s).



A posição da partícula é definida pelo vetor posição $r = xi + yj + zk$ quando a partícula se move as coordenadas X, Y e Z são funções do tempo e em qualquer instante a **intensidade de (r)** pode ser obtida por



$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Realizando a **primeira derivada de (r) no tempo** obtêm-se a **velocidade (v) da partícula**. Portanto,

$$v = \frac{dr}{dt} = v_x i + v_y j + v_z k$$

Onde $v_x = \dot{x}$; $v_y = \dot{y}$; e $v_z = \dot{z}$. Essa denotação com pontos indicam as primeiras derivadas de cada posição. Da mesma forma que a posição, para definirmos a intensidade da velocidade a seguinte expressão matemática é utilizada:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



A direção do vetor velocidade sempre será tangente à trajetória

Por fim, da mesma maneira que a velocidade, podemos encontrar a aceleração de uma partícula com movimento curvilíneo e sua intensidade pelas seguintes equações:

$$a = \frac{dv}{dt} = a_x i + a_y j + a_z k$$

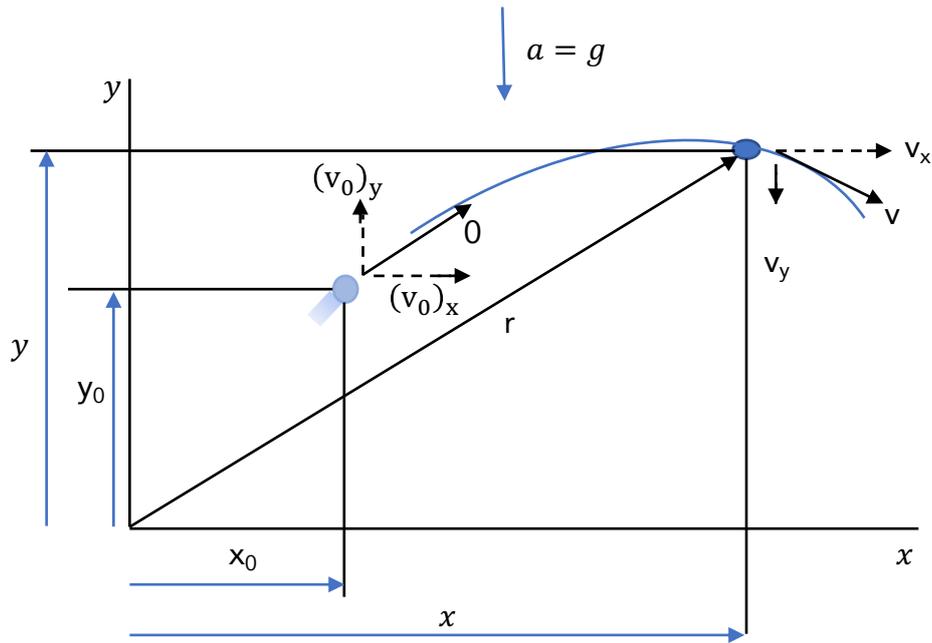
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Normalmente a aceleração **não será tangente** à trajetória.

2.3 - Movimento de um projétil

Vamos agora analisar a **trajetória de um projétil** quando este é lançado em voo livre conforme a figura abaixo. O arrasto aerodinâmico, a curvatura e rotação da terra serão desprezados nesta análise. Também vamos considerar que a variação de altitude do projétil é pequena de maneira que a aceleração da gravidade possa ser considerada constante. Assim este irá apresentar uma **trajetória parabólica**, com velocidade constante na direção horizontal, e uma aceleração da gravidade constante atuando para baixo na vertical. Neste caso duas das equações para aceleração constante são aplicadas para análise da direção vertical e apenas uma na direção horizontal.





As equações que podem ser utilizadas para o lançamento de um projétil são:

$$\begin{aligned} (+\uparrow) \quad v_y &= (v_0)_y + a_g \cdot t; & (+\uparrow) \quad y &= y_0 + (v_0)_y \cdot t + \frac{1}{2} a_g \cdot t^2 & ; & (+\uparrow) \quad v_y^2 = (v_0)_y^2 + 2 \cdot a_g \cdot (y - y_0) \\ (+\rightarrow) \quad x &= x_0 + (v_0)_x \cdot t \end{aligned}$$

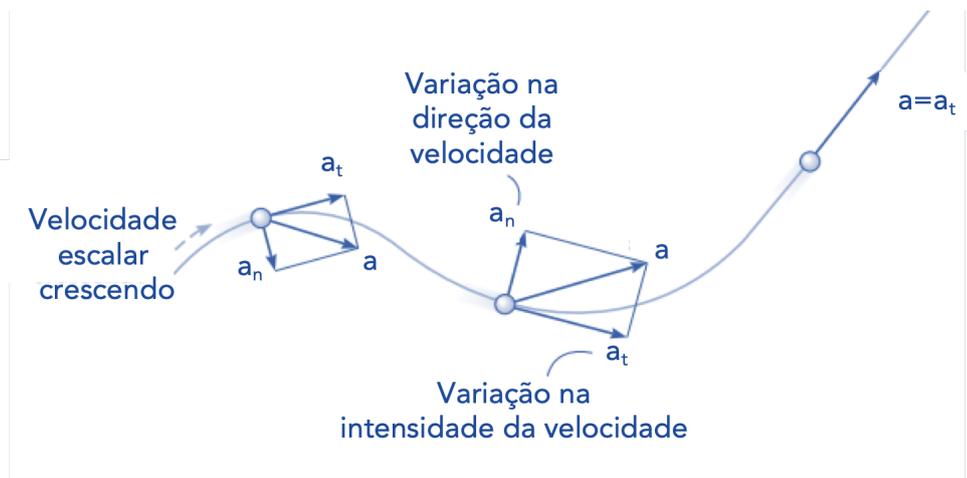
Em situações em que o movimento do projétil envolve grandes altitudes e altas velocidades, para uma correta análise do movimento devemos considerar o formato físico do projétil, a variação da aceleração da gravidade conforme a altitude, a variação da massa específica do ar, e a rotação da terra, tornando a análise complexa e ela deve ser feita por meio de integração numérica.

2.4 - Movimento curvilíneo: Coordenadas Tangencial e Normal

Uma maneira de descrever o **movimento curvilíneo** se dá através da utilização de **coordenadas medidas ao longo da tangente (t) e da normal (n) à trajetória da partícula**. Normalmente estas são as coordenadas mais convenientes para se utilizar em relação ao movimento curvilíneo de uma partícula.

As coordenadas tangenciais e normais são consideradas em movimento ao longo da trajetória com a partícula e **(n) será positiva apontando para o centro da curvatura da trajetória**. Vejamos a figura abaixo.





Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

A **velocidade da partícula** terá uma direção sempre **tangente a trajetória**, assim em coordenadas (n) e (t) ela é determinada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{e}_t$$

Onde (v) é a intensidade determinada pela derivada da posição no tempo ($v = ds/dt$); e (\mathbf{e}_t) é o vetor unitário na direção (t).

A **aceleração (a)** da partícula possui uma **componente tangencial (a_t)** e uma **normal (a_n)** a trajetória e estas são obtidas por:

$$\mathbf{a} = a_t \cdot \mathbf{e}_t + a_n \cdot \mathbf{e}_n$$

$$a_t = \dot{v} \quad \text{ou} \quad a_t ds = v dv$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Em que (ρ) é o raio da curvatura da trajetória na posição analisada; e (\mathbf{e}_n) é o vetor unitário na direção (n).

Por fim a intensidade da aceleração é obtida pela seguinte equação:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Caro aluno (a), agora que estudamos as coordenadas normais e tangencial do movimento curvilíneo podemos destacar um outro caso muito importante de movimento curvilíneo que é o **movimento circular**. Neste movimento o raio de curvatura (ρ) é indicado pelo raio (r) do círculo e o ângulo (θ) representa o deslocamento medido a partir de qualquer referência radial entre OP. Assim as



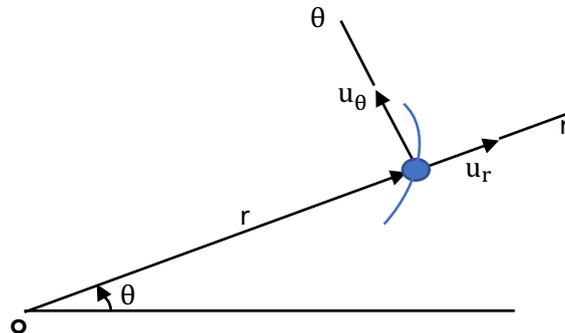
componentes de aceleração e velocidade de uma partícula (P) para o movimento circular são expressas por :

$$v = r\dot{\theta}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r.\dot{\theta}^2$$

$$a_t = \dot{v} = r.\ddot{\theta}$$

Em determinadas situações torna-se necessário a utilização de **coordenadas cilíndricas** para uma correta descrição da trajetória de uma partícula. Se o movimento se restringir ao plano, coordenadas polares são utilizadas. Neste sistema de coordenadas a partícula é localizada pela distância radial (r) a partir de um ponto fixo e pela medida do ângulo no sentido anti-horário, (θ) entre a linha de referência fixa e o eixo (r).



As **direções positivas de (θ) e (r)** são dadas pelos **vetores unitários (u_θ e u_r)**. A posição da partícula em qualquer instante pode ser definida por:

$$\mathbf{r} = r.\mathbf{u}_r$$

A partir da derivada temporal de (\mathbf{r}) é obtida a velocidade instantânea (\mathbf{v}). Através da representação de um ponto para representar a derivada temporal e escrevendo a velocidade (\mathbf{v}) na forma de componentes obtém-se:

$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{u}_r + v_\theta\mathbf{u}_\theta$$

$$v_r = \dot{r} \quad e \quad v_\theta = r\dot{\theta}$$

Uma vez que (v_r) e (v_θ) são perpendiculares a intensidade da velocidade vetorial em um determinada instante de tempo é dada pela seguinte expressão matemática:

$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$$



Em que a direção de (v) é tangente a trajetória e $\dot{\theta}$ é a velocidade angular (ω), pois esta indica a variação temporal do ângulo θ .

Para se encontrar a aceleração através das coordenadas polares as seguintes expressões são utilizadas

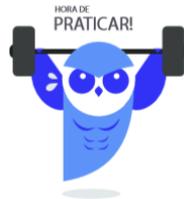
$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{u}_r + a_\theta \mathbf{u}_\theta$$

Em que:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \text{e} \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Onde ($\ddot{\theta}$) é a aceleração angular, pois esta mede a variação que ocorre na velocidade angular durante um instante de tempo, sendo está representada em rad/s^2 . Por fim, visto que (a_r) e (a_θ) serão sempre perpendiculares a intensidade da aceleração pode ser obtida por:

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}$$



(CESGRANRIO/PETROBRAS - 2011) Considere uma partícula percorrendo uma trajetória plana curvilínea de centro C, com velocidade angular ω em relação a um eixo perpendicular ao plano de movimento, que passa por C, e raio variável no tempo $R(t)$. Sendo θ o ângulo da posição instantânea da partícula com relação a um eixo de referência que passa por C, sua velocidade v , em um determinado instante de tempo, é dada por

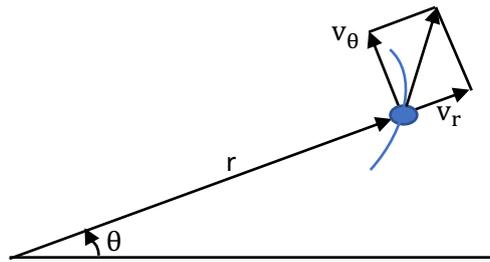
- a) $\sqrt{\dot{R}^2 + (\omega R)^2}$
- b) $\sqrt{\dot{R}^2 + (\dot{\omega} R)^2}$
- c) $\sqrt{R^2 + (\omega R)^2}$
- d) $\sqrt{(R\dot{\theta})^2 + (\omega R)^2}$
- e) $\sqrt{(\dot{R}\dot{\theta})^2 + (\dot{\omega} R)^2}$

Comentário:

Caro estrategista, para resolvermos esta questão, primeiramente você deve saber que a velocidade de uma partícula que está percorrendo uma trajetória curvilínea no plano, em



coordenadas polares, possui duas componentes, radial (v_r) e transversal (v_θ) e que estas componentes são perpendiculares entre si. Vejamos a imagem.



Sabendo-se $v_r = \dot{R}$ e $v_\theta = R\dot{\theta} = R\omega$ e uma vez que as componentes da velocidade em um determinado instante de tempo são perpendiculares, a velocidade instantânea pode ser obtida por:

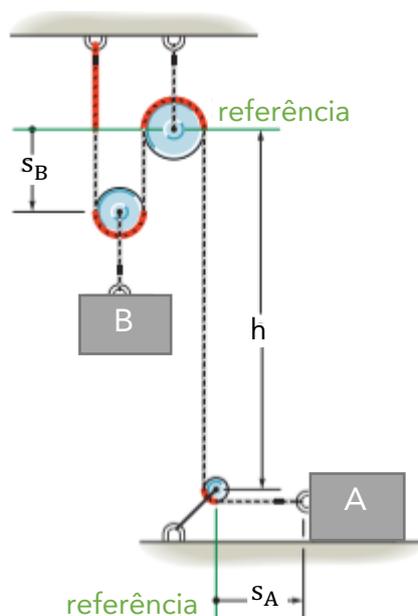
$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{R}^2 + (\omega R)^2}$$

Portanto a **alternativa A** está CORRETA e é o gabarito da questão.

Encerramos aqui o estudo do movimento curvilíneo em coordenadas polares. Vamos agora ao estudo do movimento absoluto dependente de duas partículas.

2.5 - Movimento absoluto dependente de duas partículas

Prezado aluno(a), em algumas questões de provas você pode ser instado a lidar com situações em que o **movimento de uma partícula** será **dependente do movimento correspondente de outra partícula**. Geralmente esta dependência ocorre quando as partículas estão interligadas por cordas que passam em torno de polias. Vejamos um exemplo.



Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.



Na figura acima temos um sistema com dois blocos A e B interligados por uma corda e um arranjo de polias. A posição do bloco A é determinada por S_A e a extremidade da corda onde o bloco B está suspenso é definida por S_B . Para uma **correta análise** deste sistema devemos (A) **definir as origens em pontos fixos ou de referência**; (B) **medir as coordenadas positivamente de acordo com o movimento de cada bloco** assim S_A será positivo para direita e S_B positivo para baixo.

Durante o movimento os segmentos em cinza da corda permanecem constante e adotando que a corda tenha um comprimento total L podemos relacionar as coordenadas de posição pela seguinte relação:

$$2S_B + h + S_A = L$$

Uma vez que L e h são constantes durante o movimento realizando as duas derivadas no tempo dessas grandezas obtemos

$$2v_B = -v_A \quad 2a_B = -a_A$$

Assim quando B movimentar-se para baixo A irá se mover para a esquerda com duas vezes o movimento. Analogamente pode-se adotar como referência para a posição do bloco B o centro da polia de baixo. Não há necessariamente somente um jeito de analisar este tipo de sistema.



Procedimento para análise de movimento dependente de uma partícula com o de outra

- Estabeleça cada coordenada de posição com uma origem posicionada em ponto ou referência
- Direcione cada eixo coordenado escolhido de acordo com a trajetória de movimento da partícula
- Relacione as coordenadas de posição com o comprimento total da corda
- Aplique as derivadas temporais sucessivas para obter a velocidade e aceleração – os sinais serão obtidos de acordo com sentido positivo e negativo das coordenadas de posição adotadas.

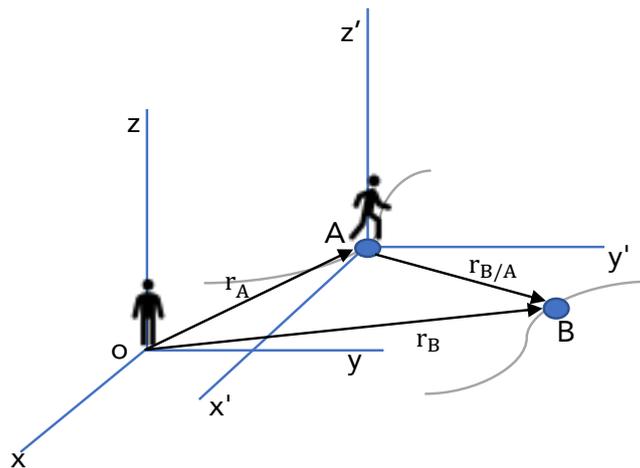
Passaremos agora ao estudo do movimento de duas partículas usando eixos de translação.



2.6 - Movimento relativo usando eixos de translação

Quando **não** é possível determinar o movimento de uma partícula com a utilização de apenas um único sistema de referência fixo podemos realizar uma análise do movimento desta em partes com a utilização de **dois ou mais sistemas de referência**. Essa abordagem é denominada **análise de movimento relativo**.

Considerando duas partículas A e B com trajetória demonstradas em azul na figura abaixo. Podemos definir a posição absoluta de cada partícula usando como referência a origem comum O do sistema X, Y, Z. Na origem de um segundo sistema de referência está fixado a partícula A e ele está movendo-se junto com A. Os eixos desse sistema podem realizar apenas translação em relação ao sistema fixo.



A posição de B em relação a A é dada pelo vetor ($r_{B/A}$) e através da adição de vetores podemos relacionar os três vetores por:

$$r_B = r_A + r_{B/A}$$

Derivando a equação da posição no tempo temos que as velocidades das partículas podem ser representadas pela seguinte expressão:

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

Por fim, a aceleração das partículas é obtidas pela derivada temporal da velocidade assim temos que:

$$a_B = a_A + a_{B/A}$$

Onde $a_{B/A}$ é a aceleração de B vista pelo observador em A.



Cabe destacar que a **soma de vetores forma um triângulo**, podendo haver no máximo duas incógnitas a ser descoberta. Estas **incógnitas** podem ser **determinadas através de trigonometria**, lei dos senos, lei dos cossenos ou decompondo cada um dos três vetores em componentes retangulares.

Com isso finalizamos o estudo da cinemática das partículas e o próximo tópico da nossa aula será a cinética das partículas. Vamos lá?!

3 - Cinética das partículas

Conforme a segunda lei de Newton, uma partícula quando sujeita a ação de forças não equilibradas, irá acelerar. Resumidamente a **cinética** analisa a **relação entre essas forças desequilibradas e as variações do movimento da partícula**, que foram **ocasionadas pela aplicação das forças**.

Caro aluno(a), no estudo da cinética das partículas utilizaremos uma combinação das propriedades das forças aprendidas nos princípios da estática, e a cinemática do movimento das partículas. Portanto, com a aplicação da segunda lei de Newton, é possível realizar a combinação desses dois assuntos e resolver possíveis questões em sua prova onde envolvam força, massa e aceleração.

Uma vez que a **força e a aceleração** são **diretamente proporcionais**, de acordo com a segunda lei de Newton, a constante de proporcionalidade (m), que é a massa da partícula, pode ser obtida pela divisão da força pela aceleração. Quando a massa é constante, ela fornece uma grandeza que indica a quantidade de resistência que uma partícula apresenta a uma variação de sua velocidade, que nada mais é do que a sua inércia.

Como já visto anteriormente, a segunda lei de Newton é representada pela seguinte expressão algébrica, conhecida como a equação do movimento.

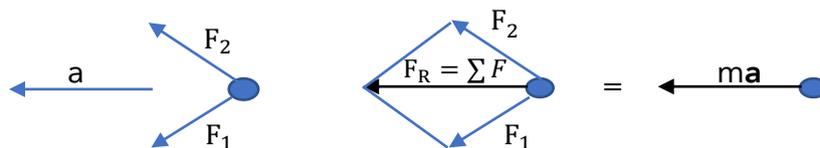
$$F = m \cdot a$$

Quando várias forças atuam sobre uma partícula, a força resultante é dada pela soma vetorial de todas as forças atuantes, neste caso a equação do movimento pode ser descrita como:

$$\sum F = m \cdot a$$

Vejamos a imagem abaixo onde está ilustrada duas forças F_1 e F_2 atuantes sobre uma partícula de massa (m).





No diagrama de corpo livre temos representada a **força resultante (F_R)** que é a **soma vetorial das duas forças**. Neste caso ou a partícula permanecerá em repouso, caso a força resultante e a aceleração sejam zero, ou se moverá ao longo de uma trajetória em linha reta possuindo velocidade constante. Sendo estas as condições de equilíbrio estático.



Quando aplicamos a equação do movimento, é interessante que a aceleração da partícula seja mensurada com base em um sistema de referência fixo ou que se desloque (translade) com uma velocidade constante. Assim o “observador” (origem) não sofrerá aceleração, logo as medidas da aceleração da partícula serão as mesmas de qualquer referência similar. Esse tipo de sistema de referência é chamado de sistema de referência inercial ou newtoniano.

3.1 - Equações de movimento coordenadas retangulares

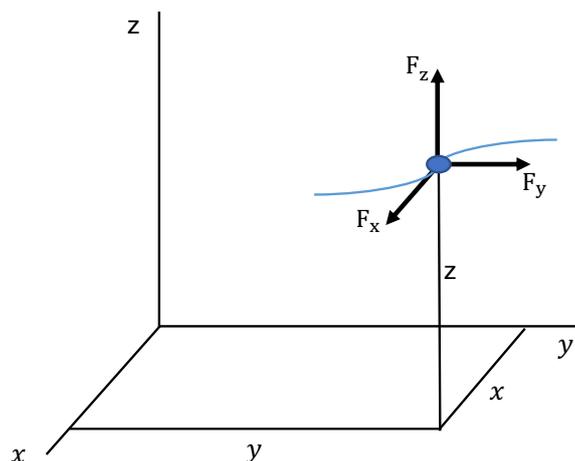
Para realizarmos a análise do movimento de uma partícula em relação a um sistema de referência newtoniano X, Y, Z , consideramos que as forças e a aceleração que atua sobre a partícula são expressas pelos vetores unitários i, j e k . Assim temos que:

$$\sum F_x i + \sum F_y j + \sum F_z k = m(a_x i + a_y j + a_z k)$$

$$\sum F_x = m \cdot a_x; \quad \sum F_y = m \cdot a_y; \quad \sum F_z = m \cdot a_z$$

Caso o movimento da partícula esteja restrito ao plano X, Y utilizamos apenas as duas equações relativas a esses eixos para analisarmos o movimento.





Em alguns casos a partícula pode estar se movimentando sobre **superfícies ásperas**, assim é necessário a utilização da **equação de atrito**, ela relaciona as forças de atrito (F_a) e a força normal (F_N), que atuam na superfície de contato utilizando o **COEFICIENTE DE ATRITO CINÉTICO** (u_k). A **força de atrito sempre irá atuar no sentido oposto ao movimento da partícula**, paralelamente a esta. Quando a partícula está na iminência do movimento relativo, o coeficiente de atrito estático deverá ser utilizado. Vejamos a equação do atrito:

$$F_a = u_k \cdot F_N$$

Para fins de prova devemos saber:

A força normal, sempre será paralela, atuando no mesmo sentido da força peso do corpo.

Tanto a força de atrito estático quanto a força de atrito cinético são proporcionais à força normal.

O coeficiente de atrito estático é maior que o coeficiente de atrito cinético.

Outra situação comumente abordada pelas bancas são aquelas em que a partícula está conectada a uma mola elástica de massa desprezível. Nesse caso a **força da mola** (F_s) é dada pela **multiplicação da rigidez da mola (k) e o alongamento ou compressão da mola (s)**, sendo este a diferença entre o comprimento deformado (l) e o comprimento não deformado da mola (l_0). Assim temos que:

$$F_s = k \cdot s; \quad e \quad s = l - l_0$$

Visto isto vamos a um passo a passo de como devemos resolver questões que envolvam equações do movimento em coordenadas retangulares.



1- Defina o sistema de coordenadas inercial.

2 - Desenhe o diagrama de corpo de livre com todas as forças atuantes, caso necessário decomponha as forças em suas componentes.

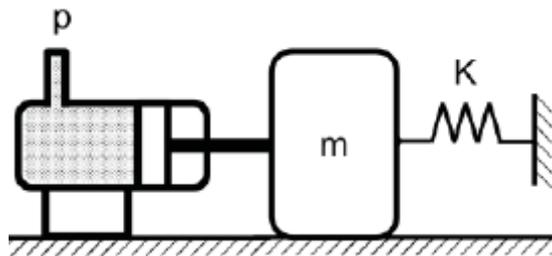
3 - Defina a direção e o sentido da aceleração da partícula, se não for conhecido assuma que ela atua no sentido de seu eixo coordenado positivo.

4 - Identifique as incógnitas da questão.

5 - Utilize as equações de movimento e de cinemática para a resolução.



(CESGRANRIO/Petrobras - 2018) No sistema mostrado na Figura abaixo, o coeficiente de atrito μ entre a superfície e o bloco de massa $m = 500$ g é igual a $0,75$; a constante de rigidez da mola linear é igual a 16 kN/m; e a área do pistão do atuador é igual a 3 cm². Quando a pressão p é nula, a mola está indeformada.



Dado $g = 10$ m/s²

Quando a pressão P aplicada no pistão do atuador é igual a $82,5$ kPa, e a mola apresenta uma deflexão igual a 1 mm, a aceleração, em m/s², do bloco de massa m é igual a

- a) 8
- b) 10
- c) 25
- d) 74
- e) 89

Comentário:



Essa questão envolve muitos conceitos estudados até aqui. Primeiramente precisamos trabalhar com as unidades de acordo com o SI. Sempre fique atento as unidades de medidas fornecidas pela banca. Note que a área do pistão está em cm^2 , logo precisaremos converter esta grandeza para m^2 . Vejamos a seguinte análise para conversão:

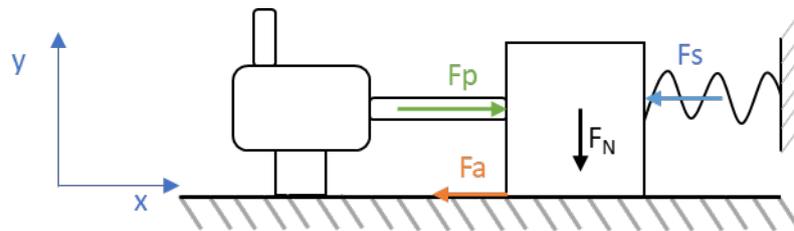
$$1m = 100cm$$

$$1m \cdot 1m = 100cm \cdot 100cm \Rightarrow 1m^2 = 10000cm^2$$

Sabendo que $1m^2 = 1.10^4cm^2$ podemos converter a área do pistão da seguinte maneira:

$$3cm^2 \cdot \frac{1m^2}{10^4cm^2} = 3 \cdot 10^{-4}m^2$$

Adotando o passo a passo para nossa resolução de questão, vamos a definição de nosso sistema de coordenadas inercial e para a montagem de nosso diagrama de corpo livre.



Vamos considerar o deslocamento como x positivo para direita. Note que nesta questão temos três forças agindo sobre o bloco que são: força do pistão (F_p), Força de atrito (F_a) e a força da mola (F_s).

Como o pistão causa uma compressão na mola a aceleração da partícula será para a direita, no sentido positivo do eixo X.

Agora podemos calcular a grandeza de todas as forças envolvidas.

Sabendo a área do pistão e a pressão aplicada neste podemos encontrar a força do pistão que está atuando sobre o bloco por:

$$P = \frac{F_p}{A} \Rightarrow F_p = P \cdot A \Rightarrow F_p = 82,5 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \Rightarrow F_p = 82,5 \cdot 0,3 = 24,75N$$

Encontrada a força do pistão que está atuando no bloco vamos agora calcular a força da mola. Vejamos:

$$F_s = k \cdot s = 16 \cdot 10^3 [N] \cdot 1 \cdot 10^{-3} [m] \Rightarrow F_s = 16N$$

Por fim a força de atrito é calculada pela força normal (F_N) atuando na caixa, que é igual a massa desta multiplicada pela aceleração da gravidade, multiplicada pelo coeficiente de atrito (μ). Logo:

$$F_a = F_N \cdot \mu \Rightarrow F_a = 0,5 [kg] \cdot 10 \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 0,75 \Rightarrow F_a = 3,75N$$



Como a questão nos pede a aceleração do bloco podemos aplicar a segunda lei de Newton para encontrá-la através da seguinte equação:

$$\sum F_x = m \cdot a_x;$$

Assim temos que:

$$F_p - F_s - F_a = m \cdot a_x \quad \Rightarrow \quad 24,75 - 16 - 3,75 = 0,5 \cdot a_x \quad \Rightarrow \quad a_x = 10 \text{ m/s}^2$$

Portanto, a alternativa B está CORRETA e é o gabarito da questão. Lembre-se sempre de adotar o sinal das forças de acordo com o sistema de coordenadas previamente definido.

Vamos agora ao estudo das equações de movimento em coordenadas tangenciais e normais.

3.2 - Equações de movimento: Coordenadas Normais e Tangenciais

Caro estrategista, quando uma partícula se movimenta numa trajetória curvilínea podemos representar o seu movimento em coordenadas tangenciais e normais. Assim analogamente ao movimento retilíneo podemos representar a equação do movimento da seguinte maneira:

$$\sum F_t = m \cdot a_t$$

$$\sum F_n = m \cdot a_n$$

Onde (a_n) = a aceleração normal; e (a_t) =aceleração tangencial.

Da mesma maneira, para coordenadas polares temos que

$$\sum F_r = m \cdot a_r$$

$$\sum F_\theta = m \cdot a_\theta$$

Para a aplicação destas equações devemos ter em mente que o procedimento para a resolução de questões é o mesmo adotado para a análise em coordenadas retangulares. O sentido positivo da força normal sempre será para dentro da curvatura da trajetória da partícula de modo que as forças normais atuantes serão positivas no mesmo sentido. O restante da análise é similar ao movimento curvilíneo estudado na cinemática das partículas.

Passaremos agora a analisar o movimento de uma partícula através dos conceitos de trabalho e energia.



4 - Cinética de uma partícula: trabalho e energia

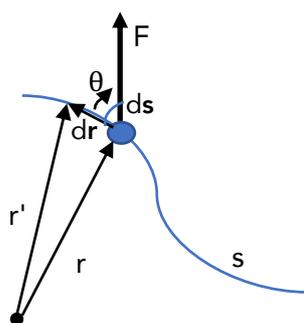


Prezado aluno(a), quando um guindaste precisa levantar uma carga ele está exercendo uma força direcionada para **movimentar uma carga de um ponto a outro**, ou seja, ele está realizando **trabalho para levantar um peso**. Nesta seção iremos estudar conceitos de energia e trabalho que serão uteis para resolução de questões que envolvam força, velocidade e deslocamento.

Notadamente, uma **força (F) realiza trabalho em uma partícula** apenas **quando esta tem um deslocamento na direção positiva da força**. Se a força (F), da figura abaixo, promove um deslocamento na partícula na trajetória (s) de (r) até (r'), podemos expressar o deslocamento por, $dr=r'-r$. A intensidade de (dr) é (ds), que nada mais é que o comprimento do segmento diferencial ao longo da trajetória. Adotando (θ) como o ângulo entre as direções de F e (dr), podemos definir o trabalho realizado (dU) por F como:

$$dU = F \cdot ds \cos \theta$$

Vejamos a imagem abaixo para melhor compreensão:



Assim a equação do trabalho pode ser escrita de acordo com a definição do produto escalar por:

$$dU = F \cdot dr$$

O **trabalho** pode ser **positivo ou negativo**, dependendo do ângulo (θ). Note que se $0 < \theta < 90^\circ$, a **força e o deslocamento** terão o **mesmo sentido**, assim o trabalho será **POSITIVO**. Da mesma forma que para $90^\circ < \theta < 180^\circ$, os vetores **força e deslocamento** terão **sentidos opostos**, logo o trabalho será **NEGATIVO**. Se a força for perpendicular ao deslocamento ($\theta=90^\circ$) ou se ela for aplicada em um ponto fixo, com nenhum deslocamento dU será igual a zero.



Por fim, a unidade de trabalho no sistema internacional (SI) é joule (J), que indica a quantidade de trabalho realizado por uma força de 1 Newton quando esta apresenta deslocamento por uma distância de um metro na direção da força. Portanto, um joule é igual a 1 newton vezes metro (1J=1N.m).

Professor, qual a diferença entre trabalho e momento, visto que ambos são calculados pelo produto da força e deslocamento?

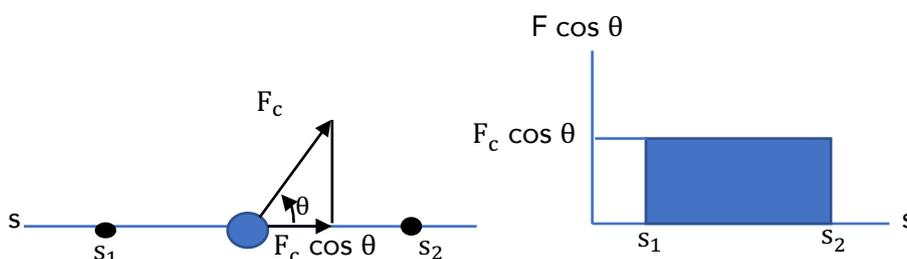
Vamos lá, o **momento, torque ou momento da força** é calculado pela **força multiplicada pela DISTÂNCIA**, da linha de ação da força até o local (ponto) ao qual está sendo calculado o momento. Já o **trabalho** é o produto entre a **força aplicada e o DESLOCAMENTO** (distância que a partícula percorreu) devido a componente de força na direção do deslocamento, sendo essa uma grandeza escalar.

4.1 - Trabalho de uma força constante se deslocando ao longo de uma linha reta

Se uma força (F_c) possui uma intensidade constante e atua também com um ângulo constante (θ) em linha reta, a componente da força na direção do deslocamento será sempre $F_c \cdot \cos \theta$. Admitindo-se que a partícula se move do ponto s_1 até o ponto s_2 o trabalho é determinado pela integração. Vejamos:

$$U_{1-2} = F_c \cdot \cos \theta \cdot \int_{s_1}^{s_2} ds$$

Vejamos a imagem abaixo:



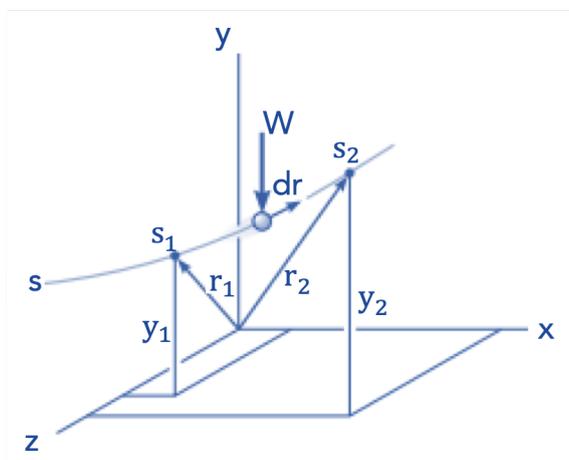
Neste caso o **trabalho é a área do retângulo**, logo podemos calculá-lo por:

$$U_{1-2} = F_c \cos \theta (s_2 - s_1)$$



4.2 - Trabalho de um peso

Vamos considerar uma **partícula** (W) que está **sendo elevada** ao longo de uma trajetória (s). Nesta situação o trabalho é independente da trajetória da partícula, portanto ele será calculado pela multiplicação da intensidade do peso da partícula e o seu deslocamento vertical. Uma vez que o **peso da partícula está dirigido para baixo e o deslocamento é para cima o trabalho será NEGATIVO**. Vejamos a figura abaixo:



Assim o trabalho de um peso é dado pela seguinte expressão matemática:

$$U_{1-2} = -W \cdot \Delta y$$

Onde $\Delta y = y_2 - y_1$.



Professor, quando a partícula se deslocar para baixo ($-\Delta y$), o trabalho do peso será positivo ou negativo? Por quê?

Caro aluno(a), sempre fique atento a esse tipo de conceito. A explicação aqui é simples, pois neste caso o **trabalho será POSITIVO** devido ao fato de que a **força peso e o deslocamento atuam no mesmo sentido**.

Vamos agora ao estudo do trabalho realizado por uma mola elástica.



4.3 - Trabalho realizado por uma mola

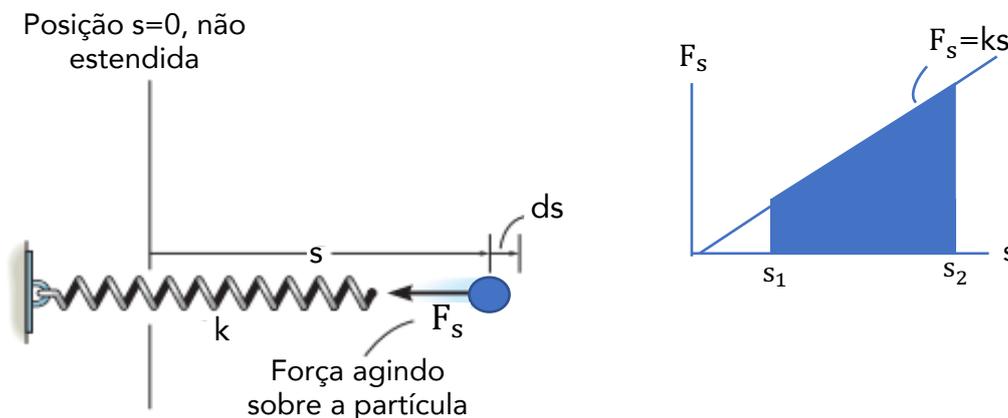
Quando deformamos uma mola elástica por uma distância (ds), o trabalho realizado pela força aplicada sobre a partícula ligada a mola será dado por:

$$dU = -F_s ds = -ks ds$$

Realizando a integração desta equação, onde a partícula se desloca de (s_1) para (s_2) chegamos à seguinte expressão para o trabalho realizado:

$$U_{1-2} = -\left(\frac{1}{2}k \cdot s_2^2 - \frac{1}{2}k s_1^2\right)$$

Basicamente o **trabalho realizado pela mola** será a **área trapezoidal do gráfico** abaixo. Vejamos:



Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

Cabe destacar, que neste caso o trabalho é negativo uma vez que a força atua no sentido oposto de ds . Caro estrategista, para você evitar erros de sinal preste atenção sempre se a **FORÇA DA MOLA** atuando sobre a partícula **possui o mesmo sentido que o deslocamento desta**. Se possuem **mesmo sentido** o trabalho será **positivo**, caso possuam **sentidos opostos** o trabalho será **negativo**.

Vamos agora ao estudo do princípio de trabalho e energia.

4.4 - Princípio do Trabalho e Energia

A energia cinética (T) de uma partícula é definida por:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$



Sendo (T) o trabalho total que deve ser imposto sobre a partícula para retirá-la de um estado de repouso até uma velocidade (v). A energia cinética também é expressa em joules e está **sempre será positiva**, não importando o sentido da velocidade. Assim a equação de trabalho-energia é representada por:

$$U_{1-2} = T_2 - T_1 = \Delta T$$

Está equação demonstra que o **trabalho total** realizado pelas forças que atuam sobre uma partícula durante o seu movimento entre o ponto 1 e o ponto 2 é igual a **variação na energia cinética da partícula**.



Apesar de (T) ser sempre positiva a variação (ΔT) pode ser positiva, negativa ou zero.

Rearranjando a equação de trabalho-energia podemos escrevê-la da seguinte maneira:

$$T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$$

Caro aluno(a), esta equação representa que a energia cinética inicial da partícula somada ao trabalho realizado por todas as forças que agem sobre a partícula quando está se desloca de uma posição inicial para uma posição final é igual à energia cinética final da partícula.

Visto isso, vamos analisar agora como podemos analisar o princípio do trabalho e energia para um **sistema de partículas isoladas** dentro de uma região fechada no espaço. Assim se aplicarmos o princípio do trabalho e energia para cada uma das partículas do sistema, encontramos a equação de trabalho-energia pela **soma das energias cinéticas de cada partícula**. Logo, a equação que representa a equação trabalho-energia em um sistema de partículas é:

$$\sum T_1 + \sum U_{1-2} = \sum T_2$$

Portanto, a energia cinética inicial do sistema mais o trabalho efetuado por todas as forças externas e internas atuando sobre o sistema será igual à energia cinética final do sistema. A partir desta análise fica evidenciado que **em um corpo rígido em translação, ou vários corpos em translação conectados, todas as partículas em cada corpo terão o mesmo deslocamento**.



4.5 - Potência e eficiência

Prezado estrategista, no universo da engenharia mecânica e em nosso cotidiano comumente ouvimos a palavra potência. Por exemplo, você já deve ter ouvido falar sobre a potência do motor de um carro ou ainda a respeito da potência de algum eletrodoméstico ou eletroportáteis. Peço para você parar um pouco e pensar, você saberia conceituar potência? Se a resposta for sim, ótimo! Caso contrário, não se preocupe que vamos estudar agora. Bora lá?!

A **potência** nos indica a **capacidade de uma máquina** que nada mais é que a taxa de realização de trabalho no tempo. Ainda não ficou claro, certo? Vamos exemplificar, pense em duas bombas de água esvaziando duas piscinas com um mesmo volume de água. Caso não ocorra nenhum problema, ambas realizarão o trabalho se tiverem tempo suficiente, contudo aquela que tiver uma maior potência irá terminar de esvaziar a piscina de uma maneira mais rápida, certo? Então não esqueça, simplificada a **potência é a rapidez que um trabalho é realizado**.

A potência gerada por uma máquina ou motor que gera trabalho pode ser definida pela seguinte equação:

$$P = F \cdot v$$

Em que (P)= Potência que é um escalar; (F)= a força atuante; e (v) = a velocidade da partícula. A unidade básica de potência no SI é o watt (W) que é :

$$1W = 1 \frac{J}{s} = 1 \frac{N \cdot m}{s}$$

Existem também outras unidades de potência como a inglesa *horsepower* (cavalo-vapor).

A partir da potência podemos encontrar a **eficiência mecânica de uma máquina** (ε) sendo está a **razão entre a potência útil de saída que é produzida pela máquina e a potência de entrada** que lhe é fornecida. Vejamos:

$$\varepsilon = \frac{\text{Potência de saída}}{\text{potência de entrada}}$$

Caso a energia fornecida à máquina ocorre no mesmo intervalo de tempo em que ela é consumida podemos obter a eficiência da máquina por:

$$\varepsilon = \frac{\text{energia de saída}}{\text{energia de entrada}}$$

As máquinas são compostas por diversos tipos de peças e componentes que apresentam atrito entre si. Quando existe forças de atrito ocorre perda de energia na forma de calor logo é necessário que a energia de entrada seja maior do que aquela desejada na saída da máquina, para compensar estas perdas. Portanto, a **eficiência de uma máquina será sempre menor que 1**.



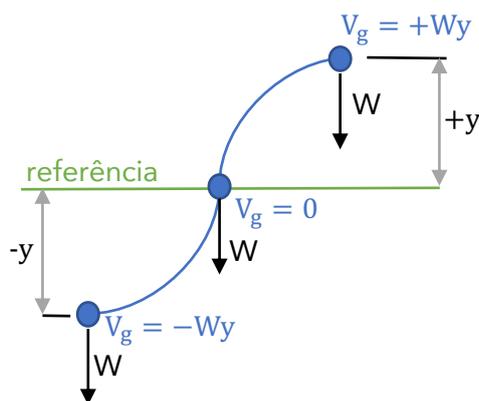
Aprendido como determinar a potência e eficiência em máquinas, passaremos agora para o estudo das forças conservativas e energia potencial.

4.6 - Forças Conservativas e energia potencial

Uma vez que o **trabalho realizado por uma força não depende da trajetória**, mas somente das posições inicial e final da força na trajetória, podemos realizar a classificação desta força como uma **força conservativa**. Dois exemplos de força conservativa são a força peso de um corpo e a força elástica de uma mola, pois o trabalho da força peso depende apenas do deslocamento vertical do peso e o trabalho realizado por uma mola depende apenas do deslocamento de tração ou compressão da mola.

Um exemplo de força não conservativa é a força de atrito, pois quando um objeto desliza sobre uma superfície fixa o trabalho realizado depende da trajetória, pois quanto maior ela for maior será o trabalho. Em consequência disso o trabalho é dissipado do corpo em forma de calor.

A **energia potencial** de uma partícula é a **quantidade de trabalho que uma força conservativa irá realizar quando ela se mover de uma posição até uma outra tida como referência**. Se uma partícula estiver posicionada a uma distância (y) acima de uma referência está irá apresentar uma energia potencial gravitacional (V_g), uma vez que W irá realizar trabalho positivo quando a partícula se mover para baixo.



Caso a partícula esteja posicionada a uma distância (y) abaixo da referência ela terá uma energia potencial gravitacional (V_g) negativa, pois o peso realiza trabalho negativo quando a partícula é levada para cima. Assim se a partícula estiver sobre a referência (V_g) será igual a zero. Assim se (y) for positivo para cima, temos que:

$$V_g = W \cdot y$$

Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

Vamos conceituar agora a energia potencial elástica.

Para se determinar a energia potencial de uma mola elástica quando está é distendida ou comprimida a uma distância (s) podemos utilizar a seguinte equação:

$$V_e = +\frac{1}{2}k \cdot s^2$$

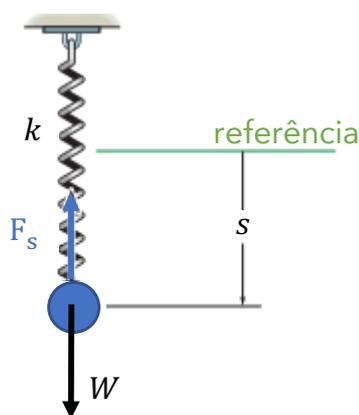


Neste caso a **energia potencial elástica sempre será positiva**, visto que, quando a **mola se encontra deformada** a força que a mola possui tem a capacidade para realizar trabalho positivo sobre a partícula quando ela retorna para sua posição inicial (não deformada).

Assim quando submetemos uma partícula a **duas forças** sendo uma **elástica e a outra gravitacional** a energia potencial pode ser expressa como a **soma algébrica** das duas. Vejamos:

$$V = V_g + V_e$$

Lembre-se que (V) dependerá da posição da partícula em relação a referência adotada.



O trabalho realizado por uma força conservativa que desloca a partícula de um ponto para outro é dado por:

$$U_{1-2} = V_1 - V_2$$

Vejamos agora a figura ao lado. A função potencial de uma partícula com peso W, que está suspensa por uma mola pode ser determinada em função da posição (s), que é medida em relação a referência localizada no comprimento não deformado da mola, de acordo com a seguinte equação:

$$V = V_g + V_e = -W \cdot s + \frac{1}{2} k \cdot s^2$$

Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

Neste caso, se a partícula se deslocar s_1 para uma posição mais baixa s_2 utilizando a equação do trabalho obtém-se:

$$U_{1-2} = V_1 - V_2 = \left(-W \cdot s_1 + \frac{1}{2} k \cdot s_1^2\right) - \left(-W \cdot s_2 + \frac{1}{2} k \cdot s_2^2\right) = W(s_2 - s_1) - \left(\frac{1}{2} k \cdot s_2^2 - \frac{1}{2} k \cdot s_1^2\right)$$

Difícilmente uma equação deste porte será cobrada em prova, contudo é importante que você tenha conhecimento de como proceder caso seja exigido. Agora vamos ao estudo do princípio de conservação de energia.

4.7 - Conservação de energia

O princípio do trabalho e energia pode ser escrito como:

$$T_1 + V_1 + \left(\sum U_{1-2}\right)_{\text{não cons.}} = T_2 + V_2$$

Sei que você deve estar se perguntando o que quer dizer esse somatório. Vamos a explicação! Quando uma partícula está sujeita a forças tanto conservativas quanto não



conservativas, o trabalho realizado pelas forças conservativas pode ser descrito como a diferença entre suas energias potenciais. Vejamos:

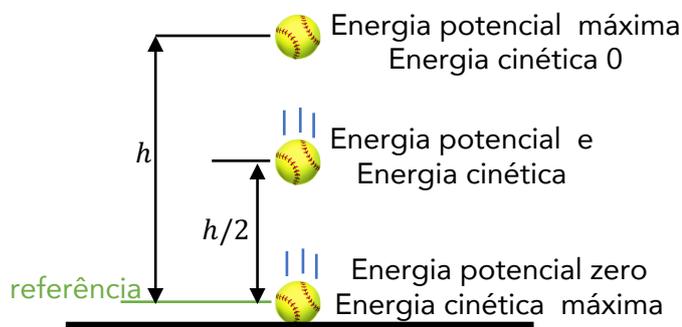
$$\left(\sum U_{1-2}\right)_{cons.} = V_1 - V_2$$

Assim podemos descrever o princípio de trabalho e energia como na equação anterior, em que $(\sum U_{1-2})_{n\tilde{a}o\ cons.}$ é o trabalho das forças não conservativas atuando sobre a partícula. Agora, se apenas forças conservativas realizam trabalho, rearranjando a equação temos que:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

Está equação é denominada **equação da conservação de energia** mecânica ou somente equação da conservação de energia.

Professor, tudo bem que está é a equação de conservação de energia, mas o que ela quer dizer?



Veja bem, esta equação nos diz que **ao longo do movimento**, a **soma das energias cinética e potencial permanece constante**, ou seja, para que isso ocorra a energia cinética deve ser transformada em energia potencial e vice-versa. Pense em um uma bola de tênis, com força peso W , sendo segurada a uma altura (h) do chão, que é a nossa referência. Enquanto estivermos segurando a bola a energia

potencial dela será máxima e sua energia será nula. Assim a energia mecânica total da bola na sua posição inicial será:

$$E = T_1 + V_1 = 0 + W \cdot h = W \cdot h$$

Quando soltarmos a bola e ela estiver na metade da trajetória entre a altura inicial e o solo ($h/2$) é possível determinar a velocidade da bola pela seguinte equação de movimento retilíneo com aceleração constante:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(y - y_0)$$

Como a velocidade inicial é zero e a aceleração da gravidade é constante e conhecida, temos que a energia da bola de tênis a meia altura será:

$$E = T_2 + V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{W}{g} \cdot (\sqrt{gh})^2 + W \left(\frac{h}{2}\right) = W \cdot h$$



O termo $\left(\frac{W}{g}\right)$ no indica a massa da bola e $(\sqrt{gh})^2$ a velocidade dela.

Por fim, no instante imediato antes da bola atingir o solo a energia potencial da bola será zero e a velocidade será $v = \sqrt{2gh}$. Assim a energia total da bola nesse ponto será:

$$E = T_3 + V_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{W}{g} \cdot (\sqrt{2gh})^2 + 0 = W \cdot h$$

Espero que tenha ficado claro. Note que a partir do momento que a bola entra em contato com o solo, ela irá se deformar, caso o chão seja duro, ela irá rebater e subir a uma altura inferior a inicial (h). Sem considerarmos o atrito do ar, isto se deve ao fato de que ocorre perda de energia durante a colisão na forma de ruído, deformação na bola e no solo e calor.

Para finalizarmos este tópico, similarmente ao estudado para uma partícula submetida somente a forças conservativas, quando um **sistema de partículas** é sujeito a forças conservativas podemos descrever o princípio de conservação de energia como a **soma das energias cinética e potencial iniciais do sistema sendo igual à soma das energias potencial e cinética finais do sistema**. Vejamos:

$$\sum T_1 + \sum V_1 = \sum T_2 + \sum V_2$$

Encerramos aqui o estudo do princípio da conservação de energia. Geralmente em questões que envolvam velocidade, deslocamento e sistemas de força conservativa a resolução será mais fácil aplicando o princípio de conservação de energia do que o princípio do trabalho e energia. Na utilização do **princípio da conservação** de energia é necessário encontrar a **energia cinética e potencial apenas em dois pontos ao longo da trajetória**, ao invés de determinar o trabalho da partícula quando está se desloca.

Vamos agora ao estudo do impulso e quantidade de movimento.

5 - Impulso e quantidade de movimento

Caro aluno(a), neste tópico de nossa aula iremos tratar a respeito do princípio do impulso e da quantidade de movimento linear de uma partícula e a conservação da quantidade de movimento linear de partículas. Além disso, estudaremos a mecânica do impacto e introduziremos o estudo do impulso e quantidade de movimento angular. Bora lá?!

5.1 - Princípio do impulso e quantidade de movimento linear

A equação denominada **princípio do impulso e quantidade de movimento** linear é obtida através da integração no tempo da equação do movimento. Vejamos a equação:



$$\sum \int_{t_1}^{t_2} F \cdot dt = mv_2 - mv_1$$

A partir desta equação podemos diretamente obter a velocidade final de uma partícula, (v_2), após um determinado período de tempo, quando conhecermos a velocidade inicial da partícula e as forças que agem sobre a partícula forem constantes ou possam ser expressas como funções do tempo.

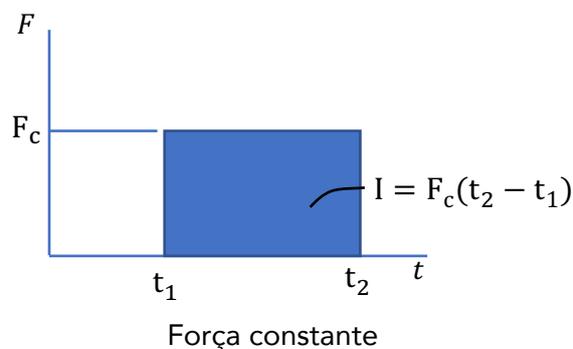
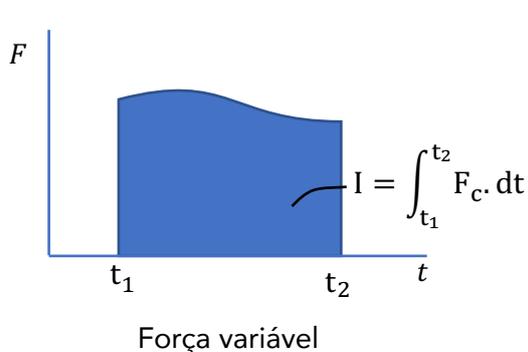
Cada vetor ($L = mv$) é chamado de quantidade de movimento linear da partícula. Como a massa é um escalar positivo o vetor quantidade de movimento linear (L) possui a mesma direção do vetor velocidade e sua unidade é dada em kg.m/s.

A integral $I = \int F \cdot dt$ é denominada de impulso linear que indica a quantidade vetorial que mensura o efeito da força no intervalo de tempo de atuação desta. Uma vez que o tempo é positivo o impulso age na direção da força e sua unidade é N.s. Caso a força seja constante em intensidade e direção o impulso pode ser calculado por:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F_c \cdot dt = F_c(t_2 - t_1)$$



A intensidade do impulso também pode ser representada graficamente através da área sombreada da curva versus o tempo. Quando a força for constante a área será retangular. Vejamos:

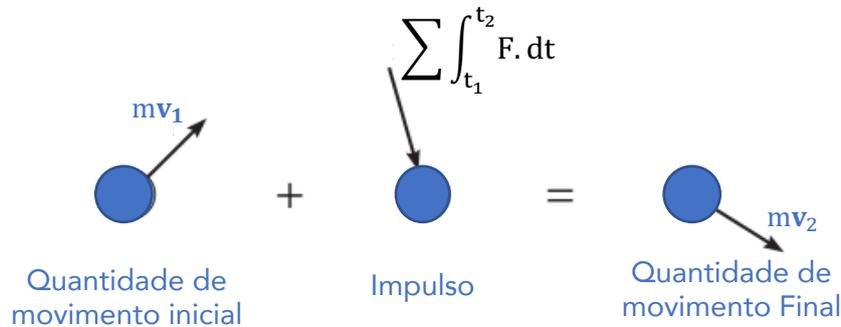


Podemos escrever a equação de princípio do impulso e quantidade de movimento linear de outra maneira de forma a facilitar na resolução de questões da seguinte forma:



$$mv_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F \cdot dt = mv_2$$

Esta equação determina que a **quantidade de movimento inicial da partícula no tempo** (t_1), **mais a soma de todos os impulsos aplicados na partícula** de (t_1 a t_2), é **igual a quantidade de movimento final da partícula no tempo** (t_2). Vejamos um diagrama de corpo livre para melhor entendimento:



Se **decompormos os vetores** do diagrama em suas componentes X, Y e Z encontramos as **três equações escalares** seguintes:

$$m(v_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x \cdot dt = m(v_x)_2$$

$$m(v_y)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y \cdot dt = m(v_y)_2$$

$$m(v_z)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_z \cdot dt = m(v_z)_2$$

Para a análise de um sistema de partículas através do princípio do impulso e quantidade de movimento linear utilizamos a seguinte equação:

$$\sum m_i(v_i)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_i \cdot dt = \sum m_i(v_i)_2$$

Essa equação nos diz que a quantidade de movimento linear inicial do sistema, somados os impulsos de todas as forças externas agindo no sistema, entre (t_1) e (t_2) são iguais a quantidade de movimento linear final do sistema.

Mas professor, por que somente as forças externas são consideradas nesta equação?



As **forças internas** que agem entre as partículas **não são consideradas** neste caso, porque de acordo com a terceira lei de Newton, elas atuam em pares colineares iguais, com sentidos opostos, e, portanto, se anulam.

Conhecendo-se o centro de massa (G) do sistema de partículas temos que $mv_G = \sum m_i v_i$, substituindo esta equação na anterior obtém-se:

$$m(v_G)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_i \cdot dt = m(v_G)_2$$

Neste caso a quantidade de movimento linear inicial da partícula agregada, adicionados os impulsos externos que atuam sobre o sistema de partículas entre (t_1) e (t_2) , é equivalente à quantidade de movimento linear final da partícula agregada.



A equação anterior comprova a utilização do princípio do impulso e quantidade de movimento linear a um sistema de partículas componentes de um corpo rígido.

5.2 - Conservação da quantidade de movimento linear

Uma vez que a **soma dos impulsos** decorrentes das forças externas agindo sobre um sistema de partículas **for igual a zero** obtemos a **equação da conservação da quantidade de movimento linear**. Descrita como:

$$\sum m_i (v_i)_1 = \sum m_i (v_i)_2$$

Substituindo $mv_G = \sum m_i v_i$ na equação acima temos que $(v_G)_1 = (v_G)_2$ indicando que a velocidade do centro de massa de um sistema de partículas permanece inalterada se nenhum impulso externo for aplicado ao sistema.

Prezado estrategista, usualmente utilizamos os **princípios da quantidade de movimento linear** para resolver questões onde acontece **colisão ou interação entre partículas**. Neste tipo de questão é importante uma correta concepção do diagrama de corpo livre para a determinação exata das forças externas e internas que criam impulsos, para assim determinar para qual direção a quantidade de movimento linear é preservada.



Os **impulsos internos sempre se cancelarão**, conforme exposto anteriormente e **forças de impulso externas** que ocorrem em um **intervalo de tempo muito curto** podem também ser consideradas **igual a zero**. No entanto, **forças de intensidade** muito grande podem produzir uma variação significativa em um intervalo de tempo muito curto sendo denominadas de **forças impulsivas**. Estas devem ser sempre consideradas na análise de impulso-quantidade de movimento.

As forças impulsivas aparecem normalmente quando existe uma explosão ou choque entre dois corpos, enquanto forças não impulsivas são aquelas geradas pelo peso de um corpo, por uma mola levemente deformada ou com rigidez pequena ou qualquer força que seja muito pequena comparada com as demais atuantes no sistema.

Visto isso vamos agora ao estudo do impacto!

5.3 - Impacto

Quando **dois corpos se chocam entre si**, em um intervalo de tempo muito curto, gerando forças relativamente grandes, agindo sobre os corpos, **ocorre impacto**. Um exemplo de impacto ocorre quando um carpinteiro martela um prego.

Geralmente existem **dois tipos de impacto** que são o **impacto central e o impacto oblíquo**. Vejamos:

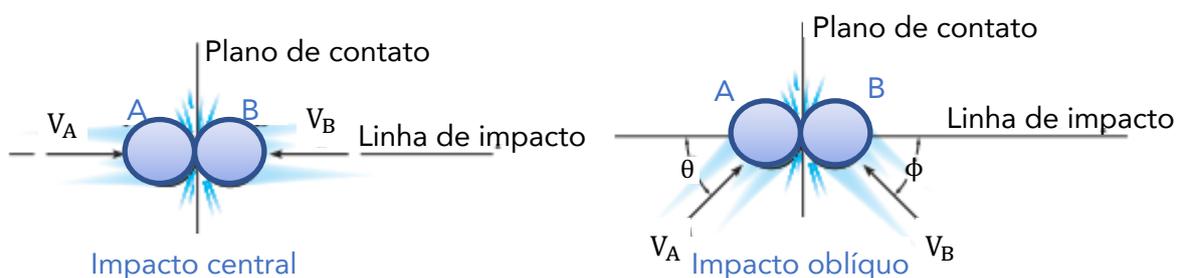
IMPACTO CENTRAL

- Ocorre quando a direção do movimento dos centros de massa de ambas as partículas que se colidem está disposta ao longo de uma linha que atravessa os centros de massas dessas partículas.

IMPACTO OBLÍQUO

- Ocorre quando a direção do movimento dos centros de massa de ambas as partículas que se colidem forma um ângulo com a linha de impacto entre os centros de massas dessas partículas.

A Figura abaixo exemplifica os dois tipos de impacto



Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

Meu (minha) amigo(a) concurseiro(a), na maioria das questões de prova sobre este tema serão fornecidos os valores da velocidade inicial das partículas e será exigido a determinação das velocidades finais. Nesta situação, a quantidade de movimento do sistema de partículas se mantém conservada, uma vez que, no período da colisão, os impulsos internos de deformação e restituição cancelam-se.

Vamos considerar um projétil com massa de 200g, que foi disparado na direção horizontal contra um bloco de madeira de 3,8kg em repouso sobre uma superfície. O projétil atingiu o bloco com uma velocidade constante, horizontalmente, de 200m/s e ficou encravada nele. Desconsiderando o atrito entre o bloco e a superfície podemos determinar a velocidade com que o bloco se desloca no instante imediato após o impacto, através do princípio da quantidade de movimento. Vejamos:

$$m_p \cdot v_p + m_b v_b = v_f (m_b + m_p)$$

Como as partículas passarão a se movimentar juntas elas terão uma velocidade comum (v_f).

Assim temos que:

$$v_f = \frac{m_p \cdot v_p + m_b v_b}{(m_b + m_p)}$$

Sabendo que $v_b = 0$, pois o bloco encontra-se em repouso inicialmente, e substituindo os valores obtemos $v_f = 10 \text{ m/s}$.

Uma segunda equação que podemos utilizar para análise de impacto entre duas partículas A e B é o coeficiente de restituição (e) que é expresso em termos das velocidades iniciais e finais da partícula com sentido para a direita positivo. Vejamos:

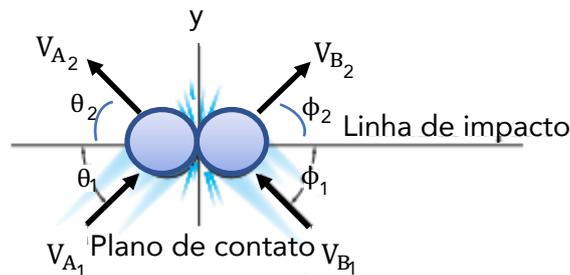
$$e = \frac{(v_b)_2 - (v_a)_2}{(v_a)_1 - (v_b)_1}$$

Se o coeficiente de restituição for especificado podemos determinar as velocidades de ambas as partículas. Tome muito cuidado com para adotar a **correta convenção de sinal**. Se o **valor da velocidade obtida for positivo ela atuará para a direita caso seja negativo para a esquerda**.

Geralmente (e) possuirá um valor entre 0 e 1. Se a colisão for perfeitamente elástica $e=1$. Caso a colisão seja inelástica (plástica) as partículas irão se aderir e passam a possuir uma velocidade comum. Neste caso e será igual a 0. Por fim, se o impacto for perfeitamente elástico não haverá perda de energia na colisão, da mesma forma que, se a colisão for plástica a energia perdida durante a colisão será máxima.



Difícilmente em prova de concursos será exigida a análise de impacto oblíquo, pois está demanda tempo e envolve maior complexidade, mas, caso isso aconteça, você deve utilizar o seguinte procedimento:



Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

1- Adote o eixo Y dentro do plano de contato e o eixo X ao longo da linha de impacto, logo as forças impulsivas de deformação e restituição irão agir somente da direção x.

2- Decomponha as velocidades iniciais conhecidas em suas respectivas componentes X e Y.

3- Uma vez que a quantidade de movimento do sistema é preservada na linha de impacto no eixo X, determine a velocidade final no eixo X a partir de $\sum m (v_x)_1 = \sum m (v_x)_2$

4- A partir da equação do coeficiente de restituição (e) é possível determinar as componentes $(v_{Ax})_2$ e $(v_{Bx})_2$.

5- A quantidade de movimento da partícula A é mantida ao longo do eixo Y. Assim você pode utilizar a seguinte expressão $m_A (v_{Ay})_1 = m_A (v_{Ay})_2$ ou $(v_{Ay})_1 = (v_{Ay})_2$.

6- Por fim, a quantidade de movimento da partícula B também é mantida ao longo do eixo Y. Logo, $(v_{By})_1 = (v_{By})_2$.

Através da aplicação destas **quatro equações** é possível realizar a **análise de impacto oblíquo**.

Encerramos assim o estudo do impacto. Iniciaremos agora, em nossa aula, o estudo da cinemática do movimento plano de um corpo rígido.

6 - Cinemática do movimento plano de um corpo rígido

Para a resolução de questões onde é necessário o conhecimento de projeto de engrenagens, cames e dos diversos mecanismos utilizados para operações mecânicas devemos ter conhecimento do movimento plano de um corpo rígido. Neste tópico de nossa aula, iremos aprender a classificar os vários tipos de movimento plano de um corpo rígido e analisar cada um detalhadamente. Preparados? Vamos iniciar pelo movimento plano de um corpo.



6.1 - Movimento plano de um corpo

Prezado estrategista, existem **três tipos de movimento plano** de um corpo rígido que são: **translação, rotação em torno de um eixo fixo e movimento plano geral**. Vejamos o conceito de cada um.

MOVIMENTO PLANO DE UM CORPO RÍGIDO

Translação

ocorre quando um linha sobre o corpo se mantém paralela à sua orientação original durante o movimento. Pode ser dividida em translação retilínea e curvilínea.

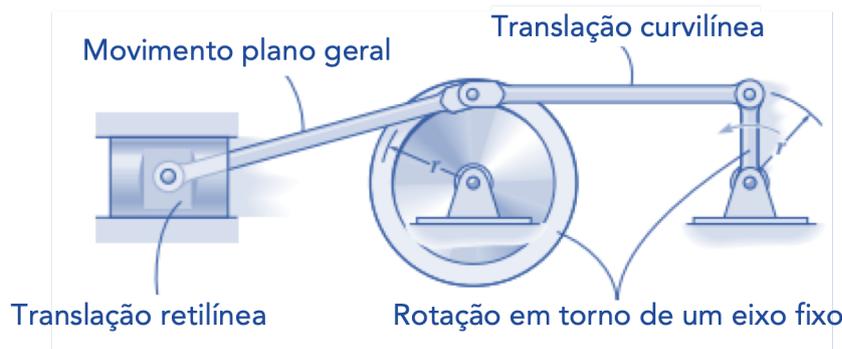
Rotação em torno de um eixo fixo

ocorre quando um corpo rígido girar em torno de um eixo fixo. Todas as partículas do corpo, exceto as localizadas no eixo de rotação, se deslocam com trajetória circular.

Movimento plano geral

ocorre quando existe a combinação de translação e rotação. A translação acontece dentro de um plano de referência e a rotação se dá em torno de um eixo perpendicular a este plano.

A Figura abaixo representa um mecanismo que apresenta todos os tipos de movimento plano de um corpo rígido.



Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

Iniciaremos o estudo detalhado de cada um dos movimentos planos de corpos rígidos com a translação.

6.2 - Translação

Apesar de envolver uma certa complexidade, o estudo da **translação** é o **mais simples** comparado com os outros tipos de movimentos planos de corpos rígidos. No primeiro momento irá parecer um tanto quanto complexo a análise dos movimentos, contudo com o passar do tempo



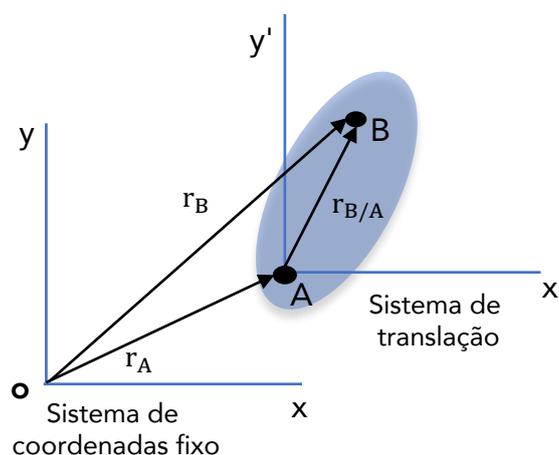
você irá se acostumando e aprendendo de uma maneira que, poderá consolidar toda a carga de conhecimento adquirida na resolução das questões no final desta aula.

Considere um corpo rígido sujeito a um movimento de translação retilínea ou curvilínea dentro de um plano X-Y.

Determinamos as posições A e B sobre o corpo em relação a uma referência fixa a partir dos vetores de posição r_A e r_B . Um sistema de coordenadas em translação X' e Y' , fixado no corpo possui sua origem em A, que definiremos como o ponto base. Assim a posição de B em relação ao ponto A é dada pela posição relativa de um vetor $r_{B/A}$. Assim pela adição vetorial temos que

$$r_B = r_A + r_{B/A}$$

Vejamos a imagem abaixo para uma melhor compreensão:



Nesta situação o vetor velocidade v_B será igual a v_A assim como as acelerações instantâneas de A e B serão igual ($a_A = a_B$).



Essas igualdades indicam que todos os pontos de um corpo rígido sujeitos a um movimento de translação retilínea ou curvilínea se movem com a mesma velocidade e aceleração.



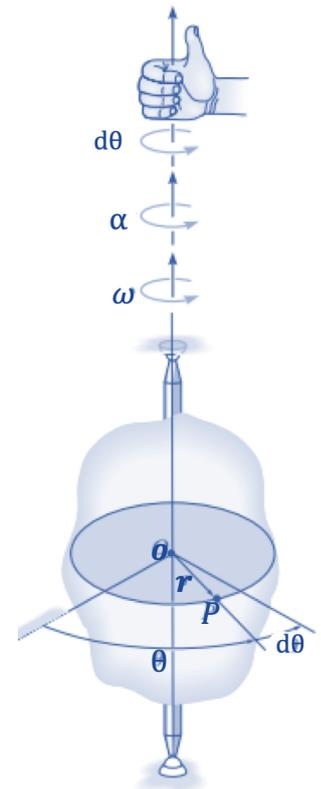
6.3 - Rotação em torno de um eixo

Caro aluno(a), a rotação de um corpo é descrita pelo seu movimento angular. Por exemplo, quando um corpo rotaciona em torno de um eixo fixo, qualquer ponto P do corpo estará se deslocando dentro de uma trajetória circular. Vamos ao entendimento do movimento circular de um corpo.

Uma vez que o ponto é adimensional, ele não apresentará movimento angular, pois apenas linhas ou corpos sofrem movimento angular. Vejamos a imagem ao lado.

No instante demonstrado podemos definir a posição angular (θ) pelo ângulo (θ) que é medido através de uma linha de referência fixa até (r). A variação da posição angular ($d\theta$) é denominada de deslocamento angular. A sua **direção** é determinada pela **regra da mão direita** os dedos são fechados indicando o sentido da rotação.

A velocidade angular ômega (ω) é a taxa de variação na posição angular, normalmente é dada em radianos por segundo (rad/s). Já aceleração angular alfa (α) é a taxa temporal de variação da velocidade angular. Vejamos as equações que definem cada uma delas:



Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}; \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}; \quad \alpha d\theta = \omega d\omega$$

Caso a aceleração angular seja constante, em semelhança ao movimento retilíneo de uma partícula podemos encontrar as seguintes equações, com **sentido anti-horário positivo**, que relacionam a velocidade e a posição angular do corpo e o tempo:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c \cdot t$$

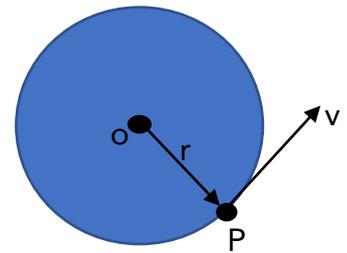
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_c t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$



Os termos com subscrito zero indicam os valores iniciais da posição angular e velocidade angular.

Conforme o corpo rígido gira o ponto P se move ao longo de sua trajetória circular de raio (r) com centro no ponto O. Assim a posição de P é dada pela vetor de posição (r) entre os pontos O e P. Se o corpo variar $d\theta$, P se movimentará $ds=r d\theta$.



A velocidade do ponto P é dada por (v) que pode ser obtida por:

$$v = \omega \cdot r$$

Também, podemos determinar a intensidade e a direção do vetor velocidade (v) através do produto vetorial:

$$v = \omega \times r_P$$



A ordem dos vetores na equação acima influenciará no resultado final, visto que o **produto vetorial não é comutativo**, pois $\omega \times r_P \neq r_P \times \omega$.

A aceleração do ponto P possuirá componentes tangenciais e normais são obtidas por:

$$\alpha_t = \alpha \cdot r$$

$$\alpha_n = \omega^2 \cdot r$$

A **aceleração tangencial** é a **variação da intensidade da velocidade no tempo**. Portanto, se a velocidade de P aumenta a aceleração tangencial possuirá a mesma direção da velocidade (v), se a velocidade diminuir atuará no sentido oposto e por fim se a velocidade não variar a aceleração tangencial será nula.

A **aceleração normal** representa a **variação da direção da velocidade no tempo** e sua direção sempre será para o centro da trajetória circular.

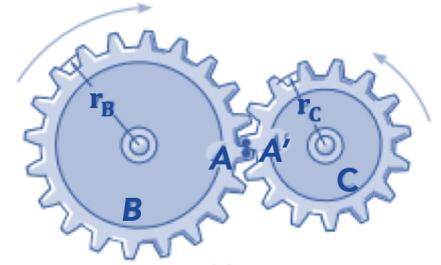
Da mesma maneira que a velocidade angular a aceleração no ponto P pode ser representada a partir de produto vetorial. Vejamos:

$$\alpha = \alpha_t + \alpha_n = \alpha \times r - \omega^2 \cdot r$$



Quando dois corpos girantes estão em contato um com o outro, os pontos de contato apresentam trajetórias circulares diferentes, a velocidade e as componentes tangenciais da aceleração no ponto serão equivalentes, contudo, as componentes normais da aceleração não serão iguais.

A Figura ao lado representa duas engrenagens unidas. O ponto A, na engrenagem B possui um ponto coincidente A' está localizado na engrenagem C. Devido ao movimento de rotação, $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{A'}$, logo



Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

$$\omega_B r_B = \omega_C r_C \quad \Rightarrow \quad \omega_B = \omega_C \left(\frac{r_C}{r_B} \right)$$

A relação de aceleração entre as engrenagens é dada por:

$$\alpha_B = \alpha_C \left(\frac{r_C}{r_B} \right)$$



Sempre busque trabalhar com unidades de medidas semelhantes entre a velocidade angular que pode ser dada em rpm e o raio dos corpos giratórios. Também, esse princípio de análise pode ser usado para ligação via correias entre polias.

Principalmente em questões envolvendo relação de transmissão é importante que você saiba realizar a conversão entre as unidades de rotação (velocidade angular). Vejamos algumas conversões:

$$1 \frac{rot}{min} = \frac{2\pi \cdot rad}{min} = \frac{2 \cdot \pi \cdot rad}{60 \cdot seg}$$

Em algumas questões pode ser fornecida a frequência ou o período de revolução. Esta grandeza também pode ser utilizada para obtermos a rotação de um eixo através das seguintes equações:

$$\omega = 2\pi \cdot f; \quad e \quad f = \frac{1}{p}$$

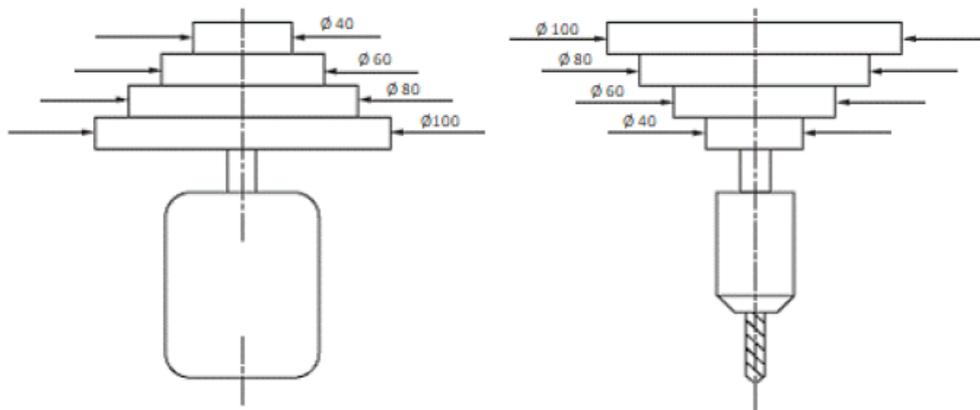


Em que (f) é a frequência em Hertz e (p) é o período em segundos.

Por exemplo, uma máquina que gira com período de revolução de 10ms apresentará uma velocidade angular de 200π [rad/s] ou ainda, usando $\pi=3$, a velocidade angular será de 600 [rad/s].



(FUNDEP/INB - 2018) Uma furadeira de bancada possui um controle de velocidades relacionado com a combinação das polias, do motor e do eixo do mandril, de acordo com a figura a seguir.



Sabendo que a velocidade do motor é 1.280 rpm e o comprimento da correia é constante, assinale a combinação correta de polias para que se obtenha a velocidade de 512 rpm no mandril.

- a) Motor: 40 mm / Mandril: 100 mm
- b) Motor: 60 mm / Mandril: 80 mm
- c) Motor: 80 mm / Mandril: 60 mm
- d) Motor: 100 mm / Mandril: 40 mm

Comentário:

Nesta questão a banca nos fornece as rotações do motor e do mandril e nos pede para calcular os raios das polias do motor e do mandril. A rotação é uma unidade de velocidade angular, e como os corpos em rotação estão conectados por uma correia as mesmas equações utilizadas para a análise de engrenagens podem ser utilizadas aqui. Vejamos:

$$rot_{mot} \cdot r_{mot} = rot_{mand} \cdot r_{man} \Rightarrow \frac{1280}{512} = \frac{r_{man}}{r_{mot}} \Rightarrow r_{man} = 2,5 \cdot r_{mot}$$

Visto isto, sabemos que o raio da polia do mandril precisa ser 2,5 vezes maior do que o raio da polia do motor. Analisando as alternativas já eliminamos as alternativas C e D, pois elas indicam que o a polia do motor é maior do que a polia do mandril.



A **alternativa A** apresenta que a razão entre os raios da polia do mandril e do motor é $100/40=2,5$, sendo igual a razão entre as rotações do motor e do mandril, portanto está CORRETA e é o gabarito da questão.

A **alternativa B** está incorreta, pois a razão entre os raios é $80/60=1,33$.

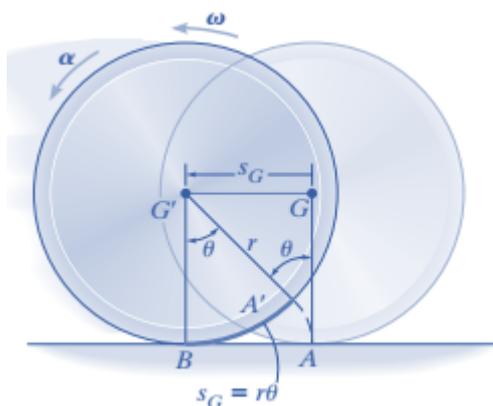
Vamos agora ao estudo do movimento absoluto.

6.4 - Análise do movimento absoluto

Vamos estudar neste tópico o **movimento absoluto** para descrever a cinemática plana dos corpos rígidos. Um **corpo sofrendo translação e rotação** está submetido ao **movimento plano geral**. Se conhecermos ambos os movimentos, rotação angular de uma linha fixa sobre o corpo e o movimento de um ponto sobre o corpo podemos especificar completamente este movimento.

A abordagem de movimento absoluto à cinemática de corpo rígido é relativamente simples, uma vez que a configuração permita uma simplificada descrição geométrica.

Caro estrategista, acredito que a melhor forma de aprendermos esse importante conteúdo é através da análise de exemplos. Portanto, vamos a resolução do primeiro deles em que um cilindro de raio (r), possui uma velocidade angular (ω) e aceleração angular (α).



Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

Neste caso o cilindro está sofrendo **movimento plano geral** uma vez que ele está **girando e trasladando**. Podemos notar que o ponto G desloca-se em linha reta para a esquerda de G até G', conforme o cilindro rola. Assim a coordenada que especificará sua nova posição G' é dada por S_G . Note que a medida que o cilindro rola o comprimento do arco A'B na borda do cilindro em contato com o solo de A para B é igual a S_G . Logo:

$$S_G = r \cdot \theta$$

A partir da derivação no tempo da equação da posição obtemos:



$$v_G = r \cdot \omega$$

$$a_G = r \cdot \alpha$$



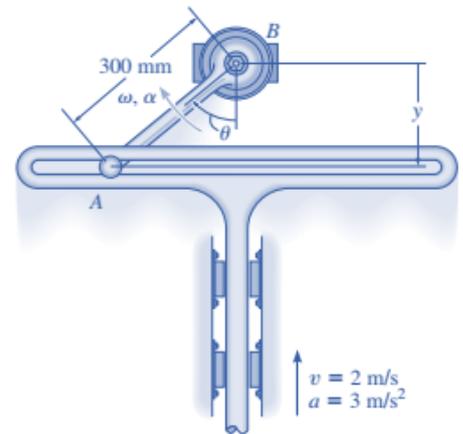
Essas relações são válidas para quando o corpo **não desliza** durante a rolagem.

Em nosso segundo exemplo, vamos analisar o movimento de um mecanismo composto por uma barra guia com fenda e um tirante. Vejamos a imagem:

Sabendo-se que no instante $\theta = 50^\circ$, a barra guia com fenda possui uma velocidade de 2m/s e aceleração de 3m/s. Vamos determinar a aceleração (α) e a velocidade angular (ω) do tirante AB.

Como sabemos a dimensão entre AB e o ângulo θ podemos determinar a equação que define (y) pelo teorema de Pitágoras onde

$$y = 0,3 \cdot \cos \theta$$



Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

Derivando esta equação, implicitamente no tempo, encontraremos a velocidade angular ($\frac{d\theta}{dt}$) e realizando a segunda derivada temporal é possível encontrar a aceleração angular ($\frac{d^2\theta}{dt^2}$). Vejamos:

$$\frac{dy}{dt} = -0,3 \cdot \text{sen } \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (1^{\text{a}} \text{ derivada})$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -0,3 \cdot \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \left(-0,3 \cdot \text{sen } \theta \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \quad (2^{\text{a}} \text{ derivada})$$

Podemos rescrever as equações acima da seguinte maneira:

$$v_y = -0,3 \cdot \text{sen } \theta \cdot \omega$$

$$a_y = -0,3 \cdot \cos \theta \cdot \omega^2 - 0,3 \cdot \text{sen } \theta \cdot \alpha$$



Conhecendo-se os valores de v_y , a_y e θ podemos determinar a velocidade angular e a aceleração angular do tirante AB. Note que o sentido adotado de movimento da guia para cima implica em um movimento no sentido negativo de (y). Assim

$$-2 \left[\frac{m}{s} \right] = -0,3 \cdot \text{sen } 50^\circ \cdot \omega \quad \Rightarrow \quad \omega = 8,7 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

$$-3 \left[\frac{m}{s^2} \right] = -0,3 \cdot \cos \theta \cdot 8,7^2 - 0,3 \cdot \text{sen } 50^\circ \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -50,45 \left[\frac{rad}{s^2} \right]$$

Prezado aluno(a), no estudo da engenharia mecânica é muito importante que você tenha conhecimento das **regras de derivação** para poder resolver questões que exijam tal conhecimento. Note que para a segunda derivada utilizamos a regra do produto em que: $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$. Outra regra que pode ser exigida em prova é a regra do quociente onde $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{(V)^2}$. Vamos adiante com nossa aula.

Sabemos que o **movimento plano geral de um corpo rígido** pode ser analisado pela **combinação de movimentos de translação, e rotação**. Para que possamos visualizar os dois movimentos separadamente é necessária uma análise de movimento relativo. Passaremos agora ao estudo da análise de movimento relativo para a determinação da velocidade no movimento plano geral.

6.5 - Análise de movimento relativo para determinação de velocidade

Nesta análise possuímos uma barra AB com dois conjuntos de eixos coordenados em que um é fixo (X,Y) e o outro translada (X',Y') com sua origem definida em um ponto de referência (A) escolhido, que normalmente possui seu movimento conhecido. Esse sistema translada em relação ao eixo fixo, mas não giram com a barra.

O vetor que indica a posição dos pontos A e B e o vetor de posição relativa entre o ponto B e A são encontrados pela seguinte relação:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

Ao se passar um instante de tempo (dt) o corpo sofre movimento, portanto os pontos A e B sofrem deslocamentos ($d\mathbf{r}_A$ e $d\mathbf{r}_B$). Considerando o movimento plano geral, a barra inteira primeiramente translada de uma quantidade ($d\mathbf{r}_A$) de modo que A, origem do sistema X',Y' se move para a sua posição final e o ponto B se desloca para B'. Na sequência a barra gira em torno do ponto A com uma grandeza ($d\theta$) de maneira que B' é sujeitado a um deslocamento relativo B', movimentando-se para a sua posição final B.

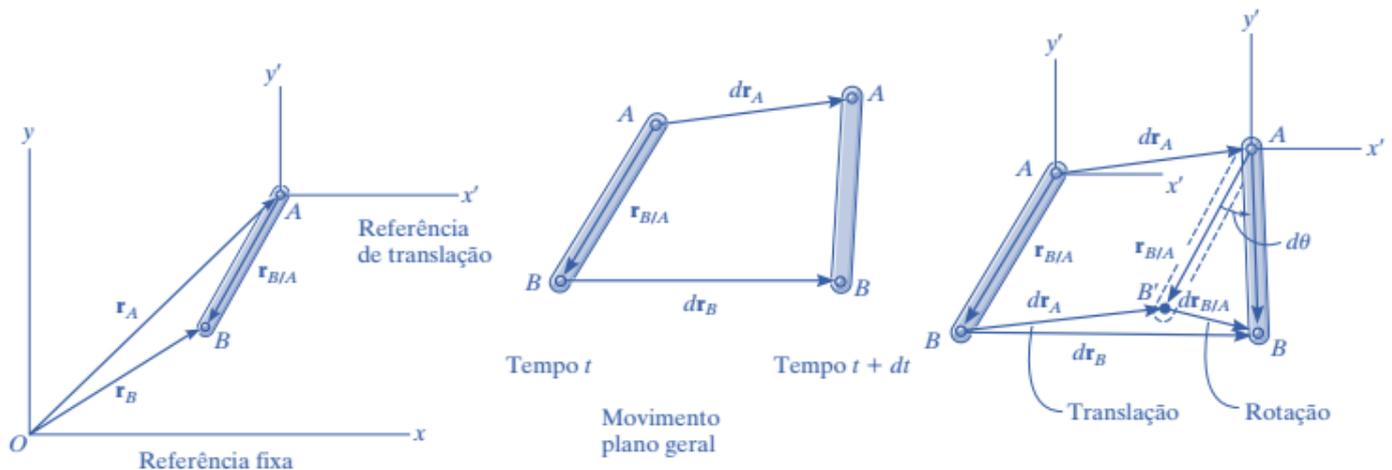
Devido a rotação ao redor de A temos que

$$d\mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{r}_{B/A} \cdot d\theta$$



$$d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r}_A + d\mathbf{r}_{B/A}$$

Onde o $d\mathbf{r}_B$ é ocasionado pela translação e rotação; $d\mathbf{r}_A$ é decorrente da translação de A; e $d\mathbf{r}_{B/A}$ ocorre em virtude da rotação em torno de A. Vejamos a imagem para melhor entendimento.



Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

As velocidades são encontradas pela derivada temporal de equação de posição resultando nas seguintes equações:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

Em que \mathbf{v}_B = velocidade do ponto B; \mathbf{v}_A = velocidade do ponto base; e $\mathbf{v}_{B/A}$ = velocidade do ponto B em relação a A.

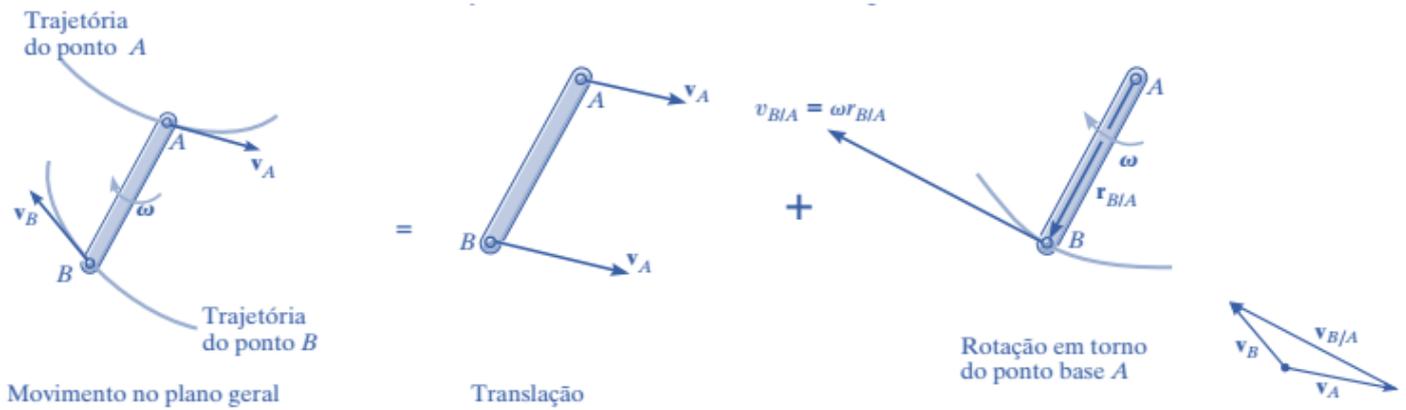
A velocidade de B é encontrada que a barra inteira realiza translação com velocidade em A, e gira em torno de A com velocidade angular (ω). Para aplicações que exigem análise vetorial cartesiana podemos utilizar a seguinte equação para encontrar a velocidade em B:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

Em que \mathbf{v}_B é a velocidade em B; \mathbf{v}_A é a velocidade no ponto A; $\boldsymbol{\omega}$ a velocidade angular do corpo; e $\mathbf{r}_{B/A}$ o vetor posição na direção de A para B.

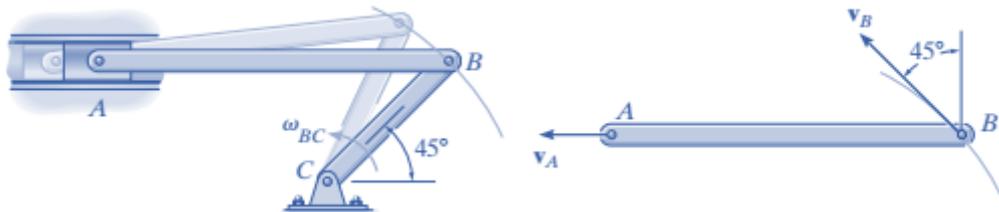
Esse tipo de análise através da equação de velocidade é útil para **questões em que se exija a determinação de alguma componente do movimento plano geral de algum corpo rígido que possua ligações por pinos ou em contato com outros corpos**. Uma dica ao aplicar estas equações é escolher os pontos A e B sobre o corpo que esteja conectado por pinos a outro corpo, ou como pontos em contato com corpos que tenham movimento conhecido.





Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

Um mecanismo muito importante na engenharia mecânica e que apresenta certa recorrência em provas é o **mecanismo biela-manivela-pistão**. Vejamos a figura abaixo.



Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

Neste mecanismo o ponto A desloca-se com uma trajetória horizontal, enquanto o ponto B se desloca conforme uma trajetória circular. Assim podemos determinar as velocidades v_A e v_B , pois estas sempre são tangentes a trajetória de movimento. Quando o ponto A localizado no pistão (cursor) está em seu ponto máximo ou mínimo, totalmente estendido ou totalmente retraído respectivamente, a sua velocidade v_A será nula. Também quando esses pontos são atingidos ocorre alteração no sentido de movimento.

Neste mecanismo a barra CB é a manivela e a barra AB é a manivela. Neste caso a velocidade v_B também pode ser definida por:

$$v_B = v_A + \omega \times r_{C/B}$$

A velocidade do pistão pode ser calculada por

$$v_A = v_B + \omega_{BC} \times r_{B/A}$$



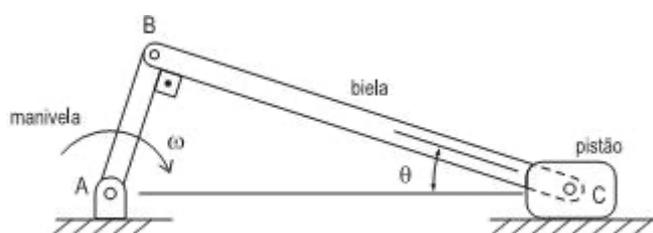
(FGV/TJ-GO-2014) Um cursor é movido por um sistema de biela e manivela, com a manivela girando em torno de um ponto localizado na reta de deslocamento do cursor. Sabendo-se que a velocidade angular da manivela é constante e vale ω e que o comprimento da biela e da manivela valem, respectivamente, L e R , é correto afirmar que o cursor:

- a) na posição de curso máximo apresentará velocidade ωR e a velocidade angular da biela será 0 (zero);
- b) na posição central do curso apresentará velocidade 0 (zero) a velocidade angular da biela será ω ;
- c) na posição de curso máxima apresentará velocidade ωR e a velocidade angular da biela será $\omega L/R$;
- d) na posição central do curso apresentará velocidade ωR e a velocidade angular da biela será $\omega L/R$;
- e) na posição de curso mínimo apresentará velocidade 0 (zero) e a velocidade angular da biela será $\omega R/L$.

Comentário:

Para resolvermos essa questão precisamos conhecer um sistema biela manivela e analisarmos a situação. Note que as alternativas estão pedindo expressões para a velocidade e velocidade angular nos pontos de curso mínimo, central e máximo.

Sabendo-se que nos pontos de curso máximo e mínimo a velocidade do pistão será zero e conhecendo as equações que descrevem o movimento do mecanismo biela manivela podemos solucionar a questão. Vejamos a concepção do mecanismo.



No enunciado da questão, é dito que a barra BC (biela) possui comprimento L e a manivela (AB) possui comprimento R . Portanto a velocidade no ponto B, em qualquer posição, exceto em seu curso máximo ou mínimo, será dada por:

$$v_B = v_C + \omega \cdot R$$

Quando a velocidade do pistão for nula (ponto de curso máximo ou mínimo) teremos que $v_B = \omega \cdot R$.

A velocidade no pistão v_C será dada, para qualquer posição do pistão, exceto em seu ponto de curso máximo ou mínimo, de acordo com a análise de movimento absoluto, por:

$$v_C = v_B + \omega_{AB} \cdot L$$



Quando o pistão estiver em seu ponto máximo ou mínimo a velocidade v_C será zero. Substituindo a primeira equação de v_B e zerando v_C obtém-se:

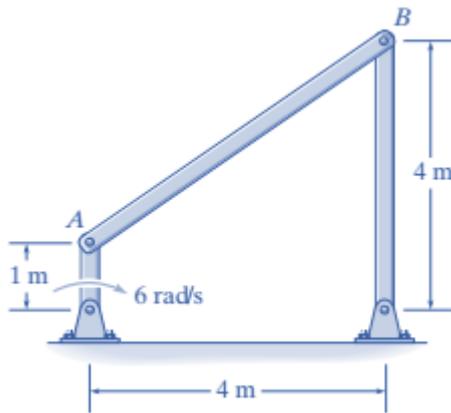
$$|\omega_{AB}| = \frac{\omega \cdot R}{L}$$

Portanto a **alternativa E** está CORRETA e é o gabarito da questão.

A tabela abaixo apresenta as equações de velocidade relativa entre os pontos A e B de alguns dos principais mecanismos que podem vir a ser cobrado em prova.

MECANISMO	EQUAÇÃO DE VELOCIDADE
	$v_B = v_A + v_{B/A} \text{ (pino)}$ $v_A = 6.3 = 18 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ $v_{B/A} = 2 \cdot \omega_{BA}$
	$v_B = v_A + v_{B/A} \text{ (pino)}$ $v_A = 2.3 = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ $v_{B/A} = 5 \cdot \omega_{BA}$
	$v_B = v_A + v_{B/A} \text{ (pino)}$ $v_A = 2.3 = 18 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ $v_{B/A} = 3 \cdot \omega_{BA}$





Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

$$v_B = v_A + v_{B/A} \text{ (pino)}$$

$$v_A = 6.1 = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

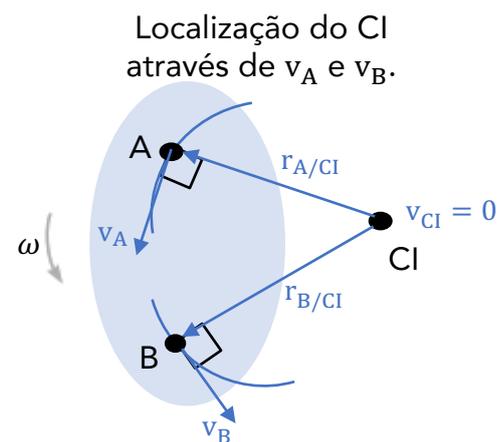
$$v_{B/A} = 5. \omega_{BA}$$

Vamos agora ao estudo do centro instantâneo de velocidade nula.

6.6 - Centro instantâneo de velocidade nula

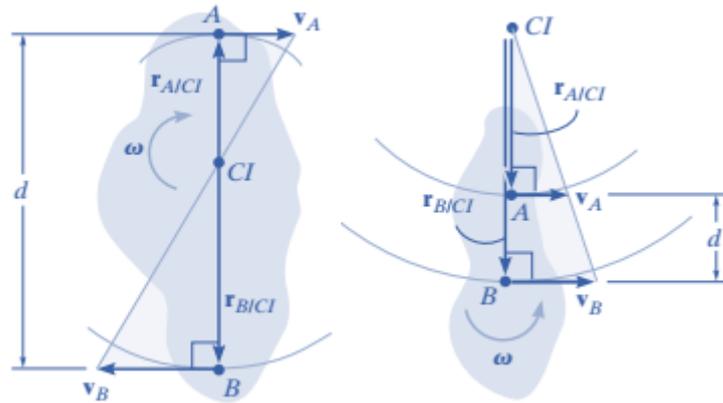
No tópico anterior da nossa aula, aprendemos a encontrar a velocidade de um ponto sobre um corpo rígido que apresenta movimento plano através da adição da velocidade relativa, ocasionada pela rotação em torno de um ponto de referência conveniente à velocidade do ponto de referência. Agora, meu caro aluno(a), iremos determinar um **ponto de referência único** que **possui velocidade nula instantaneamente**. Esse ponto é chamado de **centro instantâneo de velocidade (CI) nula** e está **situado no eixo instantâneo de velocidade nula**.

Para localizarmos o CI é utilizado o fato de que **a velocidade de um ponto** qualquer sobre um corpo **será sempre perpendicular ao vetor de posição relativa que é direcionado do CI para o ponto**. Por exemplo, quando se é conhecida a linha de ação de duas velocidades não paralelas v_A e v_B podemos construir segmentos de linha partindo dos pontos A e B perpendiculares às velocidades. No ponto de interseção entre essas duas linhas estará localizado o centro instantâneo de velocidade nula. Vejamos a imagem ao lado.



Quando se é conhecida a intensidade e direção de duas velocidades paralelas v_A e v_B a localização do CI é determinada por triângulos proporcionais, conforme a figura abaixo. Onde $r_{A/CI} = v_A/\omega$ e $r_{B/CI} = v_B/\omega$. Caso a distância (d) entre os pontos A e B seja conhecida temos que $r_{A/CI} + r_{B/CI} = d$ na figura à esquerda e $r_{B/CI} - r_{A/CI} = d$ na figura a direita. Vejamos:

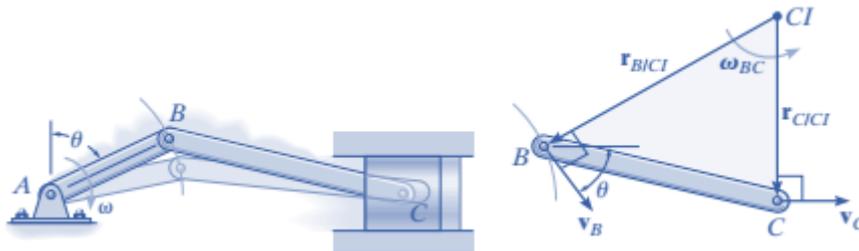




Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.



Note que o ponto determinado para o CI de velocidade nula só é válido para o instante considerado, uma vez que o corpo em movimento varia sua posição a cada instante. Além disso, o **centro instantâneo de velocidade nula não é recomendado para a determinação da aceleração**, uma vez que ele não apresenta aceleração nula. A figura abaixo apresenta a determinação do CI para um mecanismo biela-manivela-pistão.



Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

Neste caso o ponto B apresenta uma trajetória circular sendo que a velocidade em B é perpendicular a barra AB. Assim ela atua com um ângulo θ em relação a barra BC. A velocidade no ponto C atua horizontalmente. Traçando as linhas perpendiculares a elas é possível encontrar o CI.

Visto isso, vamos agora a análise do movimento relativo para a determinação da aceleração.

6.7 - Análise do movimento relativo para a determinação da aceleração

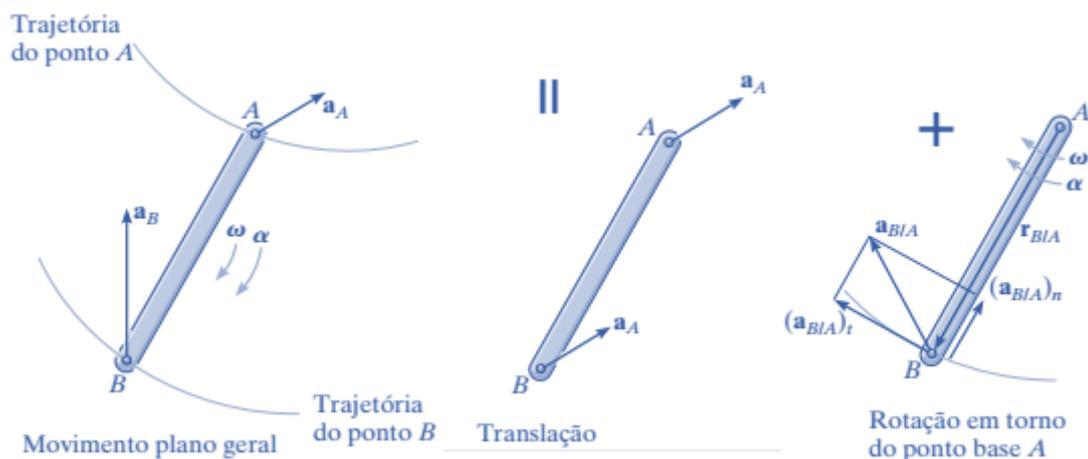
Caro estrategista, vamos agora aprender a encontrar a **aceleração em corpos rígidos submetidos a movimento plano geral**. Usualmente em provas de concursos públicos para engenharia mecânica não há grande incidência de questões que abordem este tópico, contudo devido a sua relação com o tema estudado anteriormente é importante que você detenha conhecimento sobre este assunto.

Analogamente a determinação da equação da velocidade podemos determinar a equação que relaciona as acelerações entre dois pontos A e B de uma barra sujeitada ao movimento plano geral através da derivada temporal da equação da velocidade.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$$

Em que \mathbf{a}_B é a aceleração no ponto B; $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ é a aceleração tangencial de B em relação a A sendo perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$; e $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ é a aceleração normal de B em relação a A e sua direção é dada de B para A.

Neste caso a componente $\mathbf{a}_{B/A}$ está sendo expressada em suas componentes tangenciais e normais, sendo que $(\mathbf{a}_{B/A})_t = \alpha \cdot \mathbf{r}_{B/A}$ e $(\mathbf{a}_{B/A})_n = \omega^2 \cdot \mathbf{r}_{B/A}$. Vejamos a imagem abaixo para uma melhor compreensão.



Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

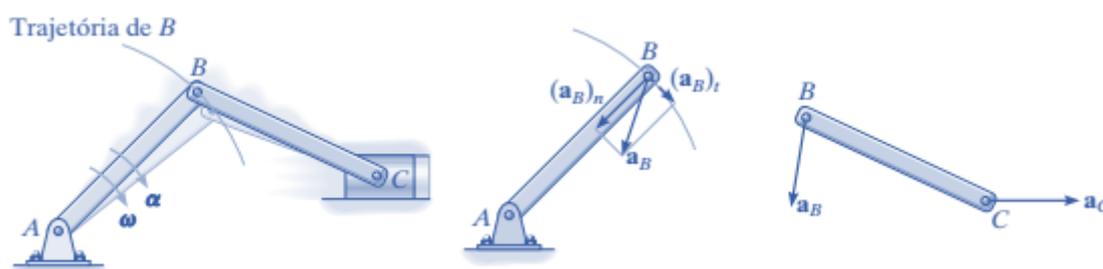
Uma vez que os efeitos do movimento circular as componentes de aceleração relativa representam estes efeitos, podendo este movimento ser observado por meio dos eixos de translação com origem no ponto A. Assim podemos expressar $(\mathbf{a}_{B/A})_t = \alpha \times \mathbf{r}_{B/A}$ e $(\mathbf{a}_{B/A})_n = -\omega^2 \cdot \mathbf{r}_{B/A}$, obtendo-se a seguinte equação:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \cdot \mathbf{r}_{B/A}$$



Em que \mathbf{a}_B e \mathbf{a}_A são as acelerações nos pontos B e A respectivamente, α é a aceleração angular do corpo, ω é a velocidade angular do corpo e $\mathbf{r}_{B/A}$ é o vetor posição de A para B.

Vejamos na figura abaixo um mecanismo biela-manivela. A aceleração no ponto B, posicionado na barra BA ou BC do mecanismo tem a mesma aceleração, uma vez que os pontos que são coincidentes nos pinos se deslocam com mesma aceleração. Neste caso o movimento é circular onde a aceleração do ponto B pode ser determinada pelas suas componentes tangenciais e normais. No ponto C, devido a sua trajetória horizontal a aceleração será em linha reta horizontalmente.



Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

E aí, achou difícil? A cinemática do movimento plano geral é uma das áreas mais complexas da dinâmica, mas não se preocupe que com a resolução de questões de provas passadas o aprendizado vai se tornando mais fácil. A melhor **maneira de se aprender** este assunto é **através da prática**, portanto não economize na resolução de questões deste tema. Assim, encerramos aqui o estudo da cinemática do movimento plano de um corpo rígido e passamos para o estudo da cinética do movimento plano de um corpo rígido.

7 - Cinética do movimento plano de um corpo rígido

7.1 - Momento de inércia de massa

Caro aluno (a), agora que estudamos a cinemática do movimento plano de um corpo rígido, vamos analisar a cinética destes. Quando um momento (M) gira um corpo temos que a equação $M = I \cdot \alpha$ dita este movimento. A letra I na equação representa o momento de inércia de massa de um corpo. Neste caso, via comparação o **momento de inércia** é uma **medida da resistência à aceleração angular de um corpo**. Analogamente a massa é a resistência de um corpo em relação à aceleração ($F=m \cdot a$).

Em nossa primeira aula do curso aprendemos a calcular o momento de inércia de um corpo. Sabemos que este é dado pela integral do segundo momento em relação a um eixo de todos os elementos de massa que dm que compõem o corpo. Outra forma, vista em nossa aula 00, para se determinar o momento de inércia de um corpo é através do teorema dos eixos paralelos que nos diz que



$$I = I_G + md^2$$

Onde I_G é o momento de inércia em relação ao eixo z' que passa pelo centro de massa G , m é a massa do corpo e d é a distância perpendicular entre os eixos paralelos z e z' .

Algumas vezes as bancas costumam descrever o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo especificado, através do raio de giração, (k). Sendo está uma unidade de comprimento. Assim, quando são fornecidas o raio de giração e a massa de um corpo podemos calcular o momento de inércia deste através de

$$I = m.k^2$$

Por fim, quando um corpo for composto por formas simples o momento de inércia deste, em relação a qualquer eixo, pode ser calculado através da soma dos momentos de inércia das partes em relação ao eixo.

Vamos agora analisar as equações de movimento de um corpo em movimento plano geral.

7.2 - Equações de movimento plano geral

Quando um corpo é submetido a rotação e translação dizemos que este está sujeito a movimento plano geral. A análise deste movimento consiste em uma combinação das equações de translação e rotação. A equação do movimento translacional no plano é dada por:

$$\sum F_x = m.(a_G)_x; \text{ e } \sum F_y = m.(a_G)_y$$

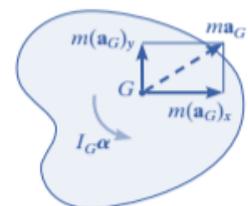
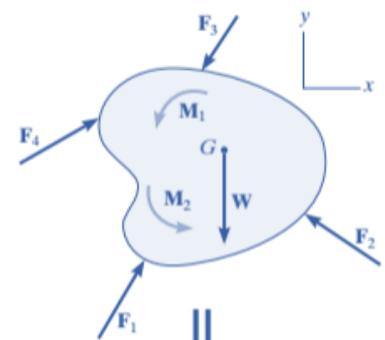
Está equação estabelece que a **soma das forças atuando externamente sobre um corpo é equivalente a massa do corpo multiplicada a aceleração de centro de massa G .**

Já a **equação do movimento rotacional** de um corpo nos demonstra que a soma dos momentos ocasionados por todas as forças externas em relação ao CG do corpo é equivalente ao momento de inércia vezes a aceleração angular. Ela é representada por:

$$\sum M_G = I_G \cdot \alpha$$

Por fim, vejamos a imagem ao lado para uma melhor compreensão.

Vamos agora ao estudo da cinética de um corpo rígido através da análise de trabalho e energia.



Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.



7.3 - Trabalho e Energia

Prezado estrategista, para resolvermos questões de provas que envolvam força, velocidade e deslocamento de um corpo rígido, a partir dos métodos de trabalho e energia utilizamos equações de translação, rotação e movimento plano geral.

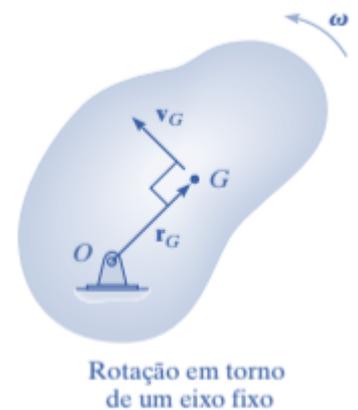
Uma vez que um corpo rígido com massa (m) é submetido à translação, que pode ser retilínea ou curvilínea, a energia cinética gerada por rotação é nula, pois este não apresenta velocidade angular, assim a energia cinética do corpo é expressada por:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_G^2$$

Quando um **corpo rotaciona em torno de um eixo fixo** (O) este corpo apresenta **energia cinética translacional e rotacional** dada por:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_G^2 + \frac{1}{2} \cdot I_G \cdot \omega^2$$

Onde $v_G = r_G \cdot \omega$. Vejamos a imagem ao lado.



Fonte: R.C. Hibeller – Dinâmica. Mecânica para Engenharia. 14ª ed.

Por fim quando um corpo é submetido ao movimento plano geral, apresentando rotação e translação ele possuirá velocidade angular e velocidade em seu centro de massa assim a energia cinética será:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_G^2 + \frac{1}{2} \cdot I_G \cdot \omega^2$$



(CEPS-UFPA/UMIFESSPA - 2018) A bobina mostrada na figura abaixo possui 4,00 kg de massa e raio de giração $k_O = 0,30$ m. Se o bloco A de 5,00 kg é liberado a partir do repouso, o valor da energia cinética total do sistema mecânico no instante em que a bobina possuir velocidade angular de 5,00 rad/s (a massa da corda é negligenciável) é





- a) 6,50 J.
- b) 8,00 J.
- c) 7,50 J.
- d) 7,00 J.
- e) 8,50 J.

Comentário:

Nesta situação a energia cinética (T) pode ser obtida pela soma da energia cinética do bloco (T_A) e da energia cinética da bobina (T_{bob}). Primeiramente devemos calcular o momento de inércia da bobina através de seu raio de giração. Vejamos:

$$I = m \cdot k^2 = 4 \cdot 0,3^2 = 0,36 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right]$$

$$T = T_A + T_{bob} = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_A^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

A velocidade em A é obtida por $v_A = 0,2 \cdot \omega = 1 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$. Portanto,

$$T = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 0,36 \cdot 5^2 = 7 \text{ [J]}$$

Logo, a **alternativa D** está CORRETA e é o gabarito da questão.

Caro estrategista, encerramos aqui a parte relacionada a dinâmica de nossa aula. Como você pode notar, na evolução de nossa aula, os **princípios empregados na cinemática e cinética das partículas** são utilizados como **base para análise da cinemática e cinética dos corpos rígidos**. Assim você tendo uma base boa base a respeito dos tipos de movimento e sabendo enxergá-los em questões de provas é o essencial para se empregar as equações necessárias para a resolução.

Resolva as questões da aula e **não deixe de analisar os comentários**, pois muitas vezes há complementações e entendimentos importantes, lá citados, que poderão ser de grande valor para



você. Por fim, acredito que a melhor forma de aprender a dinâmica é através da prática, por isso recomendo, muito, que você resolva o máximo de questões possíveis.

Encerramos aqui o estudo da Dinâmica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ufa! Encerramos aqui o conteúdo de nossa aula 00, do nosso curso. Sei que a carga de informação para uma aula inicial foi grande, mas fique tranquilo que a tendência é piorar! RsRsRs. Brincadeiras à parte, note que apenas em uma aula cobrimos um **vasto conteúdo**² que será **muito importante** durante a sua prova.

Conte comigo nesta caminhada para juntos alcançarmos o objetivo maior que é a sua **APROVAÇÃO**. Caso tenha ficado alguma dúvida, não hesite em me procurar no fórum de dúvidas ou em minhas redes sociais. Também **não** deixe de resolver todas as questões da nossa aula.

É isso! Espero que tenha gostado de nossa aula inicial. Nos vemos novamente em nossa próxima aula.

Forte abraço,

Prof. Juliano de Pelegrin

BATERIA DE QUESTÕES COMENTADAS

CESGRANRIO

1. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) Uma viga biapoiada de comprimento L está sujeita a uma força concentrada F atuante a uma distância $L/4$ de uma de suas extremidades.

O momento fletor máximo e a força cisalhante máxima atuantes na viga são expressos, respectivamente, por

a) $FL/4$ e $F/4$

² Fontes bibliográficas utilizadas na aula:

J.L.Merian/L.G.Kraige – Estática, 6ed.; R.C. Hibbeler – Estática: Mecânica para engenhara 10ª ed;

R.C.Hibbeler – Resistência dos Materiais, 7ª ed.; F.P. Beer – Resistência dos Materiais, 3ª ed.



- b) $FL/4$ e $3F/4$
- c) $3FL/4$ e $F/4$
- d) $3FL/16$ e $F/4$
- e) $3FL/16$ e $3F/4$

Comentário:

Prezado(a), para resolvermos essa questão primeiramente devemos conceber a sua disposição e o seu diagrama de corpo livre. Vejamos:



Viga biapoiada com carga concentrada

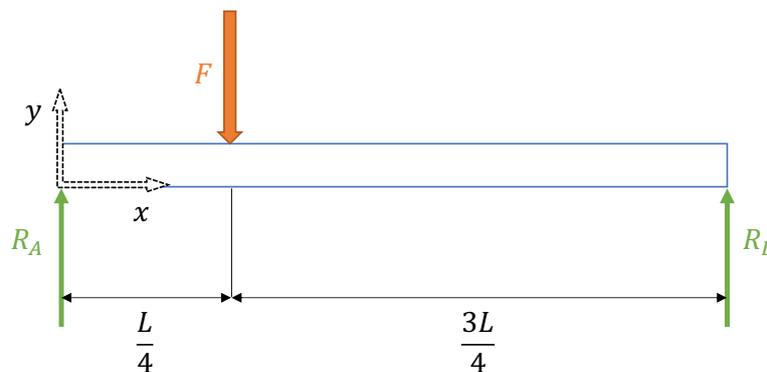


Diagrama de Corpo Livre

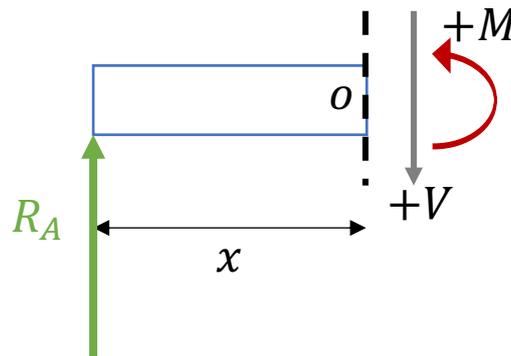
Vamos agora estabelecer as equações dos esforços internos (momento fletor e esforço cortante) em função da coordenada x.

Primeiramente vamos encontrar as resultantes nos pontos A e B através das equações do equilíbrio. Vejamos:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F + R_A + R_B = 0 \Rightarrow F = R_A + R_B$$
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -F \cdot \frac{L}{4} + R_B \cdot L = 0 \Rightarrow R_B = \frac{F}{4} \therefore R_A = \frac{3F}{4}$$



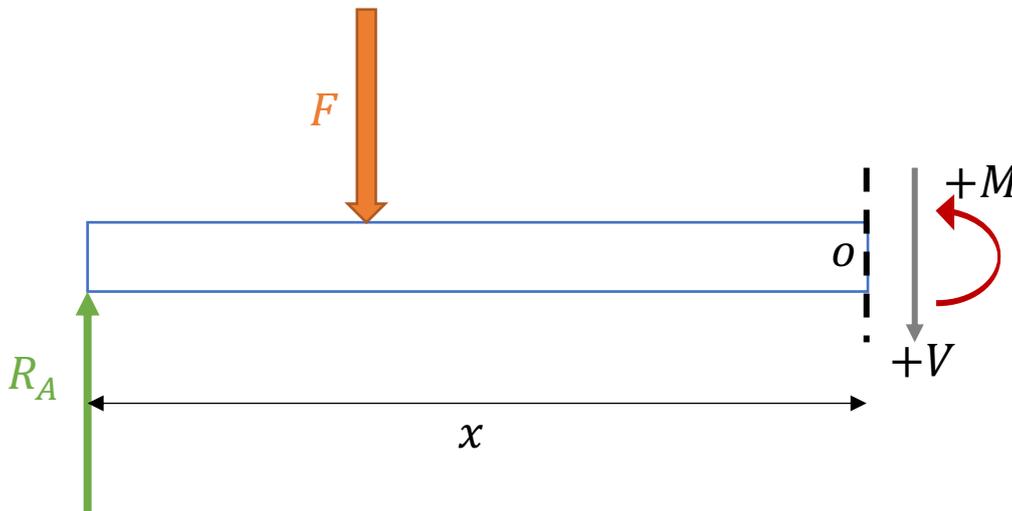
Feito isso, vamos determinar as equações para os esforços internos no trecho do apoio da esquerda até a carga ($0 < x < L/4$).



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = R_A = \frac{3 \cdot F}{4}$$

$$+\curvearrowright \sum M_o = 0 \Rightarrow M = R_A \cdot x = \frac{3 \cdot F \cdot x}{4}$$

Agora, vamos determinar as equações para os efeitos internos no trecho entre a carga e o apoio da direita ($L/4 < x < L$)



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -V + R_A - F = 0 \Rightarrow V = -\frac{F}{4}$$

$$+\curvearrowright \sum M_o = 0 \Rightarrow M - R_A \cdot x + F \left(x - \frac{L}{4} \right) = 0 \Rightarrow M = \frac{FL}{4} - \frac{Fx}{4}$$

Note que os esforços cortantes são constantes em cada trecho e o momento fletor varia de acordo com x. Realizando a análise das equações encontradas temos que:



$$p/x = 0$$

$$p/x = \frac{L}{4}$$

$$p/x = L$$

$$V = \frac{3.F}{4}$$

Descontinuidade

$$V = -\frac{F}{4}$$

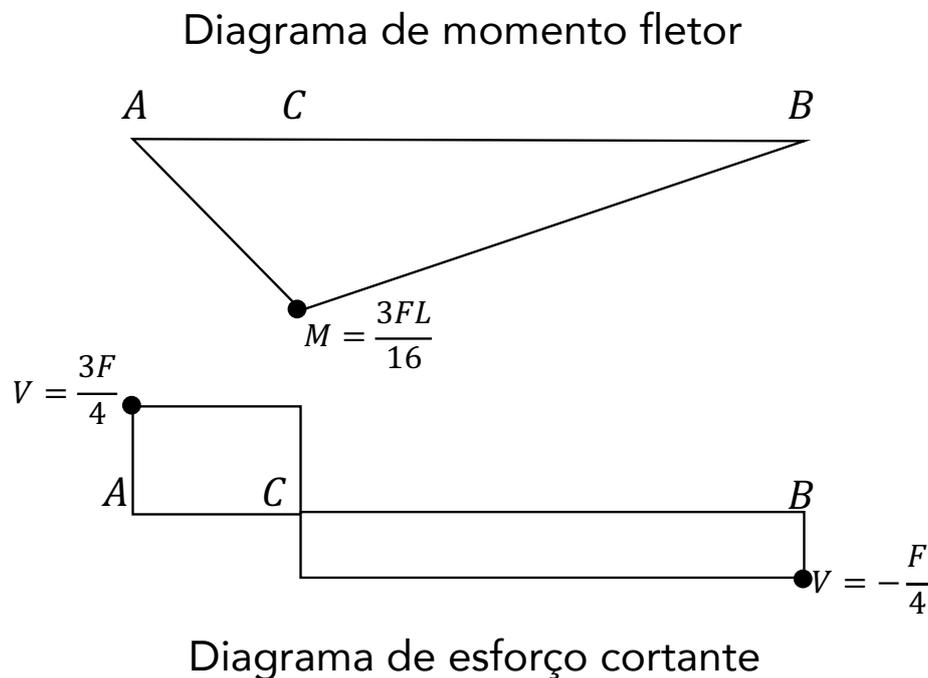
$$M = 0$$

$$M = \frac{3FL}{16}$$

$$M = 0$$

Portanto, o momento fletor máximo encontra-se em $x=L/4$ e o esforço cortante máximo encontra-se na seção entre o apoio da esquerda e a carga. Logo, a **alternativa E** está CORRETA e é o gabarito da questão.

A figura abaixo representa os diagramas de momento fletor e esforço cortante para toda a viga, em que o ponto C é o local onde a carga é aplicada.



2. (CESGRANRIO/UNIRIO-2016) Uma das importantes etapas do projeto estático de um componente estrutural é a construção do diagrama de corpo livre do componente.

No diagrama de corpo livre de uma viga engastada, sujeita a um carregamento distribuído ao longo de seu comprimento, são representados(as)

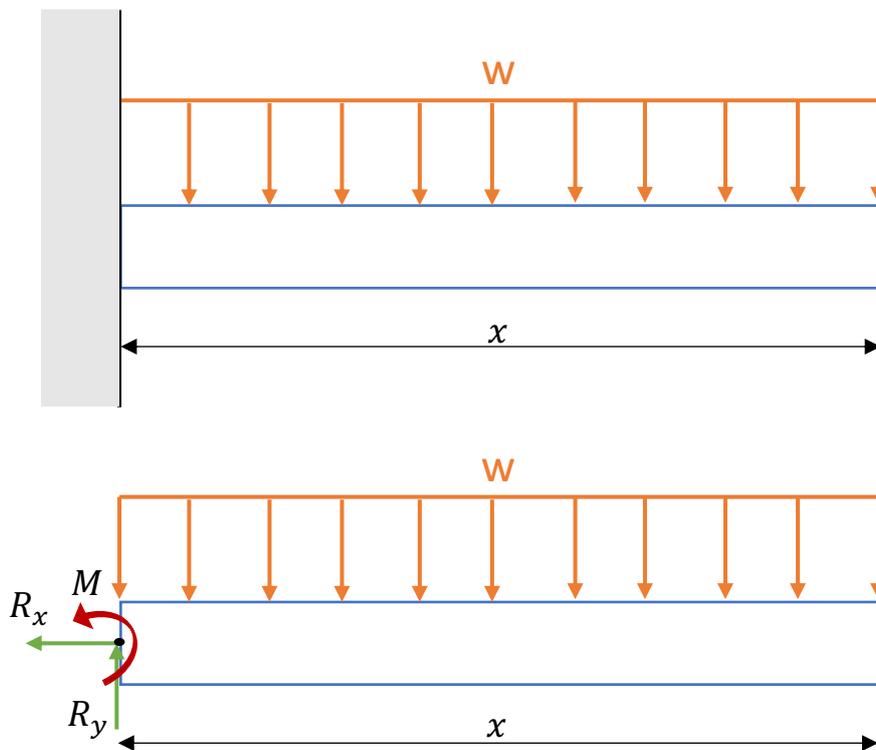
- a) o carregamento externo e as reações de apoio
- b) o carregamento externo e a distribuição de momentos fletores



- c) o carregamento externo e a distribuição dos esforços cisalhantes
- d) os carregamentos externos, apenas
- e) as distribuições de esforços cisalhantes e de momentos fletores

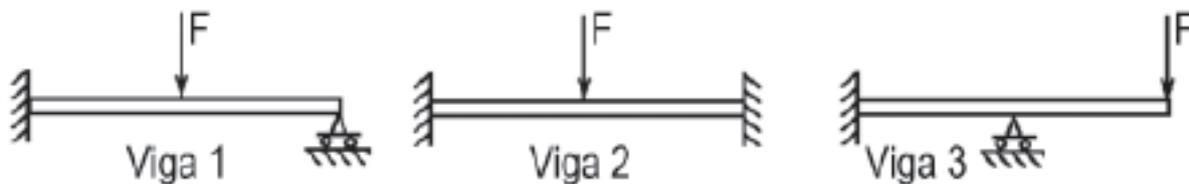
Comentário:

“Questãozinha mamão com açúcar”. O diagrama de corpo livre ou DCL consiste em um esquemático de todas as forças que atuam em um corpo quando isolamos este do sistema ao qual pertence. Neste caso nosso corpo em análise é a viga e as forças serão o carregamento distribuído externo e as reações de apoio. Vejamos:



Portanto, a **alternativa A** está CORRETA é o gabarito da questão.

3. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Considere as três vigas planas, estaticamente indeterminadas, mostradas na Figura a seguir.



Ao retirar-se uma das restrições de apoio de cada uma dessas vigas, aquela(s) que se tornar(ão) estaticamente determinada(s) é(são), APENAS, a(s) viga(s)



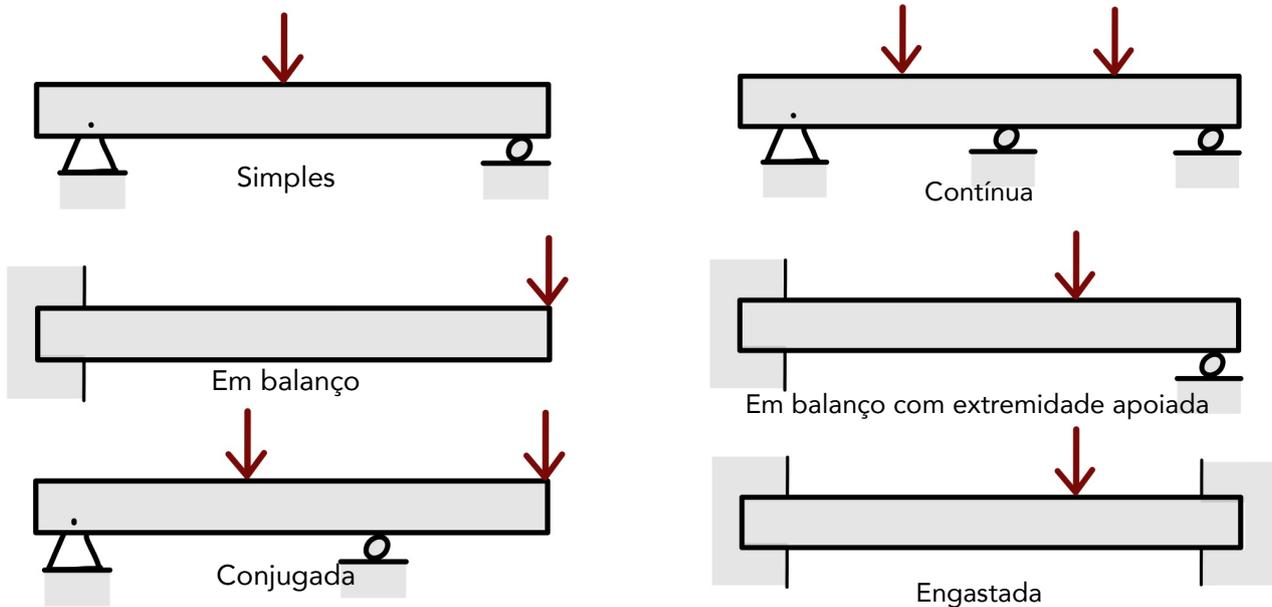
- a) 1
- b) 2
- c) 1 e 3
- d) 1 e 2
- e) 2 e 3

Comentário:

Prezado(a), o segredo desta questão está no termo **restrição de apoio**. Apenas as vigas 1 e 3 possuem restrições de apoio enquanto a viga 2 apresenta dois engastes. Vejamos a tabela abaixo com exemplos de vigas estaticamente determinadas e estaticamente indeterminadas.

VIGAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS

VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS



Basicamente, as vigas que se encontram apoiadas, de maneira que podemos calcular as reações aos seus apoios externos aplicando somente os métodos da estática (equações de equilíbrio), são chamadas de vigas estaticamente determinadas. Vigas que possuem mais pontos de apoios do que o necessário para que estejam em equilíbrio, são denominadas estaticamente indeterminadas (possuem maior número de reações de apoios do que equações de equilíbrio).

Desta forma, as vigas 1 e 3 ao retirar-se uma das restrições de apoio dessas vigas, se tornarão estaticamente determinadas, pois passarão a ser duas vigas engastadas em balanço. Portanto, a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.



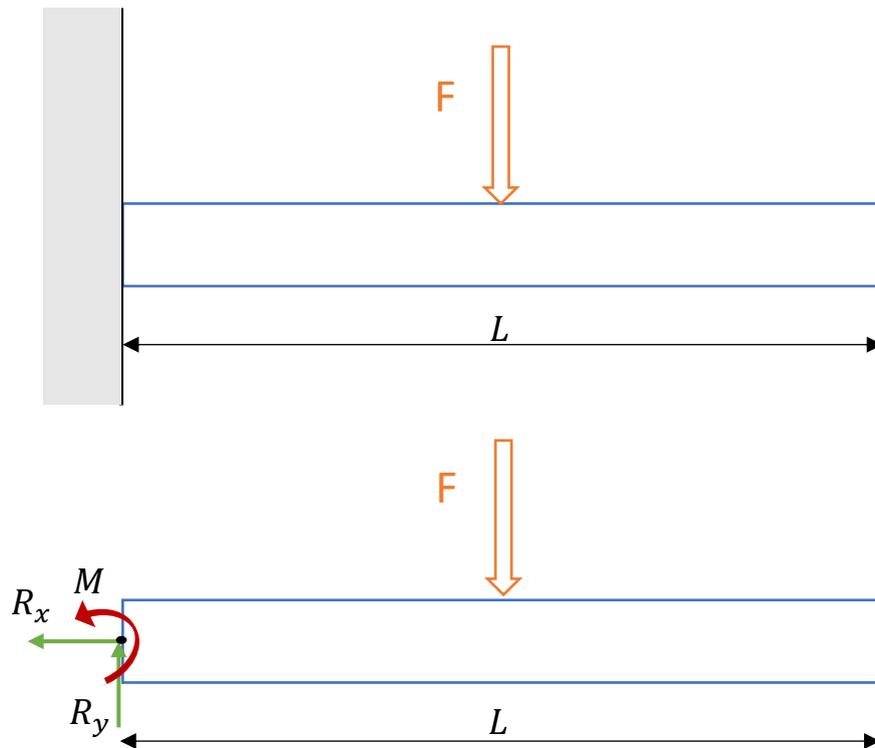
4. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Uma viga engastada em uma de suas extremidades e livre na outra é solicitada por uma força F , concentrada no meio de seu comprimento.

Se a distância entre as extremidades da viga é L , o momento fletor atuante na extremidade engastada é calculado pela expressão

- a) $F.L$
- b) $F.L/2$
- c) $F.L/4$
- d) $F.L^2/2$
- e) $F.L^2/4$

Comentário:

Para resolvermos essa questão devemos conceber o correto formato do sistema bem como seu diagrama de corpo livre. Vejamos:



Definimos o módulo do momento através da seguinte expressão:

$$M = F \cdot d$$

Assim, o momento no ponto O, para esta viga estática que deve respeitar a equação do equilíbrio para o momento, onde está o engaste será:

$$\sum^+ M_o = 0 \Rightarrow M - F \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow M = \frac{FL}{2}$$

Note que a distância de atuação da força até o ponto O é a metade do comprimento da viga. Logo, a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.

5. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2017) Uma viga de aço e seção retangular igual a 20 mm x 10 mm e comprimento igual a 500 mm falhou ao receber seu carregamento de trabalho. Sabe-se que essa viga teve uma de suas extremidades soldada perpendicularmente à superfície de uma coluna vertical de perfil H, enquanto a outra extremidade permaneceu em balanço. Um técnico, ao analisar as condições de carregamento dessa viga, para identificar as razões de sua falha, precisou calcular o momento fletor ao longo da viga. A viga trabalha sob uma carga uniformemente distribuída de 25 N/mm.

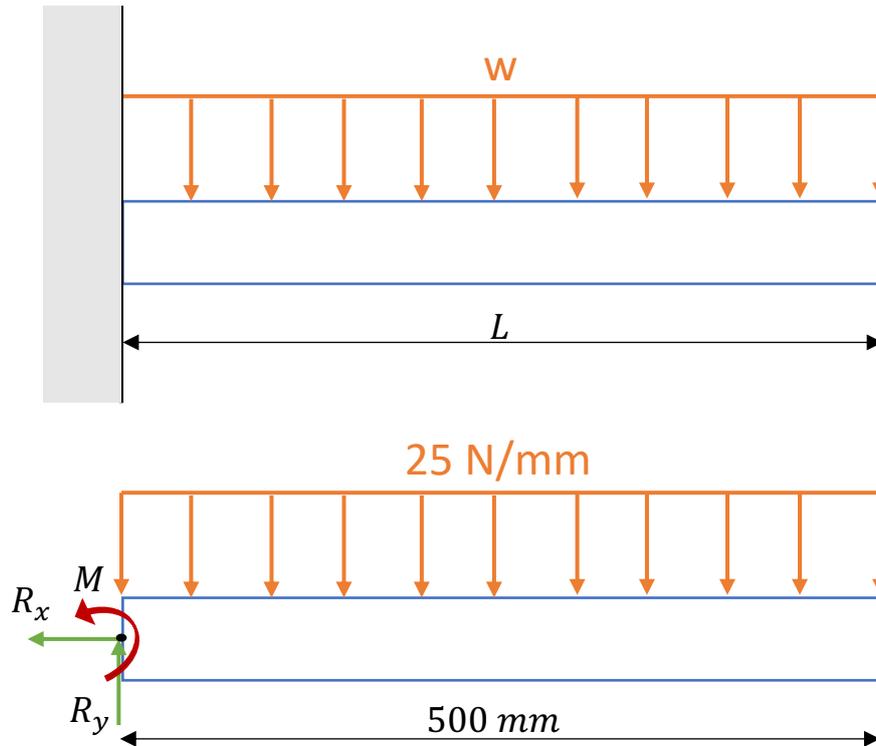
Qual o valor do momento fletor no engastamento, em Nm?

- a) 7.500
- b) 6.250
- c) 5.000
- d) 4.750
- e) 3.125

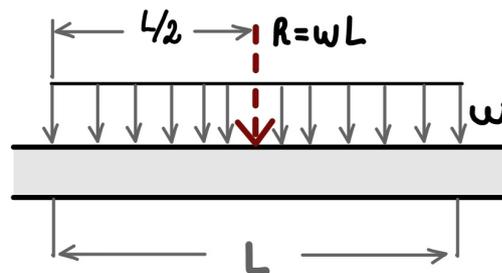
Comentário:

Caro(a) aluno(a), nesta questão a banca traz os dados da seção retangular da viga tentando confundir o candidato com dados extras. Basicamente temos uma viga engastada e devemos calcular o momento fletor no engaste. Vejamos como se dá a correta concepção do sistema e o seu diagrama de corpo livre, conforme dados do enunciado.



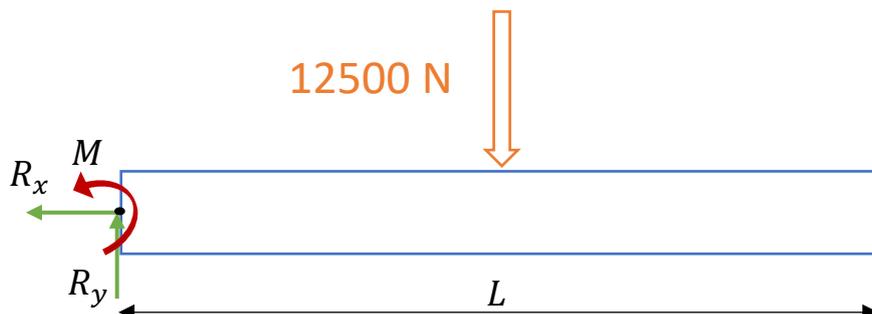


A **força resultante da concentração** de uma força distribuída em uma viga sempre estará localizada no **centróide** da área em consideração. Neste caso temos um retângulo que possui seu centroide no centro de seu comprimento que é 250 mm. Além disso, a resultante é igual a carga distribuída multiplicada pelo seu comprimento. Vejamos:



$$R = w \cdot L = 25 \left[\frac{N}{mm} \right] \cdot 500 [mm] = 12500 N$$

Desta forma o D.C.L. com a carga resultante será dado pela seguinte forma:



Definimos o módulo do momento através da seguinte expressão:

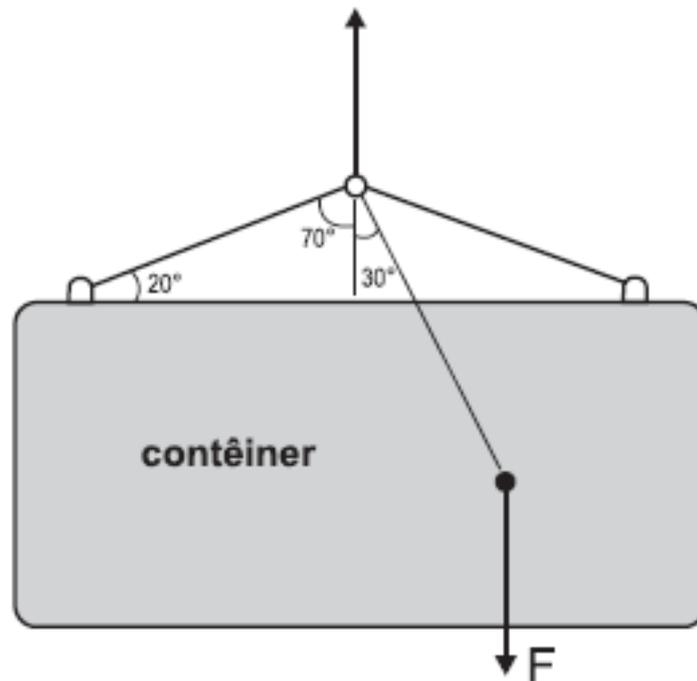
$$M = F \cdot d$$

Assim, o momento no ponto O, para esta viga estática que deve respeitar a equação do equilíbrio para o momento, onde está o engaste será:

$$\sum^+ M_o = 0 \Rightarrow M - 12500 [N] \cdot 0,25 [m] = 3125 [N \cdot m]$$

Note que a banca pede a resposta em newton.metro, logo devemos realizar a conversão da unidade da distância de milímetros para metros. Portanto, a **alternativa E** está CORRETA e é o gabarito da questão.

6. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2014) Um contêiner é suspenso por um sistema de cabos, conforme ilustrado na Figura abaixo.



Se a força F resultante do peso do contêiner e da carga em seu interior é posicionada conforme indicado, o ângulo de inclinação em relação à horizontal, quando o sistema estiver em equilíbrio estático, será igual a

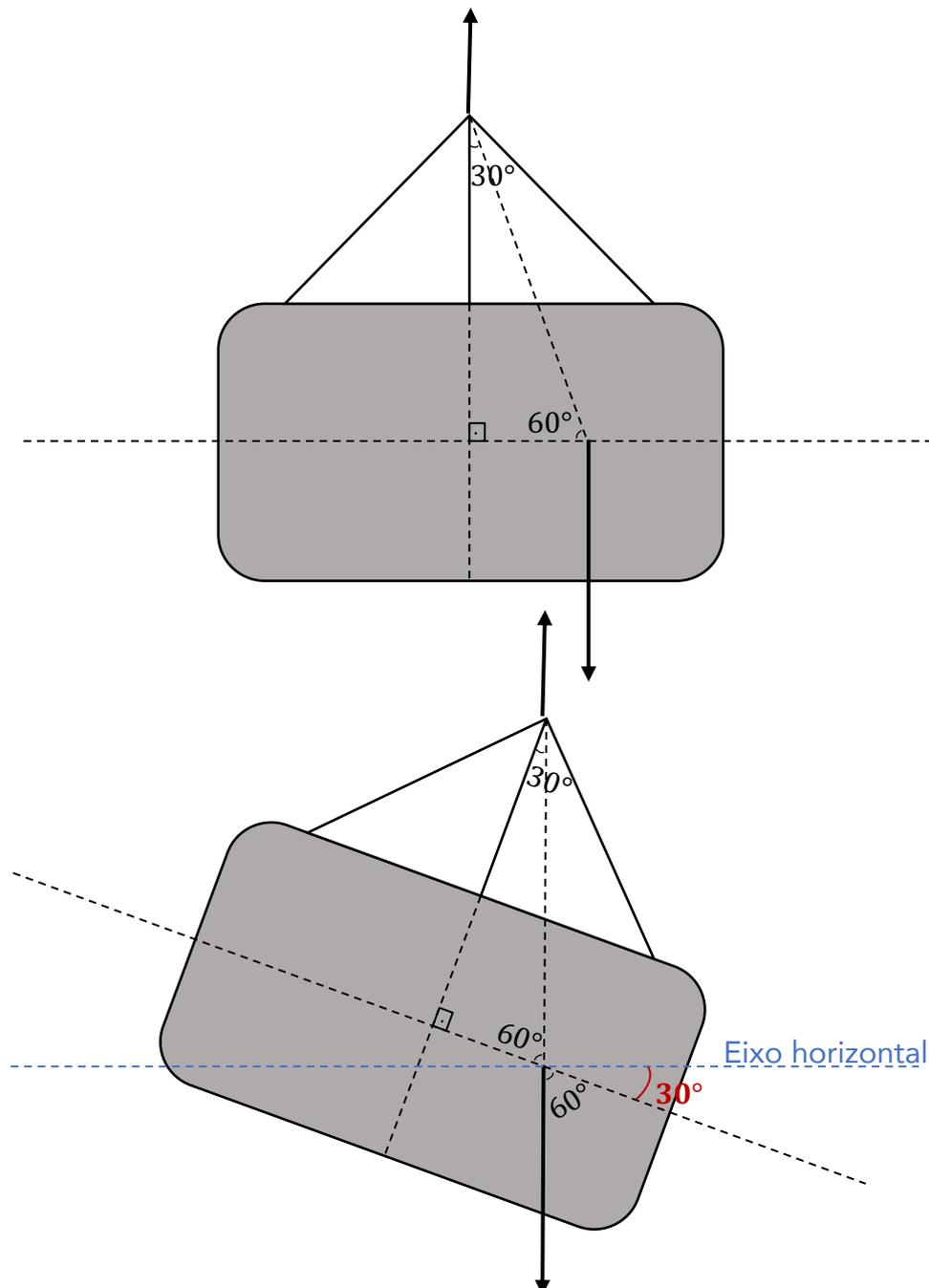
- a) 20°
- b) 30°
- c) 45°
- d) 60°



e) 70°

Comentário:

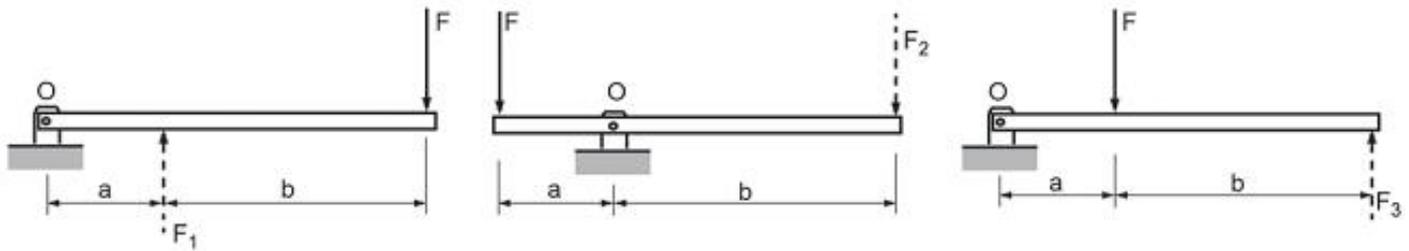
Podemos solucionar essa questão apenas com uma observação lógica, pois devido ao posicionamento da carga dentro do contêiner a força F está deslocada do seu centro. Quando a carga for içada haverá uma inclinação no contêiner de modo a força F se posicione exatamente abaixo do nó central que está sendo realizada a força para cima. Vejamos:



Portanto, a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.



7. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2014) A Figura abaixo mostra três sistemas de alavanca nos quais a força F é a força aplicada, F_1 , F_2 e F_3 são as forças resistentes e $b > a$.



De modo a se determinar a configuração que apresenta a maior força resistente, avaliou-se o equilíbrio de cada alavanca. Essa análise resultou na relação entre F_1 , F_2 e F_3 , expressa por

- a) $F_1 = F_2 = F_3$
- b) $F_1 < F_2 < F_3$
- c) $F_1 > F_2 > F_3$
- d) $F_1 = F_2$ e $F_3 < F_2$
- e) $F_1 = F_2$ e $F_3 > F_2$

Comentários:

Caro(a) aluno(a), para resolvermos essa questão de maneira simples devemos considerar que $b = 2.a$, pois fazendo isto combinado com a aplicação da equação de equilíbrio de momento no ponto O conseguimos encontrar as grandezas de F_1 , F_2 e F_3 em função de F . Vejamos:

Viga 1

$$\sum^+ M_o = 0 \Rightarrow F_1 \cdot a = F \cdot 3a \Rightarrow F_1 = 3 \cdot F$$

Viga 2

$$\sum^+ M_o = 0 \Rightarrow F_2 \cdot 2a = F \cdot a \Rightarrow F_2 = \frac{F}{2}$$

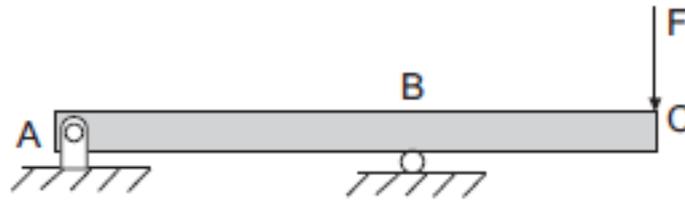
Viga 3

$$\sum^+ M_o = 0 \Rightarrow F_3 \cdot 3a = F \cdot a \Rightarrow F_3 = \frac{F}{3}$$

Assim $F_1 > F_2 > F_3$. Logo, a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.



8. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2012)



O diagrama que representa a distribuição dos momentos fletores atuantes ao longo da viga biapoiada, mostrada na figura, é

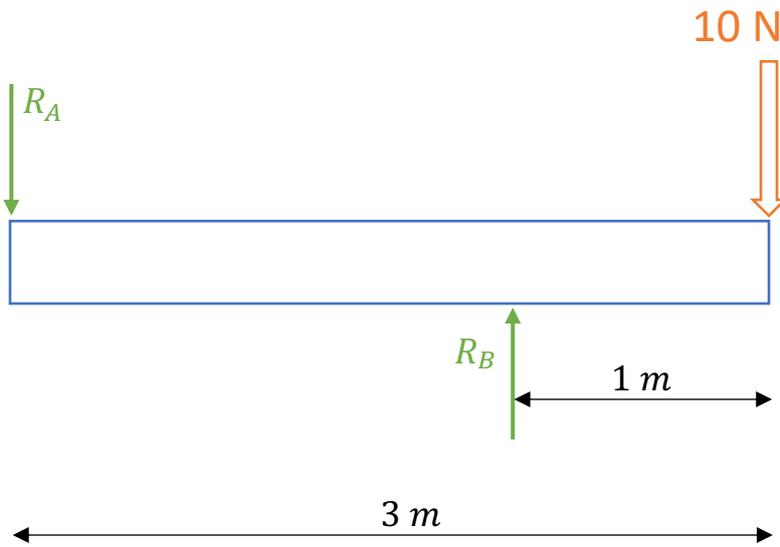
- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

Comentário:

Caro(a) estrategista, mesmo que você não saiba decorado o formato do diagrama de momento fletor para a viga do enunciado e seu carregamento, podemos determiná-lo de maneira simples, desde que você conheça as equações do equilíbrio e como determinar os esforços internos. Primeiramente devemos conhecer as reações do apoio na viga. Como no enunciado não são fornecidos valores para as grandezas, deixo como dica, você atribuir valores arbitrários para



Ihe ajudar na solução. Vejamos o DCL com valores que atribui para a força e as distâncias entres os pontos:



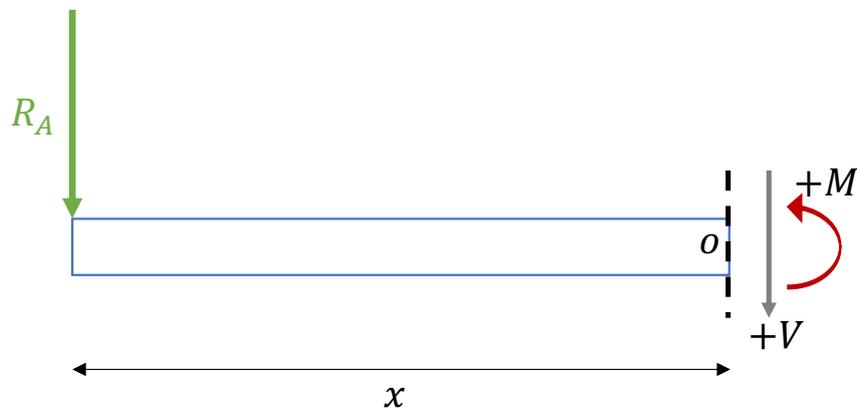
Pelas equações do equilíbrio das forças na direção Y e somatório de momento definimos se as direções adotadas para as reações estão corretas. Vejamos:

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -R_A + R_B = 10 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \cdot 2 = 10 \cdot 3 \Rightarrow R_B = 15 \text{ N} \quad \therefore R_A = 5 \text{ N}$$

Note que os sentidos das reações nos pontos A e B estão nos sentidos corretos.

Vamos agora determinar a equação para o momento fletor no trecho AB. Vejamos o DCL:

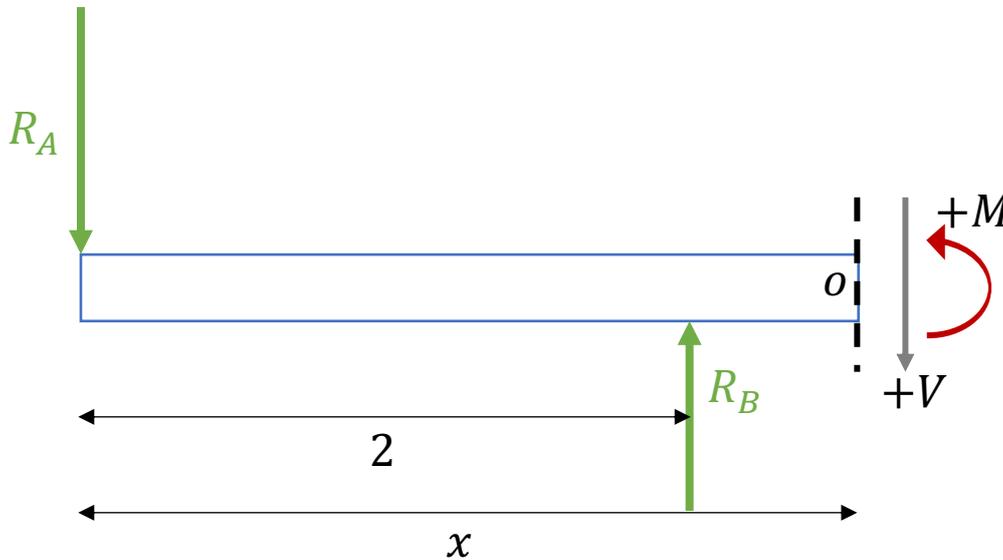


Por convenção, adotamos os sentidos demonstrados no D.C.L acima para momento fletor e esforço cortantes positivo.



$$\overset{+}{\curvearrowright} \sum M_O = 0 \quad M + R_A \cdot x = 0 \Rightarrow M = -R_A \cdot x$$

Note que nesta seção da viga o momento fletor possuirá o formato de uma reta decrescente de acordo com sua equação. Vejamos o DCL para determinarmos a equação do momento fletor no trecho BC.



$$\overset{+}{\curvearrowright} \sum M_O = 0 \quad M + R_A \cdot x - R_B \cdot (x - 2) = 0 \Rightarrow M = R_B \cdot x - R_B \cdot 2 - R_A \cdot x$$

Analisando as distâncias entre os pontos AC e BC podemos notar que a reação no ponto B é maior do que no ponto A, portanto a inclinação da reta no diagrama de momento fletor na equação acima deverá ser positiva. Contudo, vamos substituir as incógnitas das equações pelos valores atribuídos anteriormente.

Trecho AB

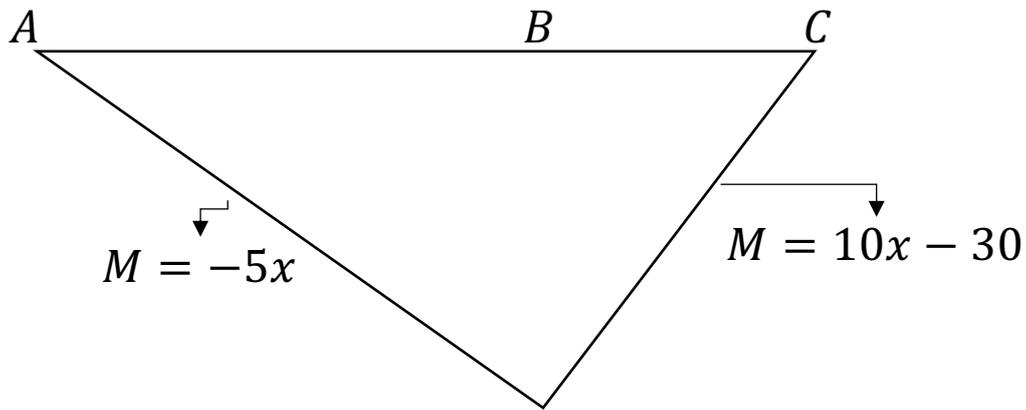
$$M = -5 \cdot x$$

Trecho BC

$$M = 10 \cdot x - 30$$

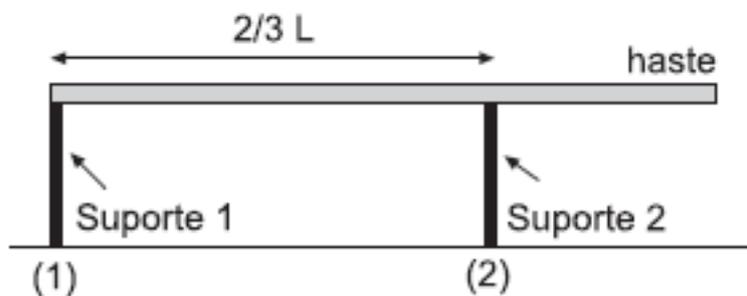
Assim, podemos montar o diagrama do momento fletor para as equações acima. Vejamos:





Portanto, a **alternativa A** está CORRETA e é o gabarito da questão.

9. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2012)



Uma haste homogênea de massa 50,0 kg é colocada horizontalmente sobre dois suportes, conforme mostra a figura.

O módulo da força exercida pelo suporte (1) na haste, em newtons, é de

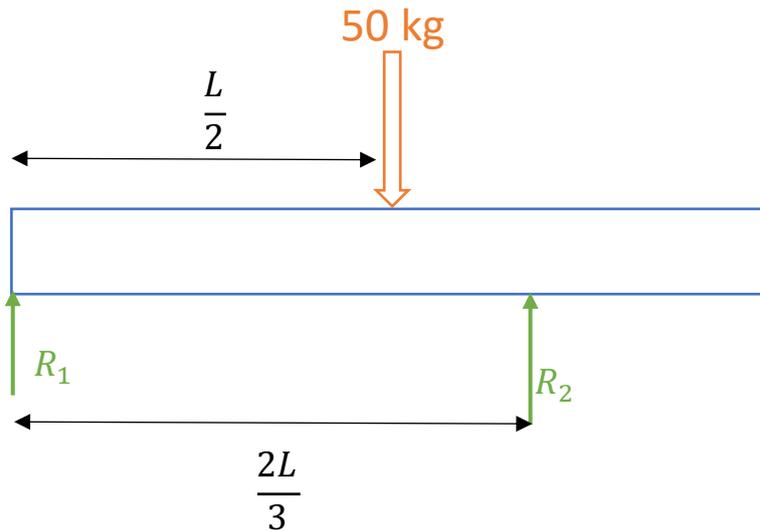
Dado: $g = 10,0 \text{ m/s}^2$

- a) 125,0
- b) 187,0
- c) 250,0
- d) 375,0
- e) 500,0

Comentário:

Primeiramente devemos montar o DCL com a indicação da força peso da haste atuando em seu centroide que é em $L/2$. Vejamos:





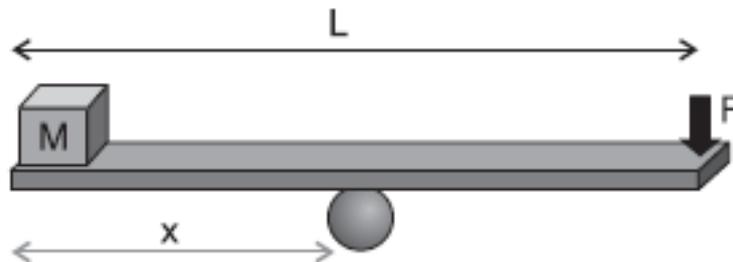
Desta forma, pelas equações do equilíbrio obtemos:

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 = F = 50 \cdot 10 = 500 \text{ N}$$

$$\curvearrowleft \sum M_1 = 0 \Rightarrow -50 \cdot 10 \cdot \frac{L}{2} + R_2 \cdot \frac{2L}{3} = 0 \Rightarrow R_2 = 375 \text{ N} \quad \therefore R_1 = 125 \text{ N}$$

Logo, a **alternativa A** está CORRETA e é o gabarito da questão.

10. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2012)



Uma prancha de madeira de massa desprezível e comprimento $L = 2,8 \text{ m}$ é utilizada para manter em equilíbrio, na horizontal, um cubo pequeno de massa $20,0 \text{ kg}$ ao realizar uma força F de $80,0 \text{ N}$ em uma das extremidades da prancha. B

A distância, em metros, entre o ponto de apoio da prancha e a posição onde se encontra o cubo é de

- a) 0,56
- b) 0,80
- c) 1,00

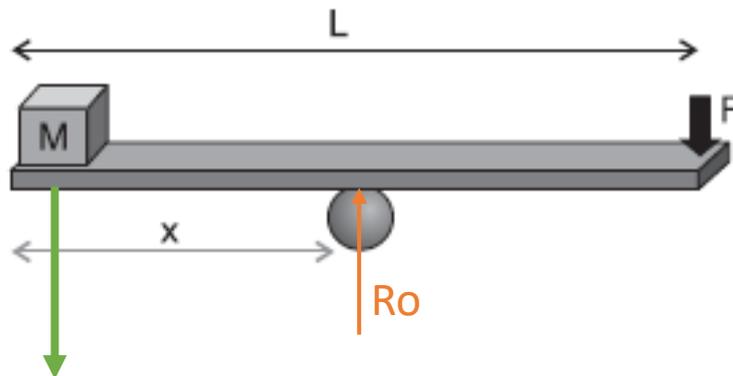


d) 1,12

e) 1,40

Comentário:

Caro(a) aluno(a), para resolvermos essa questão devemos basicamente aplicar as equações do equilíbrio. Vejamos:



$$\sum^+ F_y = 0 \Rightarrow -M.g + R_o - F = 0 \Rightarrow -200 + R_o - 80 = 0 \Rightarrow R_o = 280 \text{ N}$$

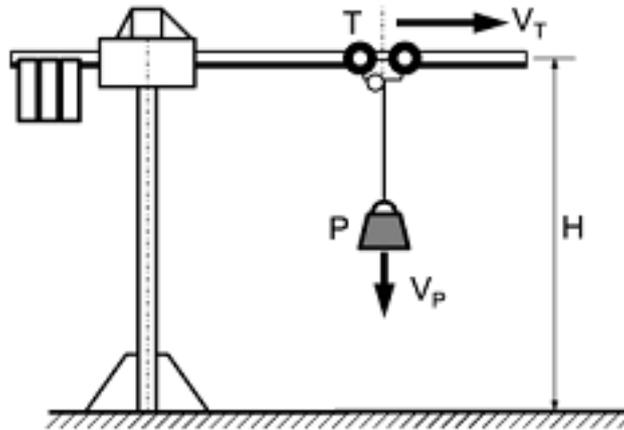
$$\sum^+ M_o = 0 \quad M.g.x - F.(L - x) = 0 \Rightarrow M.g.x = F.L - F.x \Rightarrow 200x = 224 - 80x$$

$$x = 0,8 \text{ m}$$

Portanto, a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.

11. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) A Figura abaixo mostra um guindaste, que consiste em um trilho horizontal indeformável, que está a uma altura H , constante, do solo, por onde se desloca um carro T . Um cabo de aço inextensível sustenta a carga P . O operador do guindaste comanda tanto a velocidade horizontal do carro T quanto a velocidade de descida/subida da carga P .





Sabendo-se que a velocidade V_P da carga P em relação ao trilho e a velocidade absoluta do carro V_T são constantes e respectivamente iguais a $0,4 \text{ m/s}$ e $0,3 \text{ m/s}$, o módulo da velocidade absoluta, em m/s , da carga P , é igual a

- a) $0,1$
- b) $0,5$
- c) $0,7$
- d) $1,6$
- e) $2,5$

Comentário:

Caro(a) estrategista, para resolvermos essa questão basta notarmos que as velocidades V_p e V_t são perpendiculares entre si, formando um triângulo retângulo (Pitagórico). O vetor velocidade absoluta resultante pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$V^2 = V_p^2 + V_t^2 \Rightarrow V = \sqrt{0,4^2 + 0,3^2} = 0,5 \text{ m/s}$$

Note que a conta respeita o famoso triângulo de Pitágoras com relação 3, 4 e 5. Portanto, a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão. Note também que o vetor resultante $V = 0,3i - 0,4j$ e o seu módulo será $0,5 \text{ m/s}$.

12. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) Um veículo de passeio movimenta-se em linha reta a uma velocidade de 36 km/h . Considerando-se que não haja deslizamento entre o pneu e a pista, e que o diâmetro do pneu seja de 50 cm , a rotação da roda, expressa em rad/s , é de

- a) 10



- b) 20
- c) 40
- d) 50
- e) 80

Comentário:

Nessa questão o princípio de análise de movimento absoluto é utilizado, visto que o pneu está sofrendo rotação e translação, ou seja, movimento plano geral. O ponto central do pneu (G), com deslocamento em linha reta, possui a mesma velocidade do veículo que é de 36km/h. Conhecendo o raio do pneu e sabendo-se que a velocidade de seu centro é dada por

$$v_G = r \cdot \omega$$

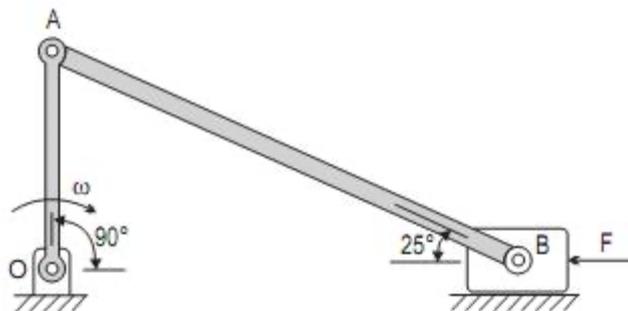
Podemos determinar a velocidade angular da roda. Contudo, lembre-se de converter as unidades do raio para metro e de velocidade para metros por segundo.

Assim temos que

$$\omega = \frac{v_G}{r} = \frac{10}{0,25} = 40 \text{ rad/s}$$

Logo a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.

13. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS-2018) O mecanismo mostrado na Figura abaixo é utilizado em um compressor. Ele transforma o movimento de rotação da manivela OA em um movimento de translação do pistão, em B. O movimento da manivela, na fase mostrada, é uniforme, com velocidade de rotação $\omega = 80 \text{ rad/s}$.



Se o comprimento da manivela é de 20 cm, a velocidade do pistão em B, em m/s, é de

- a) 4,0



- b) 16,0
- c) 128,0
- d) 240,0
- e) 320,0

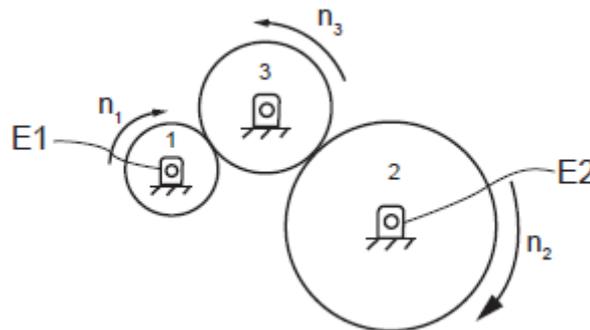
Comentário:

Para resolvermos esta questão basta saber que a direção da velocidade do ponto A será sempre perpendicular a posição da manivela (barra OA), assim nesta posição ela terá somente componente horizontal e será igual a velocidade no ponto B devido ao acoplamento, assim podemos calculá-las por:

$$v_A = v_B = \omega \cdot r_{OA} \quad \Rightarrow \quad v_A = v_B = 80 \cdot 0,2 = 16 \text{ m/s}$$

Logo a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.

14. (CESNAGRANRIO/PETROBRAS-2018) A transmissão do movimento de rotação entre os eixos E1 e E2 de uma máquina é realizada pelas engrenagens 1, 2 e 3, conforme ilustrado na Figura abaixo.



Os diâmetros das engrenagens são $D_1 = 10 \text{ cm}$, $D_2 = 20 \text{ cm}$ e $D_3 = 15 \text{ cm}$, e a relação de transmissão é tal que $n_2 = 0,5 n_1$.

Se a engrenagem 3 for substituída por outra com 20 cm de diâmetro, a relação de transmissão será

- a) mantida
- b) $n_2 = n_1$
- c) $n_2 = 2 n_1$
- d) $n_2 = 4 n_1$



e) $n_2 = 8 n_1$

Comentário:

Quando dois corpos girantes estão em contato um com o outro, os pontos de contato apresentam trajetórias circulares diferentes, contudo a velocidade tangencial e a aceleração tangencial no ponto serão equivalentes. Assim temos que para o sistema de transmissão indicado na questão a relação de transmissão é dada por:

$$n_1 \cdot D_1 = n_3 \cdot D_3 = n_2 \cdot D_2$$

Portanto independentemente d diâmetro da engrenagem número 3 a relação de transmissão entre a engrenagem 1 e 2 será mantida, uma vez que seus diâmetros são mantidos. Vejamos:

$$n_1 \cdot D_1 = n_3 \cdot D_3 \Rightarrow n_1 \cdot 10 = n_3 \cdot 20 \Rightarrow n_3 = 0,5 \cdot n_1$$

$$n_3 \cdot D_3 = n_2 \cdot D_2 \Rightarrow 0,5 \cdot n_1 \cdot 20 = n_2 \cdot 20 \Rightarrow n_2 = 0,5 \cdot n_1$$

Portanto a **alternativa A** está CORRETA e é o gabarito da questão.

15. (CESGRANRIO/UNIRIO-2016) O sistema de transmissão de uma máquina utiliza um redutor do tipo sem-fim e coroa, com redução de 1:50. O sem-fim é acionado por um motor elétrico de 2.100 W, a uma rotação de 100 RPM (aproximadamente 10,5 rad/s). Desconsiderando-se qualquer perda no sistema, o torque, em kN.m, capaz de ser desenvolvido no eixo de acoplamento da coroa vale

- a) 5
- b) 10
- c) 50
- d) 80
- e) 100

Comentário:

Sabendo-se que a potência é determinada por ($P=T \cdot \omega$) e que não há perda no sistema, pois a potência de entrada, do motor acoplado no sem fim, é a mesma na saída da coroa. Assim temos que:

$$\omega_{mot} \cdot \frac{1}{50} = \omega_{cor} \Rightarrow \omega_{cor} = \frac{10,5}{50} = 0,21 [rad/s]$$



$$P = T_{cor} \cdot \omega_{cor} \Rightarrow T_{coroa} = \frac{2100}{0,21} = 10 \text{ [kN.m]}$$

Portanto, a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.

16. (CESGRANRIO/TRNASPETRO-2018) Um veículo percorre uma trajetória retilínea do ponto A ao ponto B acelerado, prossegue com a trajetória retilínea do ponto B ao ponto C com velocidade constante e, finalmente, descreve uma trajetória circular de raio R do ponto C ao ponto D com velocidade de módulo constante. A segunda Lei de Newton estabelece que esse veículo estará sujeito a uma força aplicada não nula no(s) trecho(s)

- a) A-B, apenas
- b) C-D, apenas
- c) A-B e B-C, apenas
- d) A-B e C-D, apenas
- e) A-B, B-C e C-D

Comentário:

Prezado(a) estrategista, a segunda lei de Newton estabelece que a força resultante agindo sobre uma partícula proporciona uma aceleração proporcional a ela com mesmo sentido e direção da força. Podemos representá-la pela seguinte expressão matemática:

$$F = m \cdot a$$

Onde F= Força resultante; m= massa da partícula; e a=aceleração resultante.

No trecho AB, com trajetória retilínea, o veículo encontra-se acelerado, ou seja, haverá uma força não nula aplicada neste percurso. No trecho BC, com trajetória retilínea, o veículo apresenta velocidade constante, em outras palavras, não há aceleração ou desaceleração, desta forma neste percurso não haverá uma força não nula atuante.

Por fim no trecho CD, com trajetória curvilínea, mesmo com velocidade constante existe uma componente de força que é a força centrípeta. Essa força é uma componente direcionada ao centro de uma trajetória circular, seja qual for a origem dessa força. Como a velocidade do corpo é tangente à trajetória, a força centrípeta é sempre perpendicular à velocidade.

Além disso, a força centrípeta altera à direção e/ou o sentido do vetor velocidade. Por isso, mesmo o movimento circular apresentando módulo de velocidade constante, apresenta uma força não nula atuante.

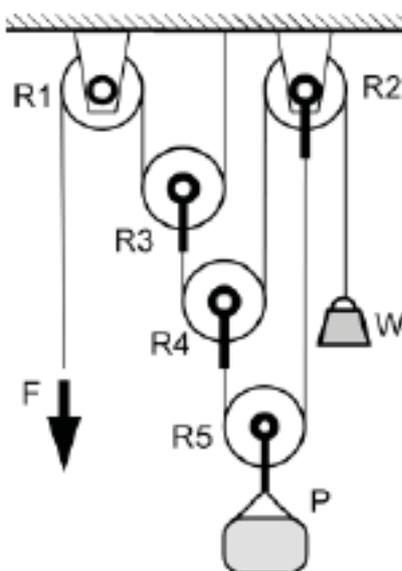


Portanto, a **alternativa D** está CORRETA e é o gabarito da questão.

Professor e a força centrífuga? A força centrífuga é uma pseudoforça, ou seja, ela surge somente quando se está em um referencial com movimento circular. Quando estamos dentro de um veículo com trajetória circular nos sentimos “jogados” para fora da curva, essa é a força centrífuga. Contudo, para um observador externo ao veículo isso é apenas um efeito da inércia, por isso, ela é classificada como uma pseudoforça.

Logo a força centrífuga ocorre em um referencial não-inercial que está em trajetória circular, sendo ela um efeito decorrente da inércia.

17. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Considere a Figura abaixo:



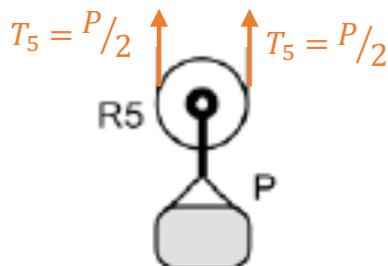
No sistema de roldanas com cordas inextensíveis da Figura, a força F e o contrapeso W que mantêm o sistema em equilíbrio estático são iguais a, respectivamente,

- a) $P/2$ e $P/2$
- b) $P/4$ e $P/2$
- c) $P/8$ e $P/4$
- d) $P/16$ e $P/4$
- e) $P/16$ e $P/8$

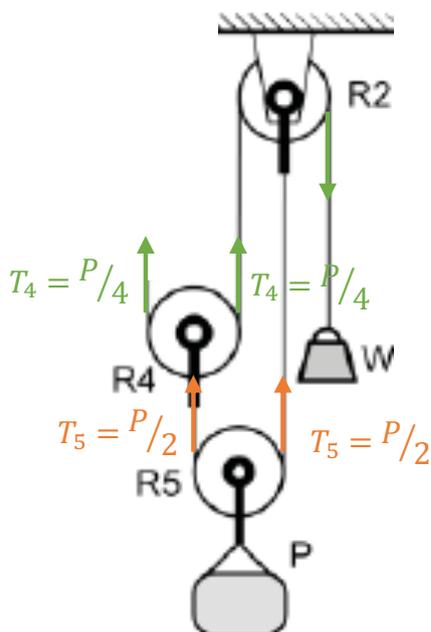
Comentário:



Para resolvermos esta questão devemos analisar a análise individual para cada roldana suspensa por cabos. O segredo aqui é iniciarmos a análise por R5, pois cada cabo da roldana suportará metade do peso P. Vejamos:

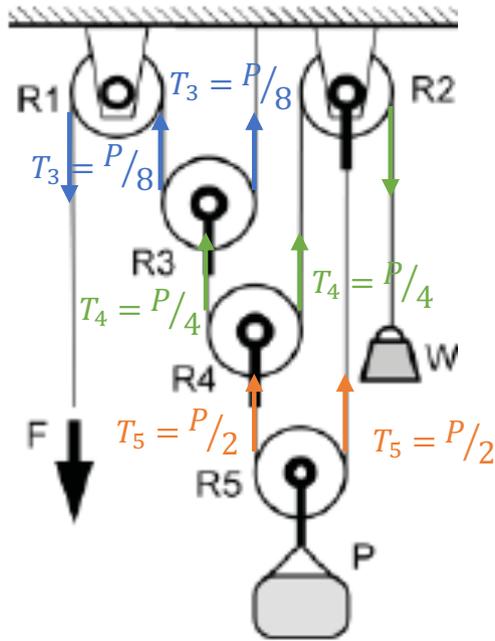


De maneira similar devemos avaliar as demais roldanas, vejamos a análise para R4.



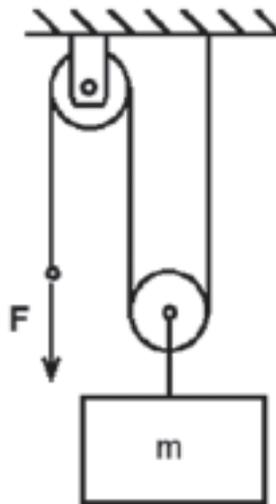
Aqui já sabemos que o peso W deverá ter valor igual a $P/4$ para se manter o equilíbrio. Para R3...





Desta forma, a força F deverá ser igual a $P/8$ para que o sistema esteja em equilíbrio. Logo, a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.

18. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Uma carga de massa $m = 200 \text{ kg}$ é içada por meio de um sistema de roldanas, conforme mostrado na Figura abaixo.



Sabendo-se que a força F aplicada ao cabo vale $1,5 \text{ kN}$, e considerando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, a aceleração da carga, em m/s^2 , será de

- a) 1,0, orientada para cima
- b) 2,0, orientada para cima
- c) 4,0, orientada para baixo



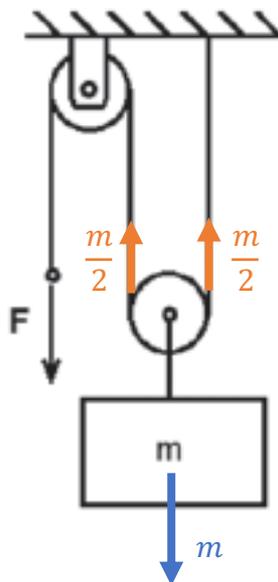
- d) 5,0, orientada para baixo
- e) 5,0, orientada para cima

Comentário:

A força peso da carga será igual a:

$$P = m \cdot g = 200 \cdot 10 = 2000 \text{ N}$$

Analisando o sistema de roldanas, notamos que cada cabo da roldana é responsável por suportar a metade da massa da carga. Assim...



A tração em cada cabo da roldana inferior será de 100 kg ou 1000 N, ou seja, como a força F é de 1500 N a carga será elevada, pois há uma força de 500 N a mais do que o necessário para se manter o equilíbrio.

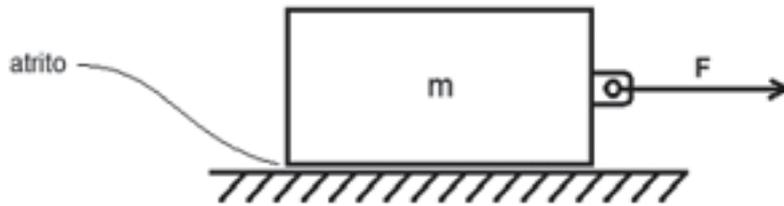
Feito isso, basta aplicarmos a equação da segunda lei de Newton...

$$F = m \cdot a \Rightarrow 500 = \left(\frac{200}{2}\right) \cdot a \Rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2 \text{ para cima}$$

Logo, a **alternativa E** está CORRETA e é o gabarito da questão.

19. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Um engradado com massa de 400 kg é puxado por uma força $F = 2,0 \text{ kN}$, conforme mostrado na Figura abaixo.



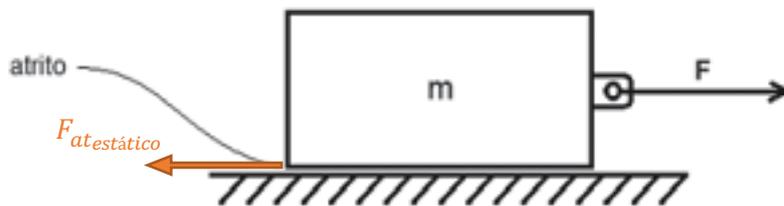


Se os coeficientes de atrito estático e cinético do engradado com o piso são, respectivamente, 0,4 e 0,3, a aceleração do engradado, em m/s^2 , imposta pela força F , considerando-se $g = 10 m/s^2$, é de

- a) 1,0
- b) 2,0
- c) 2,5
- d) 4,0
- e) 5,0

Comentário:

Para a resolução desta questão, devemos, primeiramente, verificar se a força F aplicada é o suficiente para movimentar o engradado, em outras palavras, a força F deve ser maior que a força de atrito estático. Vejamos:



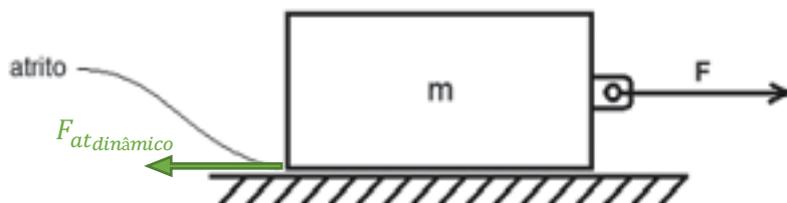
$$F_{at_{estático}} = \mu_{est} \cdot F_N$$

$$F_N = m \cdot g = 400 \cdot 10 = 4000 \text{ N}$$

$$F_{at_{estático}} = 0,4 \cdot 4000 = 1600 \text{ N são necessários para movimentar o engradado.}$$

Como a força F aplicada é de 2000 N haverá movimentação e após o seu início a força sofrerá como oposição a força de atrito dinâmico, vejamos qual será a resultante:





$$F_R = F - F_{atdinamico} \Rightarrow 2000 - (4000 \cdot 0,3) = 800 \text{ N}$$

Logo, uma força de 800 N será responsável por acelerar a movimentação da caixa, assim pela segunda lei de Newton, obtemos:

$$F = m \cdot a \Rightarrow 800 = 400 \cdot a \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

Portanto, a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.

20. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS-2018) Um técnico teve que resolver um problema envolvendo uma antena parabólica que gira horizontalmente com velocidade angular constante de 80 rpm (rotações por minuto). Para isso, ele precisava saber o valor exato do tempo que essa antena levava para varrer um ângulo de 60 graus.

Ao fazer os cálculos, obteve, como resultado, que esse tempo, em milissegundos, era

- a) 125
- b) 100
- c) 85
- d) 40
- e) 25

Comentário:

Prezado(a) aluno(a), a resolução desta questão passa por uma correta conversão de unidades, de rotações por minuto para radianos por segundo e, de graus para π radianos. Vejamos:

$$80 \left[\frac{rot}{min} \right] \cdot \left[\frac{1. min}{60 s} \right] \cdot \left[\frac{2\pi rad}{1. rot} \right] = \frac{160\pi}{60} \left[\frac{rad}{s} \right]$$

$$180^\circ = \pi rad \Rightarrow 60^\circ = \frac{\pi}{3} rad$$



Convertidas as unidades, sabendo o deslocamento e a velocidade podemos determinar o tempo necessário para percorrer esse trajeto dividindo a trajetória pela velocidade, assim...

$$t = \frac{\pi/3}{160\pi/60} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{60}{160 \cdot \pi} = \frac{60}{480} = 0,125 \text{ s ou } 125 \text{ milisegundos}$$

Portanto, a **alternativa A** está CORRETA e é o gabarito da questão.

21. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2012) A partir das medidas de velocidade angular e torque no eixo de saída de um motor elétrico, pode-se determinar, diretamente, a

- a) eficiência do motor
- b) potência do motor
- c) tensão de alimentação
- d) consumo do motor elétrico
- e) corrente no sistema elétrico

Comentário:

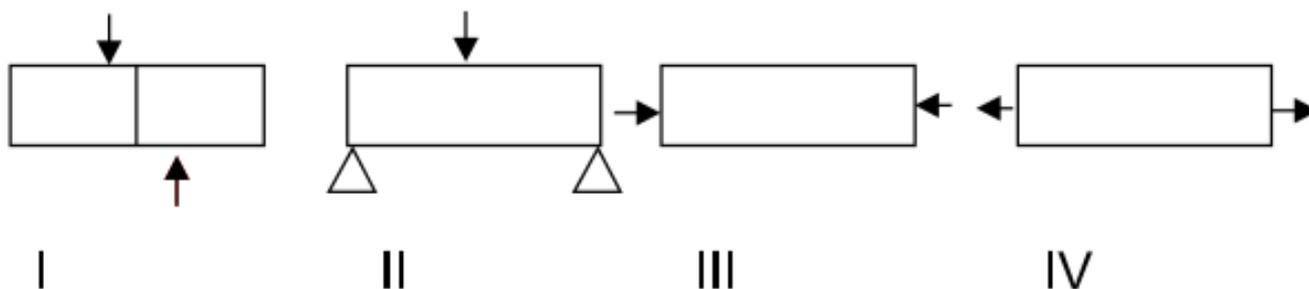
A potência do motor elétrico pode ser determinada a partir do conhecimento da velocidade de rotação e do torque no eixo. A equação para o cálculo da potência em watts é a seguinte:

$$P = \tau \cdot \omega$$

Em que τ é o torque em N.m e ω é a velocidade angular em radianos por segundo. Logo, a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.

Outras bancas

22. (VUNESP/Pref. de São Paulo-2018) Observe as figuras.



Assinale a alternativa correta.

- a) I Cisalhamento; II Flexão; III Compressão; IV Tração.
- b) I Cisalhamento; II Flexão; III Tração; IV Compressão.
- c) I Tração; II Compressão; III Flexão; IV Cisalhamento.
- D) I Flexão; II Compressão; III Tração; IV Cisalhamento.
- e) I Compressão; II Tração; III Cisalhamento; IV Flexão.

Comentário:

A **alternativa A** está CORRETA e é o gabarito da questão.

A Figura I – Representa o Cisalhamento que é uma tensão gerada por forças aplicadas em sentidos iguais ou opostos, em direções semelhantes.

A Figura II - Representa à Flexão simples que geralmente é resultante da ação de carregamentos transversais que curvam o corpo e que ocasionam uma distribuição de tensões aproximadamente lineares no seu interior.

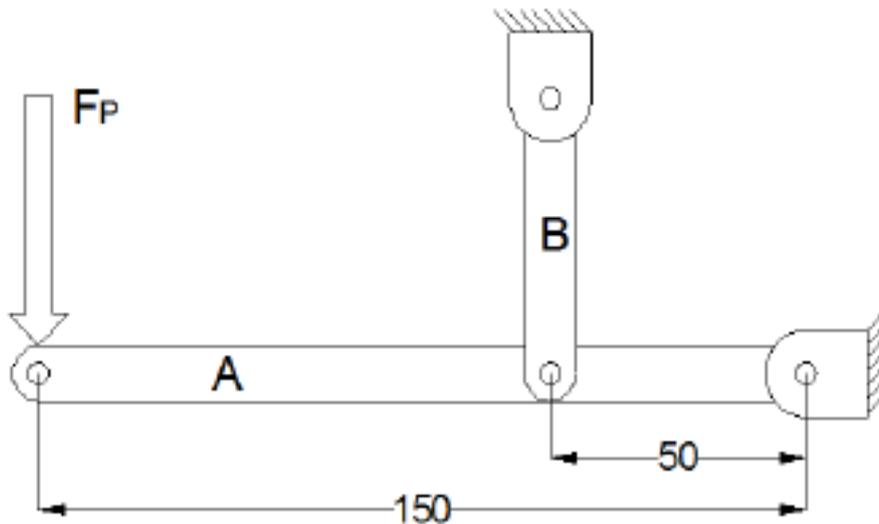
Tensões Normais: podendo ser de Tração ou de Compressão - A intensidade da força ou força por unidade de área, que atua no sentido perpendicular, é definida como tensão normal e por convenção como tração(+) se esta é dirigida para fora do corpo ou compressão(-) se esta é dirigida para fora do corpo.

A Figura III - Representa à Compressão – Causada por uma tensão normal que atua na seção perpendicular do corpo de maneira a comprimi-lo.

A Figura IV - Representa à Tração - Causada por uma tensão normal que atua na seção perpendicular do corpo de maneira a estica-lo.

23. (Instituto AOCP/UEFS-2018) A figura a seguir ilustra, de forma esquemática, um suporte para carregamento de cargas em estado de equilíbrio. A Viga A apresenta pontos articulados de fixação por meio de pinos. Considerando uma força F_p de 20 kN aplicada na extremidade da viga A e considerando as dimensões das vigas apresentadas na figura, assinale a alternativa correta.





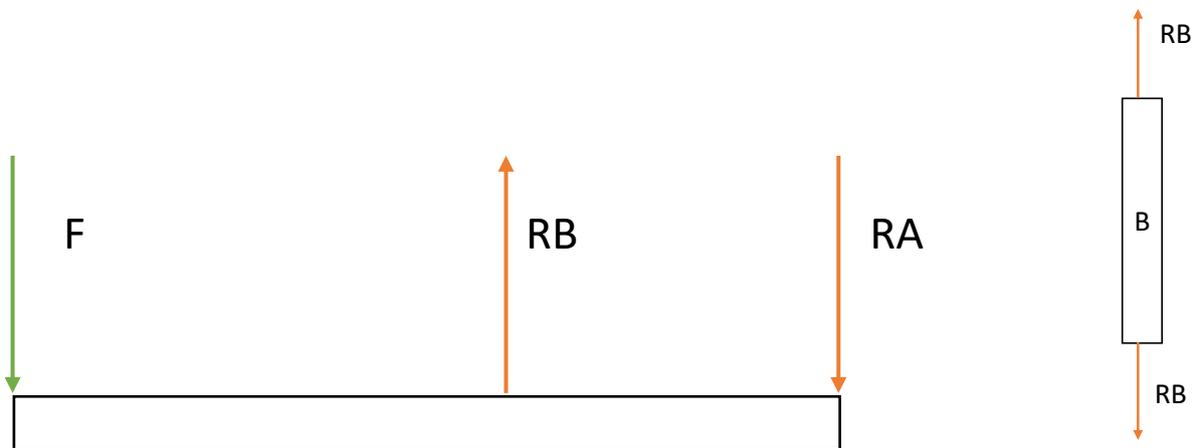
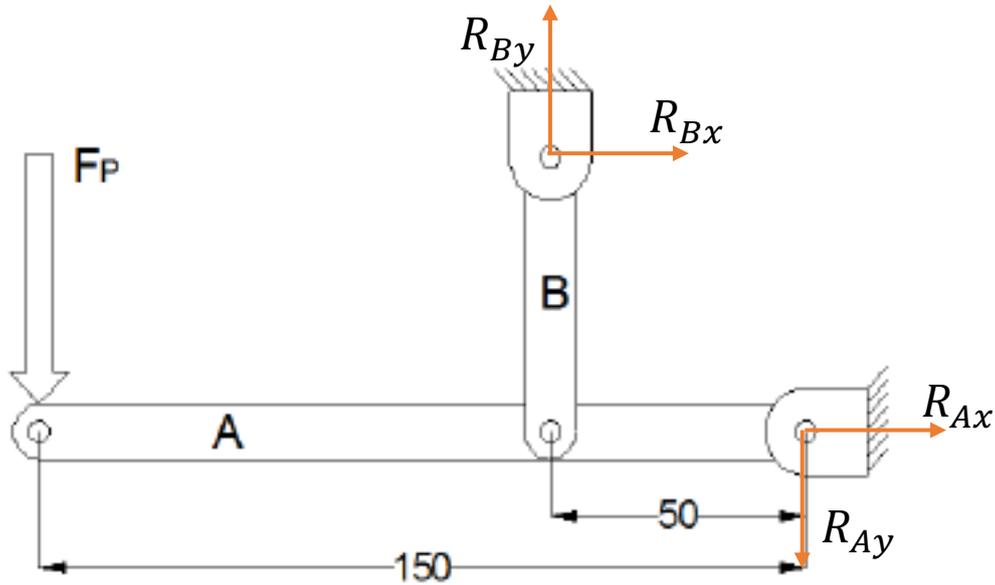
- a) A viga B estará sujeita a uma força de compressão de 60 kN.
- b) O ponto de fixação da viga A estará sujeito a uma força de 40 kN.
- c) O ponto de fixação da viga A estará sujeito a uma força de 120 kN.
- d) A viga B estará sujeita a uma força de compressão de 80 kN.
- e) Como a viga B possui 2 pontos de travamento, cada ponto estará sob efeito da metade da força recebida pela viga.

Comentário:

Para a resolução desta questão devemos aplicar os princípios da estática. Vamos analisar cada uma das alternativas.

A **alternativa A** está incorreta. A viga B está sujeita a uma força de tração. Por análise do sentido de atuação da força F (para baixo) notamos que a reação de apoio no sentido vertical (tipo pino com uma reação em X e uma em Y) da barra RB está atuando para cima enquanto a viga é puxada para baixo em sua outra extremidade, por atuação de F , tracionando-a. Vejamos o diagrama de corpo livre abaixo.





Aplicando as equações de equilíbrio para as forças em Y e somatório de momentos obtemos:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -F + R_B - R_A = 0 \Rightarrow F = R_B - R_A$$

$$+\curvearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow F \cdot 150 - R_B \cdot 50 = 0 \Rightarrow R_b = \frac{20 \cdot 150}{50} = 60 \text{ kN}$$

$$R_A = R_B - F = 40 \text{ kN}$$

A **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão. A força de reação no pino de sustentação na extremidade esquerda da viga A é de 40 kN, conforme calculado.

A **alternativa C** está incorreta, uma vez que a reação no pino de sustentação da viga A é de 40 kN.



A **alternativa D** está incorreta. A viga B está sujeita a uma força de tração com 60 kN de intensidade.

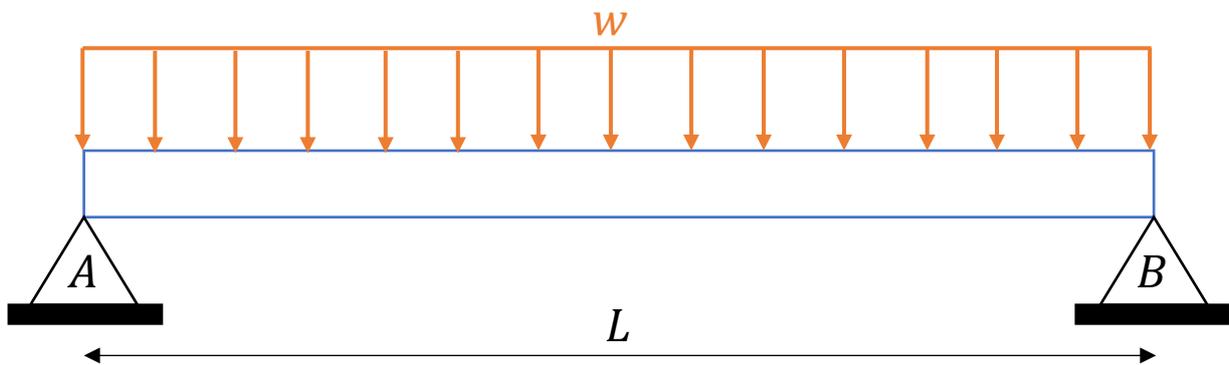
A **alternativa E** está incorreta. Podemos analisar a viga B como um elemento separado do sistema onde as forças atuantes sobre ela obedecem ao princípio da estática. Desta maneira a força atuante em um ponto de travamento será **igual** a força atuante no outro ponto de travamento.

24. (Instituto AOCP/UFOB-2018) Um técnico mecânico deve ser capaz de avaliar estruturas e equipamentos quanto à sua resistência mecânica.

Com referência aos conceitos da resistência dos materiais, julgue o item a seguir.

Uma viga apoiada nas extremidades, submetida a uma carga de flexão uniformemente distribuída, possuirá momento fletor máximo no centro da viga e nulo nas extremidades.

Comentário:

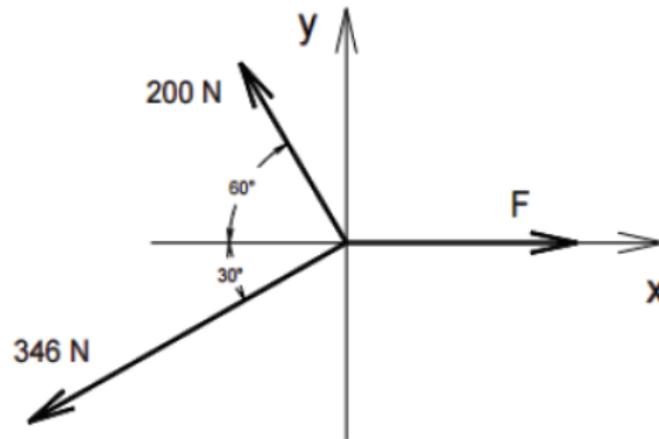


Caro(a) aluno(a). Vigas biapoiadas submetidas a um carregamento distribuído simetricamente ao longo de seu comprimento apresentam o momento fletor máximo no centro da viga. Isso ocorre justamente pela simetria da estrutura e dos carregamentos. Este tipo de apoio permite rotação da viga e devido ao fato de não serem momentos concentrados nas extremidades, os momentos fletores são nulos nos pontos A e B (extremidades).

Portanto, a **assertiva** está CORRETA.

25. (IBFC/SESA-PR - 2016) Analise o sistema de forças apresentado a seguir, e, considerando que o sistema se encontra em equilíbrio, assinale a alternativa que apresente o valor aproximado da força F.





- a) 480 N.
- b) 400 N.
- c) 360 N.
- d) 320 N.

Comentário:

Para resolvermos esta questão devemos analisar as **forças envolvidas no sistema** e decompor as que não são paralelas ao eixo x e y. Como trata-se de um sistema em equilíbrio a resultante das forças F_x e F_y é igual a zero, portanto decompondo a força F_1 de 200N, temos:

$$F_{1x} = 200 \cdot \cos 60 = 100N \text{ e } F_{1y} = 200 \cdot \text{sen}60 = 173N$$

Para a força F_2 de 346N obtemos:

$$F_{2x} = 346 \cdot \cos 30 = 299,6N \text{ e } F_{2y} = 346 \cdot \text{sen}30 = 173N$$

Aplicando as equações de equilíbrio, e adotando o primeiro quadrante como positivo, chegamos ao seguinte resultado:

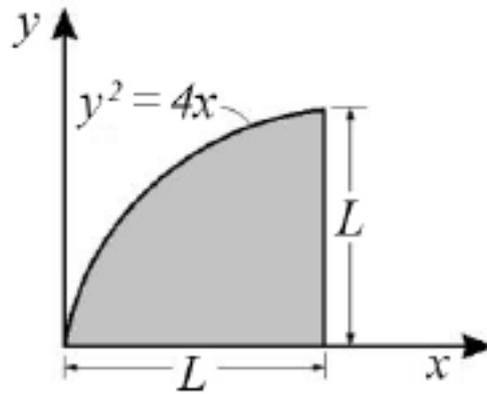
$$\sum F_x = 0 = -F_{1x} - F_{2x} + F = 0 \Rightarrow F = 399,6 \cong 400N$$

$$\sum F_y = 0 = F_{1y} - F_{2y} = 0$$

Portanto a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.

26. (CEBRASPE/IFF-2018)





Na área ilustrada na figura precedente, o momento de inércia em torno do eixo x pode ser calculado pela expressão

a) $I_x = \frac{2.L^{4,5}}{4,5}$

b) $I_x = \frac{L^{4,5}}{10}$

c) $I_x = \frac{L^5}{3} - \frac{L^4}{20}$

d) $I_x = \frac{L^3}{9} - \frac{L^4}{10}$

e) $I_x = \frac{L^4}{3} - \frac{L^5}{20}$

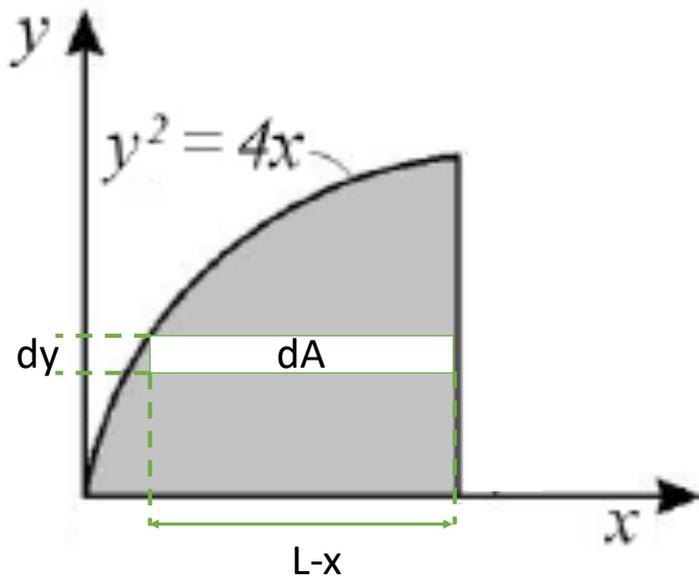
Comentário:

Caro(a) aluno(a), para resolvermos esta questão, em que a área possui um formato geométrico complexo, devemos utilizar a definição do momento de inércia em que:

$$I_x = \int y^2 dA \quad e \quad I_y = \int x^2 dA$$

Para resolvermos a integral do cálculo do momento de inércia em torno do eixo x devemos encontrar um elemento infinitesimal dA adequado. Em outras palavras, neste caso, precisamos converter esse elemento dA para dy . Vejamos a imagem:





$$dA = dy \cdot (L - x)$$

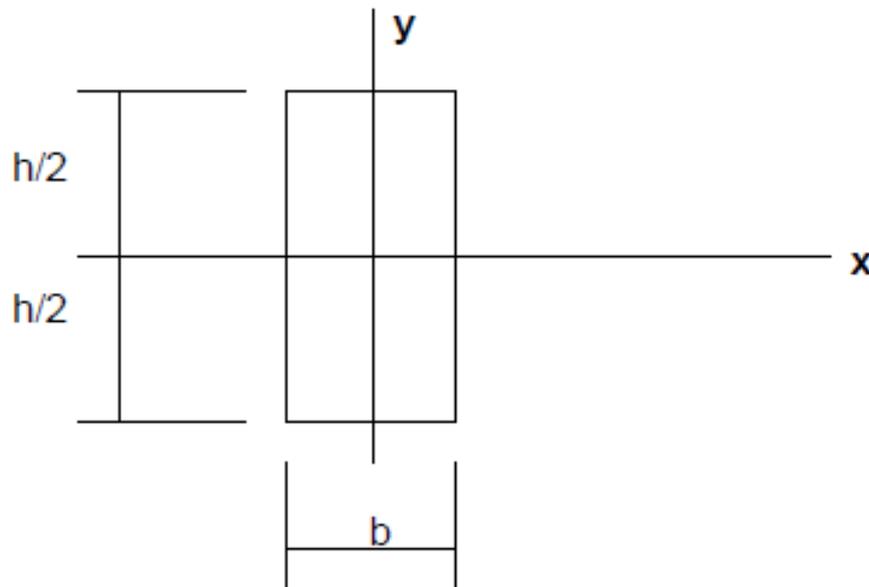
Feito isso e sabendo que $y^2 = 4x$, ou seja, $x = \frac{y^2}{4}$, com y variando de 0 a L obtemos:

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^L y^2 \cdot \left(L - \frac{y^2}{4}\right) dy$$
$$I_x = \int_0^L \left(y^2 \cdot L - \frac{y^4}{4}\right) dy = \left(\frac{y^3 \cdot L}{3} - \frac{y^5}{20}\right) \Big|_0^L$$
$$I_x = \frac{L^4}{3} - \frac{L^5}{20}$$

Portanto, a **alternativa E** está CORRETA e é o gabarito da questão.

27. (NC UFPR/PCie PR-2007) O momento de inércia da figura abaixo é dado genericamente por $J_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dS$





Considerando $h = b$, o momento de inércia poderá ser expresso por:

a) $J_x = \frac{h^3}{6}$

b) $J_x = \frac{b^3 h}{2}$

c) $J_x = \frac{h^4}{12}$

d) $J_x = \frac{b^2 h^2}{6}$

e) $J_x = bh^3$

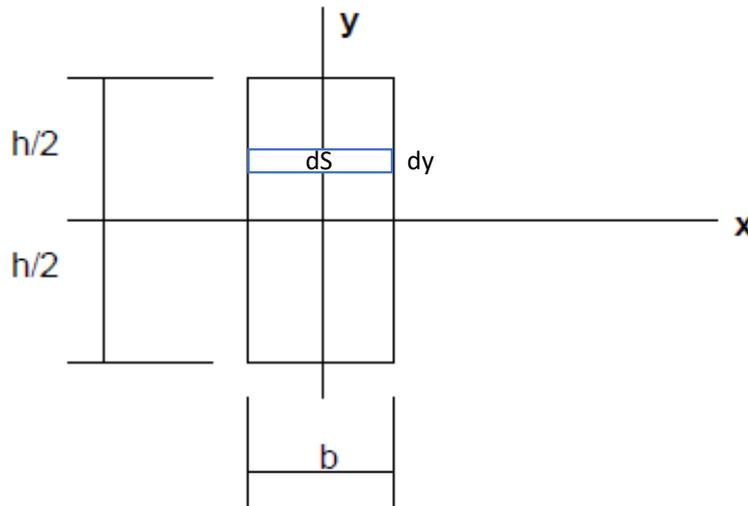
Comentário:

Caro(a) estrategista, essa é uma questão conceitual que aborda o assunto sobre momento de inércia quando os eixos atravessam o centroide da área. Nesse caso, para uma rápida resposta em prova, deve estar no seu sangue a equação para o cálculo do momento de inércia deste retângulo que é igual a $\frac{bh^3}{12}$. Sendo $b=h$ temos que $J_x = \frac{h^4}{12}$. Logo, a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.

Fique tranquilo, pois caso você não lembre de cabeça a equação acima você pode chegar ao resultado através da resolução da integral. Vejamos:

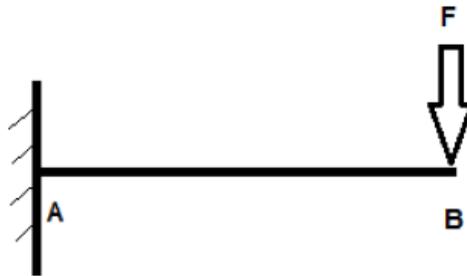
$$J_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dS \text{ em que } dS = b \cdot dy. \text{ Uma vez que } b = h, dS = h \cdot dy$$





$$J_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot h \cdot dy = \frac{h}{3} (y^3) \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{h}{3} \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = \frac{h}{3} \left(\frac{2h^3}{8} \right) = \frac{h^4}{12}$$

28. (NC-UFPR/ITAIPU-2019) O desenho ao lado representa uma viga carregada:



Com base nos dados apresentados, é correto afirmar que o momento fletor máximo ocorrerá:

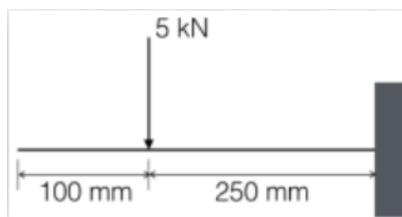
- a) no ponto B.
- b) a ¼ da distância entre A e B mais próximo do ponto B.
- c) na metade da distância entre A e B.
- d) a ¼ da distância entre A e B mais próximo do ponto A.
- e) no ponto A.

Comentário:

Questão simples, mas que exige o conceito de **momento fletor**. Sabemos que o momento é dado pela força aplicada a distância perpendicular ao ponto em que estamos analisado ($M=F \cdot d$). Como a força é constante, neste caso, quanto maior for a distância maior será o momento fletor. Portanto, o ponto da viga mais distante do ponto B é o ponto A. Logo, a **alternativa E** está CORRETA e é o gabarito da questão.



29. (COMPERVE/UFRN – 2018) Um segmento de um certo braço robótico é uma barra que pode ser modelada como uma viga engastada submetida à ação de uma força, conforme representado na figura. Nesse caso, o momento fletor na barra é:



- a) 1,25 kNm
- b) 500 Nm
- c) 1 kNm
- d) 1,5 kNm

Comentário:

A **alternativa A** está CORRETA e é o gabarito da questão. A grande sacada nesta questão é prestarmos atenção as **unidades de medidas e na distância** a qual está sendo aplicada a força de 5kN. Assim temos que o momento fletor da barra relação ao ponto onde ela está engastada é obtido por:

$$M = F.d = 5000 \text{ N} \cdot 0,25\text{m} = 1250 \text{ N.m ou } 1,25 \text{ kN.m}$$

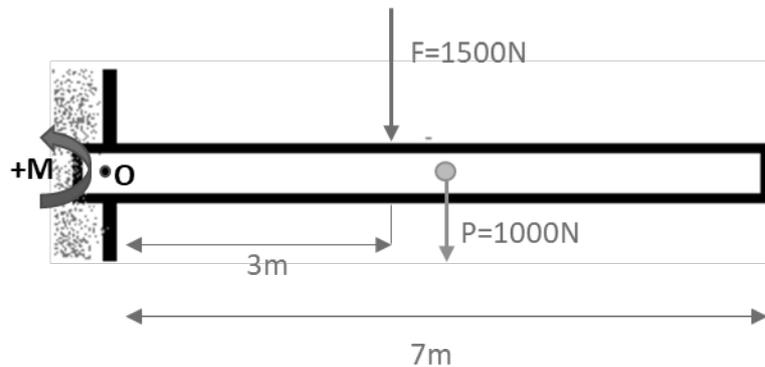
30. (CEPS-UFPA/UNIFESSPA-2018) Considere uma viga horizontal, uniforme, com comprimento de 7 m, peso próprio igual a 1000 N e espessura desprezível. Se a viga encontra-se engastada, e a 3 m do engaste age uma força vertical para baixo de 1500 N, então a reação de momento no engaste vale (em kN.m)

- a) 6,500.
- b) 7,000.
- c) 7,500.
- d) 8,000.
- e) 8,500.

Comentário:

Esta questão é muito boa para praticarmos a nossa visualização de um sistema apenas com a descrição deste. Para solucionarmos o problema vamos iniciar com o desenho do sistema e do DCL.





A grande pegadinha da banca neste caso, foi considerar o **peso da barra** em seu centro de gravidade. Portanto, além da força F estar ocasionando um momento em relação à O temos o peso P agindo no sistema. Como o sistema está em equilíbrio e a banca pede o valor do momento no ponto O, vamos ao equacionamento, adotando como convenção o sentido anti-horário positivo:

$$\sum M_o = 0 = -1500.3 - 1000.3,5 + M \Rightarrow M = 8000N.m$$

Portanto a **alternativa D** está CORRETA e é o gabarito da questão.

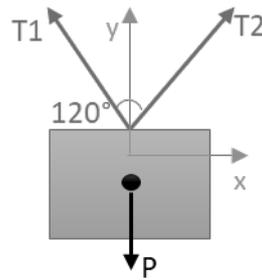
31. (IFSP/IFSP-2016) Uma caixa de massa desconhecida está suspensa por duas cordas que estão sujeitas a ação de duas forças de tração, que medidas por um dinamômetro, resultou em cada uma com o mesmo módulo de 100 N. Essas forças de tração nas cordas formam um ângulo de 120° entre si. Para que esta caixa esteja em equilíbrio, admitindo a aceleração da gravidade como 10 m/s², é preciso que ela tenha uma massa de:

- a) 6 kg
- b) 8 kg
- c) 10 kg
- d) 12 kg

Comentário:

Para resolvermos a questão devemos montar o diagrama de corpo livre de acordo com a descrição. Podemos notar que teremos **duas cordas inclinadas** com um ângulo de 120° entre elas com força trativa de 100N segurando uma caixa, logo o nosso DCL ficará da seguinte maneira:



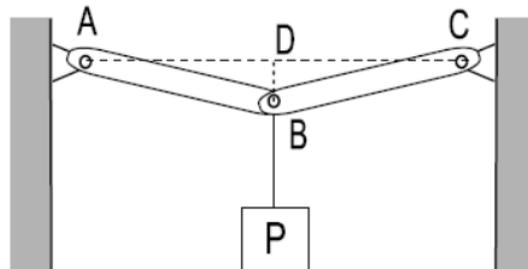


As **forças trativas** T1 e T2 são **opostas** logo suas componentes em X se anulam. As componentes do eixo Y das cordas é que sustentam a caixa e formam um ângulo de 60° com o eixo y imaginário que corta o centro da caixa. Por fim, aplicando as equações de equilíbrio, sabendo que as forças T1 e T2 são iguais e, que a força peso é igual a massa multiplicada pela aceleração da gravidade, obtemos:

$$\sum F_y = 0 = T1_y + T2_y - (m \cdot g) \Rightarrow T1 \cdot \cos 60 + T2 \cdot \cos 60 - (m \cdot 10) = 0 \Rightarrow m = 10kg$$

Portanto a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.

32. (FGV/TJ-RO – 2015) Observe a figura a seguir, na qual um peso P pende do ponto B, no centro das barras sem peso AB e BC de mesmo comprimento.



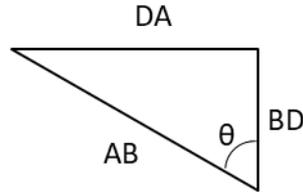
Essas barras são rotuladas no ponto B e têm as outras extremidades presas às rótulas A e C, ambas localizadas na mesma linha horizontal AC. A linha vertical BD é 20 vezes menor que os comprimentos AB e BC ($BD=AB/20$, $AB=BC$). As tensões (forças de tração) nas barras AB e BC para que o peso P seja suportado são expressas por:

- a) 0,05P;
- b) 0,1P;
- c) P;
- d) 10P;
- e) 20P.

Comentário:



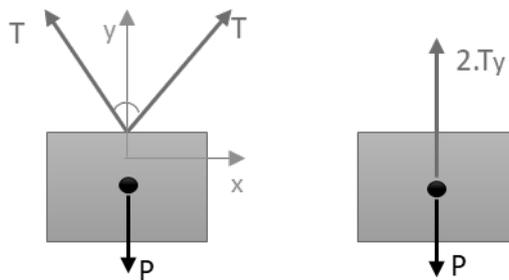
Para resolvermos a questão, primeiramente devemos encontrar o **ângulo** existente entre as barras AC. Como a banca nos disse que a linha vertical BD é 20 vezes menor que o comprimento AB e BC, através da trigonometria do triângulo retângulo podemos obter a metade deste ângulo para então decompor as forças trativas nas barras. Vejamos o triângulo:



A partir do **teorema de Pitágoras** sabemos que $\cos \theta = \frac{BD}{AB}$ assim obtemos:

$$\cos \theta = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{AB}{20}}{AB} = \frac{1}{20}$$

Encontrado o valor de $\cos \theta$ podemos partir para a decomposição das forças trativas decompostas no eixo Y nas duas barras a partir do DCL:



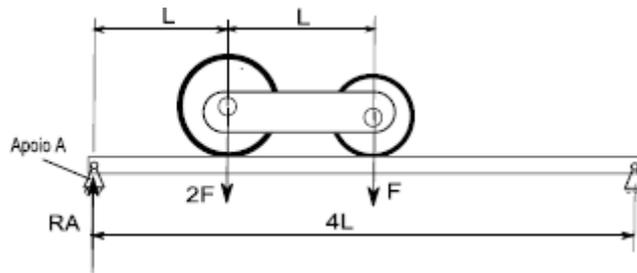
Como as barras possuem **mesma dimensão** AB e BC são idênticas e está apoiadas igualmente podemos simplificar o nosso diagrama de corpo livre conforme a figura a direita acima. Para finalizarmos aplicamos as equações de equilíbrio no eixo y, decompondo a força trativa de acordo com seu cosseno diretor, para obtermos a resposta. Vejamos:

$$\sum F_y = 0 = 2.T_y - P = 2.(T \cdot \cos \theta) - P \Rightarrow T = \frac{P}{2 \cdot \cos \theta} = \frac{P}{2 \cdot \frac{1}{20}} \Rightarrow T = 10P$$

Logo, a **alternativa D** está CORRETA e é o gabarito da questão.

33. (FGV/TJBA-2015) Uma viga bi-apoiada de comprimento 4L suporta duas rodas interligadas com distância entre centros L. A roda mais pesada tem peso 2F e tem seu centro situado a uma distância L do apoio A. A roda mais leve tem peso F e tem seu centro situado a uma distância 2L do apoio A.



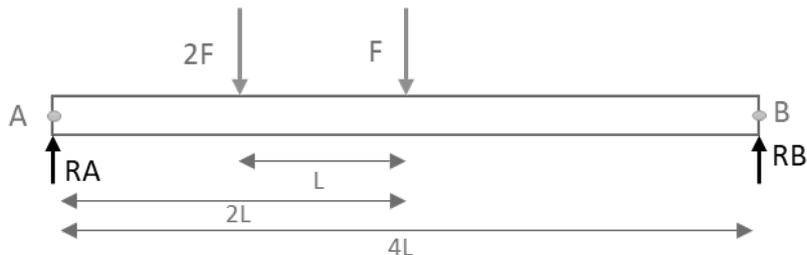


A Reação RA vertical que o apoio A exerce na viga nesse instante é:

- a) $F/2$;
- b) F ;
- c) $3F/2$;
- d) $2F$;
- e) $5F/2$.

Comentário:

Esta é uma questão simples, mas que exige a percepção de que devemos realizar o somatório de momento no **lado direito** (ponto B) da nossa viga, pois ela está apoiada em ambos os lados. Vamos a concepção de nosso DCL:



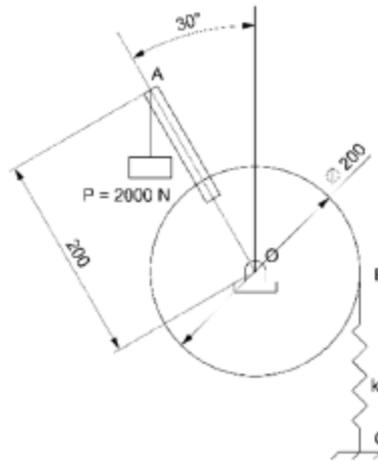
Agora vamos ao equacionamento do sistema em equilíbrio, como momento no sentido anti-horário positivo, em que:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 2F \cdot 3L + F \cdot 2L - RA \cdot 4L = 0 \Rightarrow RA = \frac{8 \cdot F \cdot L}{4 \cdot L} = 2F$$

Logo, a **alternativa D** está CORRETA e é o gabarito da questão.

34. (FGV/AL-RO-2018) A figura a seguir apresenta um peso de 2000 N ligado a uma alavanca AO que se encontra rigidamente conectada à polia cujo centro é O.





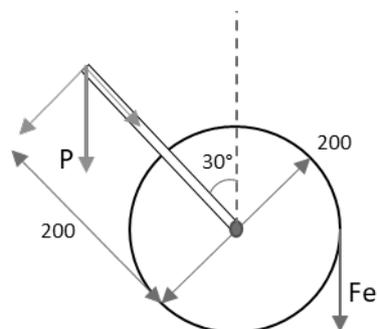
(Dimensões em mm)

Assumindo $\pi = 3$, a constante k da mola BC, para que o sistema esteja em equilíbrio, vale

- a) 10 kN/m
- b) 20 kN/m
- c) 30 kN/m
- d) 40 kN/m
- e) 50 kN/m

Comentário:

Para solucionarmos esta questão, devemos perceber que, para o sistema satisfazer as equações de equilíbrio, a **força elástica da mola** deve **anular a componente de força perpendicular a polia**, da força peso. Vejamos o diagrama de corpo livre:



Neste caso o somatório dos momentos causados entre componente perpendicular a polia ($P \cdot \sin 30^\circ$) e a força elástica (F_{el}) da mola deve ser igual a zero. Assim obtemos:

$$\sum M = 0 \Rightarrow (P \cdot \sin 30^\circ) \cdot 0,2 - F_{el} \cdot 0,1 = 0 \Rightarrow F_{el} = 2000N.$$



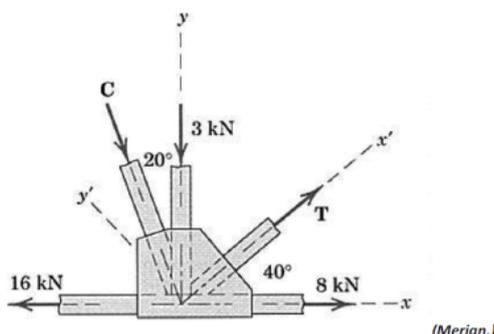
Para finalizarmos, devemos encontrar a constante k da mola. Sabemos que a **força elástica da mola** é obtida através do produto entre a rigidez (k) e a distância, deslocamento (x) da mola. Nesta questão, o segredo é entender que o **deslocamento x da mola** é referente a **inclinação de 30°** ($\pi/6$ rad) da alavanca onde o peso atua na extremidade, portanto sabendo que o perímetro da circunferência é $2\pi R$ e, 2π corresponde a 360° , para 30° o deslocamento x será igual a:

$$x = \frac{\pi}{6} \cdot R = 0,05m$$

$$F_{el} = k \cdot x \Rightarrow k = \frac{F_{el}}{x} \Rightarrow k = 40kN/m$$

Logo, a **alternativa D** está CORRETA e é o gabarito da questão.

35. (CONSULPLAN/CBTU-2014) Em uma estrutura metálica treliçada, atuam no nó as seguintes forças:



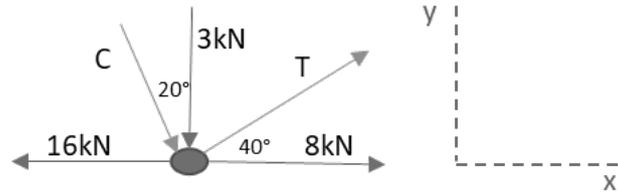
Com base nos dados apresentados, os módulos das forças C e T são, respectivamente, em kN, iguais a

- a) 2,1 e 2,1.
- b) 3,03 e 2,4.
- c) 3,03 e 9,09.
- d) 9,09 e 2,4.

Comentário:

Para resolvermos esta questão devemos basicamente **avaliar um nó de uma treliça**. Neste caso possuímos duas incógnitas e temos duas equações de equilíbrio, portanto é possível solucionarmos. Vamos ao DCL:





Devemos determinar as forças C e T em laranja. Para isso vamos a decomposição das forças inclinadas e a aplicação das equações de equilíbrio. Vejamos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -16k + 8k + C_x + T_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -3k - C_y + T_y = 0 \quad (2)$$

$$C_x = C \cdot \text{sen } 20^\circ \text{ e } T_x = T \cdot \text{cos } 40^\circ \quad (3)$$

$$C_y = C \cdot \text{cos } 20^\circ \text{ e } T_y = T \cdot \text{sen } 40^\circ \quad (4)$$

Substituindo as equações (3) em (1) e (4) em (2) obtemos:

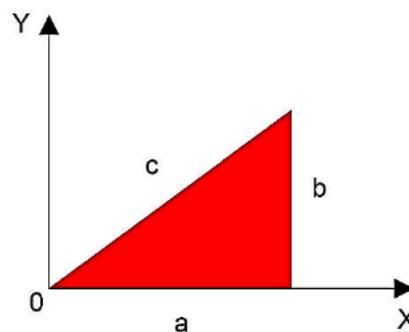
$$-8k + C \cdot \text{sen } 20^\circ + T \cdot \text{cos } 40^\circ = 0 \Rightarrow T = \frac{8k - C \cdot \text{sen } 20^\circ}{\text{cos } 40^\circ}$$

$$-3k - C \cdot \text{cos } 20^\circ + T \cdot \text{sen } 40^\circ = 0 \text{ substituindo } T \text{ temos}$$

$$\left(\frac{8k - C \cdot \text{sen } 20^\circ}{\text{cos } 40^\circ} \right) \cdot \text{sen } 40^\circ = 3k + C \cdot \text{cos } 20^\circ \Rightarrow C = 3,03kN \text{ e } T = 9,09kN$$

Logo, a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.

36. (CEV-UECE/Pref. de Sobral-2018) Um triângulo de lados a, b e c é apresentado no plano cartesiano conforme a figura a seguir.



Considerando que o triângulo seja homogêneo em sua composição e espessura, as coordenadas "XCM" e "YCM" do seu centro de massa são dadas por

a) $X_{CM}=3a; Y_{CM}=3/2b$

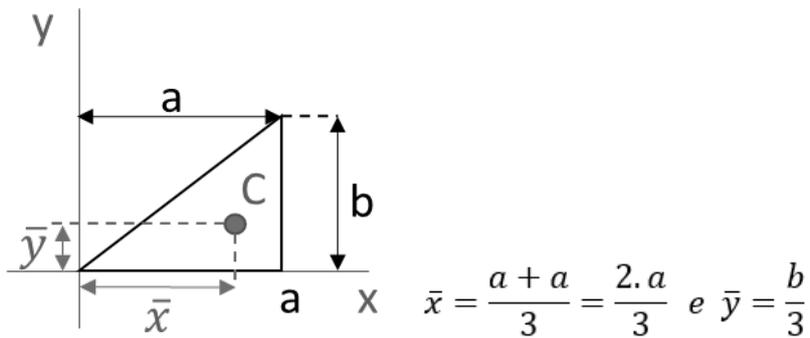


- b) $X_{CM}=2/3a; Y_{CM}=1/3b$
- c) $X_{CM}=3/2a; Y_{CM}=b$
- d) $X_{CM}=1/3a; Y_{CM}=2/3b$

Comentário:

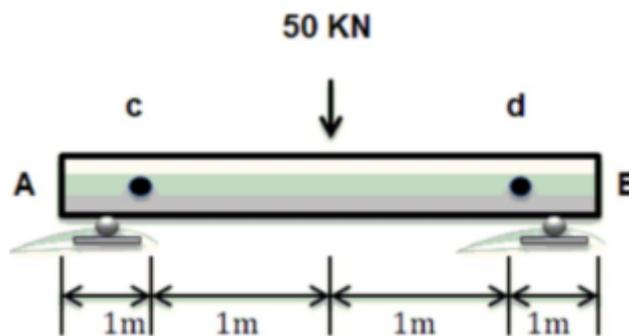
O segredo desta questão está no **posicionamento do triângulo** em **relação aos eixos de referência**. Devemos perceber que o triângulo retângulo está com o seu lado de maior concentração de área a direita e não próxima a origem. Assim o centro de massa em x estará mais distante da origem.

Podemos resolvê-la matematicamente via integral ou via fórmula direta de acordo com as propriedades de figuras planas. Como a intenção é não perdermos tempo vamos resolvê-la diretamente. Vejamos:



Logo, a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.

37. (Instituto Acesso/SEDUC-AM-2018) Em uma viga biapoiada, calculando-se as reações nos apoios, obtém-se o seguinte resultado:



- a) 80KN
- b) 50KN
- c) 25KN
- d) 10KN

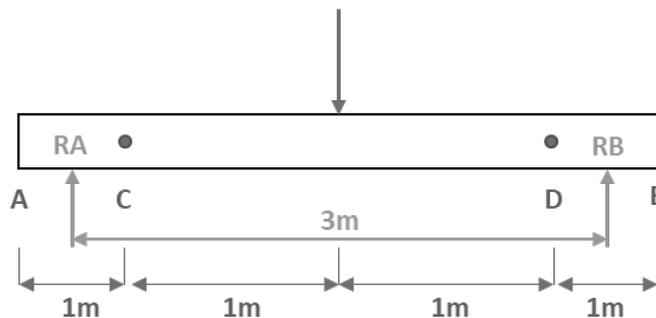


e) 85KN

Comentários

A **alternativa C** está correta e é o gabarito da questão. Note que apenas com a análise da viga seria possível descobrir a resposta, visto que a força de 50 kN está aplicada no **meio da viga** e ela possui dois pontos de apoio igualmente espaçados. Assim, deve-se **dividir o carregamento por dois**.

No entanto, vamos resolver a questão por completo. Iniciemos a resolução com o diagrama de corpo livre:



O somatório dos momentos em relação ao ponto B deve ser igual à zero, para que o sistema fique em equilíbrio.

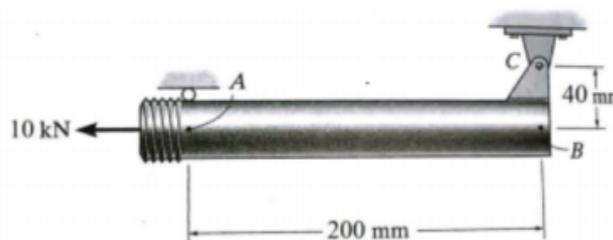
Assim...

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -R_A \cdot 3 + 50 \cdot 1,5 = 0 \rightarrow R_A = 25kN$$

Enfim, o somatório das forças verticais, no eixo y, deve ser igual à zero, para calcular a reação vertical em B. Logo:

$$\sum F = 0 \rightarrow R_A - 50 + R_B = 0 \rightarrow R_B = 25kN$$

38. NUCEPE/PC-PI/2018 Para o tubo da figura abaixo a extremidade rosqueada está sujeita a uma força horizontal de 10 kN. A força cortante no ponto A é:



- (A) 0,5 kN
- (B) -0,5 kN
- (C) 2 kN
- (D) 1 kN
- (E) -1 kN

Comentários

Vamos iniciar com a representação esquemática do diagrama de corpo livre e em seguida aplicaremos os princípios de equilíbrio. Vejamos:



O somatório dos momentos em relação ao ponto A e o somatório das forças horizontais devem ser iguais à zero, para que o sistema esteja em equilíbrio.

Conhecidas as distâncias, notamos que o ponto A está alinhado ao ponto B, a uma distância de 200 mm horizontalmente e 40 mm verticalmente do pino articulado em C. A partir das equações de equilíbrio obtemos:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow C_x - 10 = 0 \rightarrow C_x = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -C_x \cdot 0,04 + C_y \cdot 0,2 = 0 \rightarrow C_y = 2 \text{ kN}$$

Se aplicarmos o método das seções e seccionarmos o tubo no ponto A encontraremos a força cortante no tubo, sendo está igual a reação C_y . Assim, a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.

39. (CEPS UFPA/UNIFESSPA – 2018) Um helicóptero militar com massa M transporta uma carga com massa m para baixo, com aceleração a. Sendo g a aceleração da gravidade no local, a força de empuxo nas hélices do helicóptero vale

- a) $(M+m) \cdot (g-a)$.
- b) $(M-m) \cdot (g-a)$.

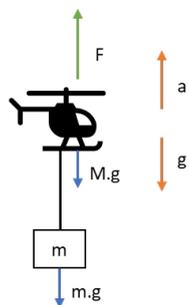


c) $(M+m).(g+a)$.

d) $(M-m).(g+a)$.

e) $(M+m).(g/a)$.

Comentário:



A **alternativa A** está correta e é o gabarito da questão. Questão simples e objetiva que envolve o conhecimento da segunda lei de Newton. Veja o DCL ao lado. Neste caso a sacada é que como o helicóptero está descendo, vamos adotar o sentido positivo para baixo, assim a aceleração da gravidade será positiva, pois o helicóptero está descendo e a aceleração (a) irá ser negativa, pois está impede a queda livre da aeronave. Assim teremos que:

$$\sum F = m \cdot a \Rightarrow P_{\text{helicóptero}} + P_{\text{carga}} - F_{\text{empuxo}} = m_T \cdot a$$

$$F_{\text{empuxo}} = P_{\text{helicóptero}} + P_{\text{carga}} - m_T \cdot a$$

$$m_T = M + m ; P_{\text{helicóptero}} = M \cdot g ; P_{\text{carga}} = m \cdot g$$

$$F_{\text{empuxo}} = (M \cdot g) + (m \cdot g) - (M + m) \cdot a$$

$$F_{\text{empuxo}} = (M + m)g - (M + m) \cdot a = (M + m) \cdot (g - a)$$

Note que com a correta composição do diagrama de corpo livre fica evidente que a força de empuxo da hélice deverá ser igual a soma das massas do helicóptero e da carga multiplicada pela diferença entre a aceleração da gravidade e a aceleração (a).

As **alternativas B e C** estão incorretas por não somarem as massas, pois ambas atuam na mesma direção.

As **alternativas C e E** estão incorretas pois não relacionam corretamente as acelerações envolvidas.

40. (CEPS-UFGA/UNIFESSPA-2018) Dois veículos colidem de modo completamente inelástico (permanecem unidos após a colisão), passando a deslizar juntos. O módulo da velocidade final, V , do conjunto, se um veículo tem 800 kg e velocidade de 50 km/h de oeste para leste, enquanto que o outro possui 500 kg e velocidade igual a 80 km/h de sul para norte, é

a) $(300 \cdot \sqrt{2})/11$ km/h.

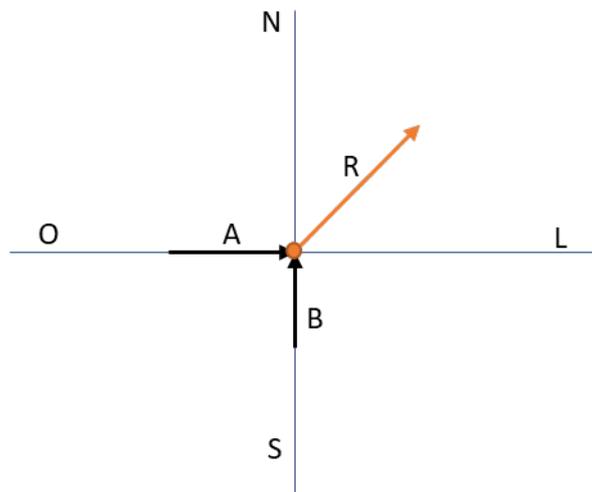


- b) $(400 \cdot \sqrt{2})/13$ km/h.
- c) $(100 \cdot \sqrt{3})/9$ km/h.
- d) $(400 \cdot \sqrt{3})/17$ km/h.
- e) $(200 \cdot \sqrt{5})/7$ km/h.

Comentário:

Para solucionarmos esta questão devemos utilizar os princípios de impacto oblíquo entre dois corpos.

Vejam os diagramas de corpo livre de acordo com o descrito no enunciado:



Note que o veículo A que se move de oeste para leste possui velocidade apenas no eixo (x) enquanto o veículo B apresenta velocidade somente no eixo (y). Logo, não precisamos decompor cada velocidade para encontrar as velocidades em (x e y) após a colisão. Vamos primeiramente determinar a velocidade em (x).

$$\sum m (v_x)_1 = \sum m (v_x)_2$$

$$(m_A)_1 \cdot (v_{Ax})_1 + (m_B)_1 \cdot (v_{Bx})_1 = ((m_A)_1 + (m_B)_1) \cdot (v_x)_2 \Rightarrow 800 \cdot 50 + 500 \cdot 0 = (800 + 500) \cdot (v_x)_2$$

$$(v_x)_2 = \frac{40000}{1300} [km/h]$$

Da mesma maneira podemos calcular a velocidade resultante em (y).

$$(m_A)_1 \cdot (v_{Ay})_1 + (m_B)_1 \cdot (v_{By})_1 = ((m_A)_1 + (m_B)_1) \cdot (v_y)_2$$



$$(v_y)_2 = \frac{40000}{1300} [km/h]$$

Uma vez que o módulo da velocidade é dado por

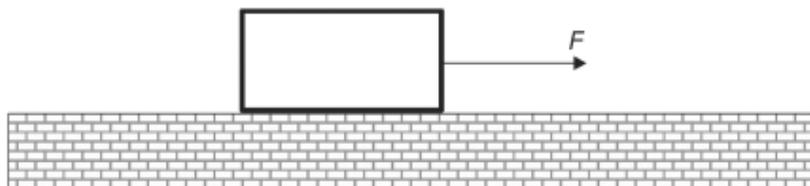
$$V = \sqrt{((v_x)_2)^2 + ((v_y)_2)^2}$$

Obtemos:

$$V = \sqrt{\left(\frac{400}{13}\right)^2 + \left(\frac{400}{13}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{400}{13}\right)^2 \cdot (1 + 1)} = \frac{400}{13} \cdot \sqrt{2} [km/h]$$

Note que apenas com simplificações matemáticas encontrei a resposta. Sempre analise como estão as respostas nas alternativas antes da resolução para evitar cálculos desnecessários. Com isso, temos que a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.

41. (FCC/EMAE-2018) O bloco de massa m da figura abaixo desliza com velocidade constante sobre um plano horizontal, sob a ação de uma força constante F . Considere g a aceleração da gravidade local, μ_e e μ_c os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco e o plano, respectivamente. O valor de F é



- a) $mg\mu_c$.
- b) $mg\mu_e$.
- c) mg .
- d) zero.
- e) $mg(\mu_e - \mu_c)$.

Comentário:



Nesta questão precisamos saber que a força de atrito estático atua sobre um corpo quando este está em repouso enquanto o coeficiente de atrito cinético atuará sempre que o objeto está em movimento sobre uma superfície áspera. Como na questão a caixa está em movimento apenas a força de atrito cinético está atuando no sentido oposto a força constante F . Portanto, para a caixa continuar em movimento a força F deve ser igual a força de atrito cinético, que é dada pela multiplicação entre a força normal e o coeficiente de atrito cinético. Vejamos:

$$F = F_a = F_N \cdot \mu_c = m \cdot g \cdot \mu_c$$

Logo a **alternativa A** está CORRETA e é o gabarito da questão.

42. (FCC/SABESP-2018) Uma peça de massa m está em repouso sobre uma base plana em um local onde a aceleração da gravidade vale g . Se o coeficiente de atrito estático entre a peça e a base é μ , a força necessária para iniciar o movimento de deslizamento da peça sobre a base é

- a) mg/μ
- b) $mg\mu$
- c) $m/g\mu$
- d) $2mg\mu$
- e) $mg\mu/2$

Comentário:

Esta questão aborda exatamente o oposto da questão anterior. Neste caso a força necessária para colocar a peça em repouso em movimento deverá ser, no mínimo igual, a força de atrito estático que é dada pela seguinte equação:

$$F_a = \mu_e \cdot F_N$$

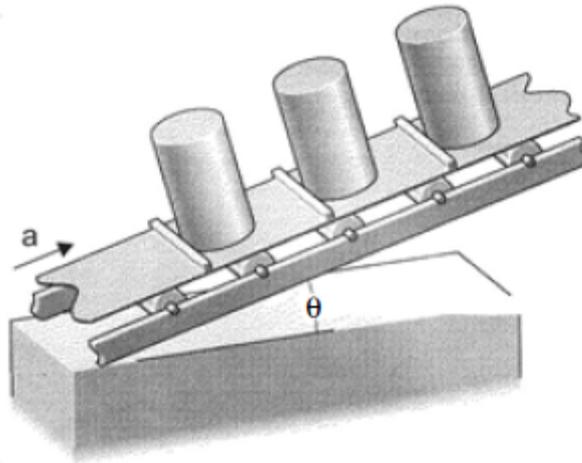
Como F_N é a força normal atuante sobre a peça sendo é igual a sua força peso temos que

$$F = \mu_e \cdot m \cdot g$$

Portanto, a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.

43. (FCC/CLDF-2018) Uma esteira com ressaltos transporta cilindros sólidos para cima em uma rampa de inclinação θ . Os cilindros são homogêneos, com raio r e altura h . A aceleração máxima que a esteira pode ter sem que os cilindros tombem é:





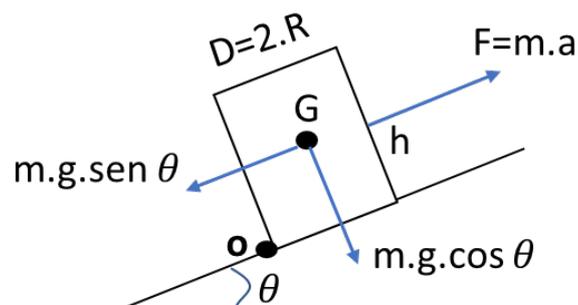
a: aceleração da esteira

(Disponível em: Mecânica para Engenharia – Dinâmica. Meriam e Kraige. ed. LTC – cap. 6. RJ)

- a) $g \left(\frac{2.r}{h} . \cos \theta - \text{sen } \theta \right)$
- b) $g \left(\frac{2.r}{h} . \cos \theta + \text{sen } \theta \right)$
- c) $g \text{ sen } \theta$
- d) $g \text{ sen } \theta \frac{2r}{h}$
- e) $-g \left(\frac{\text{sen } \theta + 2.r}{h} . \cos \theta \right)$

Comentário:

Caro estrategista, esta é uma questão com alto nível de complexidade. Primeiramente vamos montar o diagrama de corpo livre para entendermos todas as forças e dimensões envolvidas.



Para que o cilindro não tombe, o momento resultante, da força gerada pela aceleração em relação ao ponto O (ressalto) deve ser igual ao somatório dos momentos das componentes da força peso do cilindro. Portanto:



$$\sum M_o = m \cdot a \cdot \left(\frac{h}{2}\right)$$

Note que a força gerada pela aceleração está posicionada a uma distância perpendicular ($h/2$) do ponto). Em nosso diagrama de corpo livre as componentes da força peso já estão representada em função da massa, da aceleração da gravidade e do ângulo θ assim temos que:

$$-m \cdot g \cdot \text{sen } \theta \cdot \left(\frac{h}{2}\right) + m \cdot g \cdot \text{cos } \theta \cdot (R) = m \cdot a \cdot \left(\frac{h}{2}\right)$$

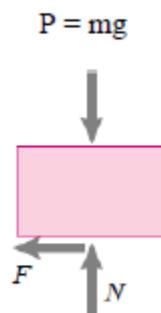
Neste caso a componente normal a superfície gera um momento positivo enquanto a componente $m \cdot g \cdot \text{sen } \theta$ será negativa, pois esta tende a tombar o cilindro.

Assim isolando a aceleração na equação acima obtemos que

$$a = g \left(\frac{2 \cdot R}{h} \cdot \text{cos } \theta - \text{sen } \theta \right)$$

Logo, a **alternativa A** está CORRETA e é o gabarito da questão.

44. (NC-UFPR/UFPR-2018) Sobre a figura abaixo e o seu diagrama de corpo livre, considere as seguintes afirmativas:



1. A força normal (N) sempre será perpendicular à força peso do corpo.
2. Quando a força de atrito for máxima, ela será dada por $F = \mu \cdot N$, apenas para o caso estático. No caso dinâmico, a força de atrito não será mais proporcional à força normal.
3. A força de atrito é sempre paralela à direção do movimento.
4. Os coeficientes de atrito no caso estático e dinâmico são diferentes, sendo o coeficiente de atrito estático menor que o coeficiente de atrito dinâmico.

Assinale a alternativa correta.



- a) Somente a afirmativa 3 é verdadeira.
- b) Somente as afirmativas 2 e 4 são verdadeiras.
- c) Somente as afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.
- d) Somente as afirmativas 1, 3 e 4 são verdadeiras.
- e) As afirmativas 1, 2, 3 e 4 são verdadeiras.

Comentário:

Vamos analisar cada umas das afirmativas.

A **afirmativa 1** está incorreta, pois a força normal age no mesmo sentido da força peso do corpo, logo elas são paralelas.

A **afirmativa 2** está incorreta. A força de atrito máxima é dada quando o corpo ainda não saiu do repouso, através do coeficiente estático, contudo quando o corpo este em movimento a força de atrito dinâmico continua sendo proporcional a força normal atuante.

A **afirmativa 3** está correta. A força de atrito sempre atuará no sentido contrário a direção do movimento, sendo paralela a esta direção.

A **afirmativa 4** está incorreta. Realmente os coeficientes de atrito estático e dinâmico são diferentes entre si, mas o coeficiente de atrito estático é maior que o coeficiente de atrito dinâmico.

Logo a **alternativa A** está CORRETA e é o gabarito da questão.

45. (NC-UFPR/UFPR-2018) Um ciclista pedala à razão de 1 pedalada por segundo. O pedal tem 300 mm de comprimento, a coroa possui diâmetro de 300 mm e o diâmetro do pinhão é de 100 mm. O diâmetro das rodas é de 700 mm. Considerando pi aproximadamente igual a 3, a bicicleta se desloca a uma velocidade de:

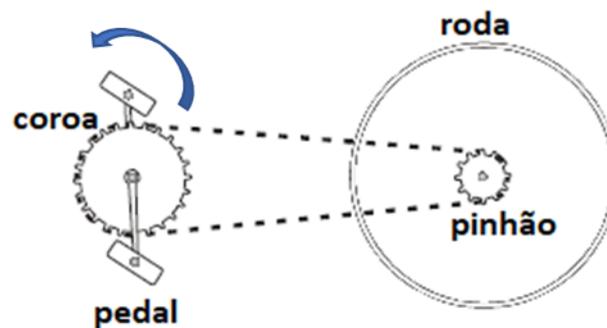
- a) 11,3 km/h.
- b) 15,3 km/h.
- c) 18,5 km/h.
- d) 22,7 km/h.
- e) 27,4 km/h.



Comentário:

Primeiramente devemos encontrar a velocidade angular do pedal da bicicleta em radianos por segundo. Como 1 rotação é igual a 2π rad, 1 pedalada/segundo será igual a 2π rad/s. Considerando $\pi=3$ temos que a velocidade angular nos pedais é de 6 rad/s.

Vejam agora a representação da relação descrita pelo enunciado da questão.



Note que a velocidade angular do pedal será a mesma da coroa, pois ela está presa no pedal. Assim teremos que:

$$\omega_{coroa} \cdot r_{coroa} = \omega_{pinhão} \cdot r_{pinhão} \Rightarrow \omega_{pinhão} = \frac{6 \left[\frac{rad}{s} \right] \cdot 0,15 [m]}{0,05[m]} = 18 \text{ rad/s}$$

A velocidade angular da roda é a mesma do pinhão semelhante ao que acontece entre a coroa e o pedal. Nessa parte utilizamos o princípio de análise de movimento absoluto, visto que a roda está sofrendo rotação e translação, ou seja, movimento plano geral. Assim temos que a velocidade horizontal do centro da roda em linha reta (v_G) pode ser obtida por:

$$v_G = \omega \cdot r_{roda} = 18 \cdot 0,35 = 6,3 \text{ m/s}$$

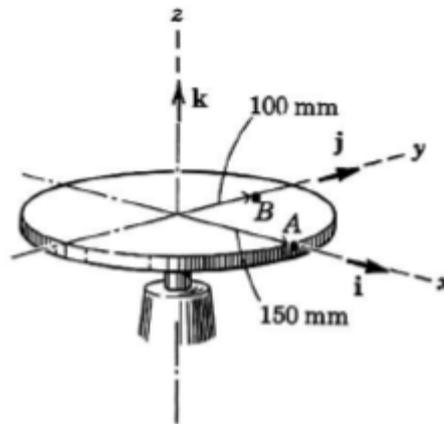
Por fim note que as respostas nas alternativas estão em km/h. Para converter m/s para km/h devemos multiplicar por 3,6 e vice-versa caso deseje o contrário.

$$v_G = 6,3 \left[\frac{m}{s} \right] \cdot 3,6 = 22,68 \left[\frac{km}{h} \right]$$

Portanto, realizando o arredondamento, a **alternativa D** está CORRETA e é o gabarito da questão.

46. (NC-UFPR/UFPR-2018) O disco mostrado na figura acima gira em torno de um eixo vertical. Em determinado instante, a velocidade do ponto B é $V_B=0,4i\text{m/s}$ e a componente tangencial de aceleração do ponto A é $A_{tA}=1,8j\text{m/s}^2$. Para esse instante, a rotação ω do disco está no sentido:

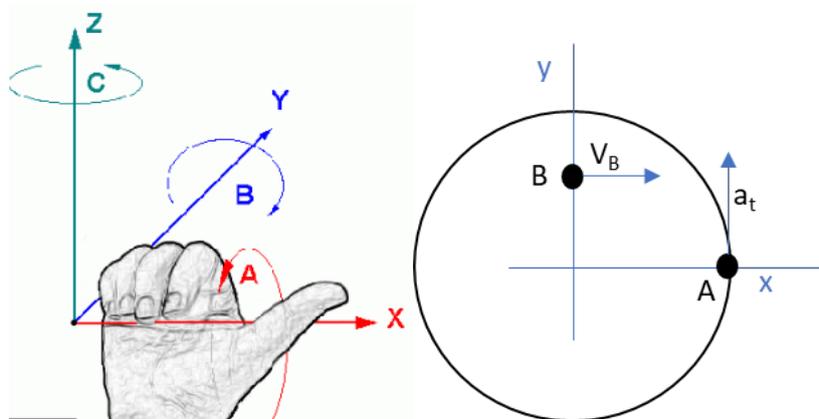




- a) positivo de k , e a aceleração angular α do disco está no sentido positivo de k .
- b) positivo de k , e a aceleração angular α do disco está no sentido negativo de k .
- c) negativo de k , e a aceleração angular α do disco está no sentido positivo de k .
- d) negativo de k , e a aceleração angular α do disco está no sentido negativo de k .
- e) negativo de k , e a aceleração angular α do disco é nula.

Comentário:

Nesta questão devemos utilizar a regra da mão direita, em que os dedos da mão são fechados no sentido da rotação e o polegar aponta para o sentido positivo do eixo Z. Vejamos a representação do disco no plano:

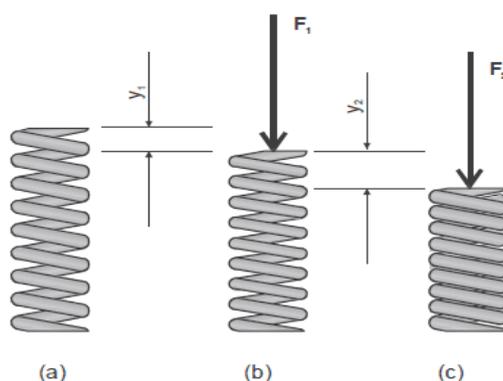


Note que neste caso a rotação está no sentido horário (dado por V_B), e de acordo com a direção indicada pelos vetores unitários i, j e k , pela regra da mão direita o polegar deve apontar para fora da página (direção k), indicando o sentido de rotação anti-horário como positivo. Assim, como o disco gira em torno do eixo Z, V_B girando no sentido negativo (horário) em relação a origem e a aceleração tangencial no sentido positivo (anti-horário). Portanto a rotação do disco

está no sentido negativo de k e a aceleração angular no sentido positivo de k . Logo, a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.

47. (COPERVE-UFSC/UFSC-2016) Assinale a alternativa CORRETA.

As molas são elementos mecânicos utilizados na absorção de energia sob a forma de deformação mecânica elástica. Entre os modelos mais usuais estão as molas helicoidais de compressão, representadas abaixo. Na figura são mostradas três etapas da operação com uma mola de compressão. No instante (a), a mola está em seu comprimento livre, sem carregamento. No instante (b) existe uma pré-carga F_1 , desconhecida, que promove uma deflexão y_1 de 10 mm. No instante (c) é aplicada uma carga F_2 de 630 N, e temos uma deflexão de trabalho y_2 de 11 mm. Assim, qual o valor da carga F_1 ?



- a) 572,7 N
- b) 63 N
- c) 300 N
- d) 682 N
- e) 57,3 N

Comentário:

A **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão. Sabendo-se que a força de uma mola elástica é dada por $F_s = k \cdot s$, onde (k) é a constante de rigidez da mola, podemos determinar (k) pela atuação da força F_2 . Tome cuidado com as deflexões da mola, pois aqui está a pegadinha imposta pela banca. Note que a deflexão (s) no instante (c) será a soma de (y_1 e y_2). Assim teremos que:



$$F_2 = F_s = k \cdot s \Rightarrow 630 = k \cdot 21 \Rightarrow k = 30 \frac{N}{mm}$$

Como a mola é a mesma a constante da mola (k) é igual no momento da pré-carga. Logo, podemos obter o valor de F_1 por:

$$F_1 = F_s = k \cdot s \Rightarrow F_1 = 30 \cdot 10 \Rightarrow F_1 = 300 \text{ N}]$$

Note que nenhuma manipulação de unidades de medidas precisou ser realizada. Sempre fique atento as unidades e a possíveis pegadinhas que possam ser impostas pelo examinador. Quando parecer muito fácil, reveja novamente, pois pode ser que seja uma tentativa de induzi-lo ao erro.

48. (CEV-UECE/Pref. de Sobral - 2018) Uma partícula com massa de 3 kg presa a uma haste de massa desprezível exerce uma trajetória circular de 2 metros de raio. Sabendo que a velocidade angular da partícula é de 3 rad/s, a energia cinética de rotação da partícula é de

a) 54 J.

b) 2 J.

c) 18 J.

d) 4,5 J.

Comentário:

Visto que a velocidade tangencial de uma partícula é dada pela multiplicação da velocidade angular e o raio da trajetória podemos encontrar a energia cinética (T) de rotação da partícula apenas com aplicação de duas equações. Vejamos:

$$v = \omega \cdot r = 3 \cdot 2 = 6 \text{ m/s}$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6^2 = 54 \text{ J}$$

Portanto a **alternativa A** está CORRETA e é o gabarito da questão.

49. (CEV-EUCE/Pref. de Sobral/2018) O eixo do motor a diesel de um grupo gerador gira a uma velocidade de 200 rad/s e fornece um torque de 3,25 kN.m ao alternador. Sabendo que a potência elétrica medida na saída do alternador é de 520 kW, e desprezando as perdas de potência na transmissão do motor para o alternador, a eficiência do alternador é de

a) 85%.



- b) 80%.
- c) 90%.
- d) 75%.

Comentário:

Conforme estudamos na aula 00 de nosso curso a potência de um eixo pode ser determinada pela multiplicação entre o torque (T) em N.m e a velocidade angular (ω) em rad/s. Assim podemos determinar a potência fornecido pelo motor na entrada do alternador. Vejamos:

$$P = T \cdot \omega = 3250 \cdot 200 = 650kW$$

Como estudado a eficiência de uma máquina é obtida através da razão entre a potencia de saída e a potência de entrada. Então para obtê-la em percentual temos que:

$$\varepsilon = \frac{\text{potência de saída}}{\text{potência de entrada}} \cdot 100\% = \frac{520k}{650k} \cdot 100\% = 80\%$$

Portanto a **alternativa B** está CORRETA e é o gabarito da questão.

50. (FEPESE/DEINFRA-SC-2019) Considere um sistema de transmissão com duas polias onde a polia motora possui um diâmetro 100 mm girando a 1000 RPM. Sabendo-se que o diâmetro da polia movida é de 200 mm, a rotação da polia movida é de:

- a) 250 RPM
- b) 320 RPM
- c) 500 RPM
- d) 1000 RPM
- e) 2000 RPM

Comentário:

A partir dos princípios estudados no movimento plano de rotação sabemos que as velocidades angulares entre dois corpos girantes conectados A e B, com raios distintos, pode ser obtida por:

$$\omega_A \cdot r_A = \omega_B \cdot r_B$$

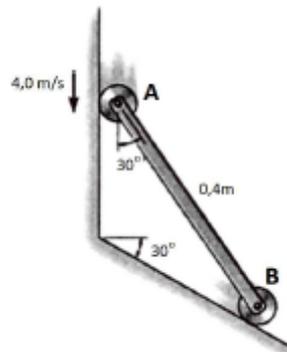


Considerando a polia motora como o corpo A e a movida como B temos que:

$$1000 \cdot 100 = \omega_B \cdot 200 \quad \Rightarrow \quad \omega_B = 500 \text{RPM}$$

Portanto a **alternativa C** está CORRETA e é o gabarito da questão.

51. (FGV/AL-RO-2018) Em um dado instante, o rolete A apresenta a velocidade indicada na figura a seguir. Nesse mesmo instante, a velocidade no rolete B vale

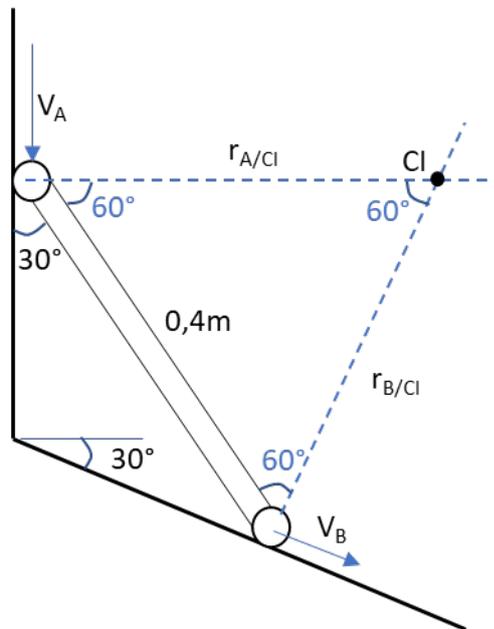


- a) 0,5 m/s.
- b) 1,0 m/s.
- c) 2,0 m/s.
- d) 3,0 m/s.
- e) 4,0 m/s.

Comentário:

Essa questão pode ser solucionada através da aplicação dos conceitos do centro instantâneo de velocidade nula, uma vez que conhecemos as direções das velocidades do ponto A e do ponto B. Vejamos o DCL abaixo.





Note que o triângulo a partir dos ângulos de 30° podemos determinar os ângulos internos do triângulo formado entre o CI e os pontos A e B, uma vez que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , fica evidente que o triângulo encontrado é equilátero com todos os seus lados iguais. Logo:

$$r_{A/CI} = r_{B/CI} = r_{AB}$$

E como visto em aula as velocidades v_A e v_B são obtidas por:

$$v_A = r_{A/CI} \cdot \omega \quad v_B = r_{B/CI} \cdot \omega$$

No enunciado é indicado o valor de v_A assim podemos encontrar a velocidade angular (ω) e posteriormente a velocidade v_B da seguinte maneira:

$$4 \left[\frac{m}{s} \right] = 0,4[m] \cdot \omega \quad \Rightarrow \quad \omega = 10 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

$$v_B = 0,4[m] \cdot 10 \left[\frac{rad}{s} \right] = 4 \left[\frac{m}{s} \right]$$

Portanto a **alternativa E** está CORRETA e é o gabarito da questão.

52. (VUNESP/UFABC-2019) Tanto na mecânica automotiva como na industrial, é de fundamental importância o domínio dos conceitos de Torque, Potência, rotação e suas relações. Decisões de projeto e de manutenção podem exigir tal domínio. Para dimensionamento ou análise de um eixo e suas chavetas, será necessário analisar o valor do torque a ser transmitido. Num dos elementos de máquinas acoplados a um eixo por meio de chaveta, a potência a ser transmitida



será de 1/3 da potência total recebida pelo eixo, que é de 9 kW e sabe-se que o torque transmitido pela chaveta será de 50000 N.mm.

Dado: Potência = P; Torque = T; n = rotação.

$\omega = 2\pi \cdot n$; $P = T \cdot \omega$; Unidades devem ser conhecidas.

Considerando $\pi = 3$, pode-se afirmar que a rotação do eixo é de

- a) 600 rpm
- b) 30 rpm.
- c) 180 rpm.
- d) 1,8 rpm.
- e) 0,6 rpm.

Comentário:

Para resolver esta questão você deve estar atento as unidades de medidas e conversões destas, uma vez que as equações necessárias foram fornecidas no enunciado. A unidade, no SI, de potência é o watt (W) a unidade de torque é (N.m) e a rotação exigida nas alternativas está em rotações por minuto (rpm).

De acordo com o enunciado a potência na chaveta é 1/3 a potência de entrada conhecida e o torque na chaveta também é dado. Assim podemos encontrar a velocidade angular (ω) na chaveta. Vejamos:

$$P_c = \frac{1}{3} \cdot P = \frac{9000}{3} = 3000 [W]$$

$$T_c = 50000 [N \cdot mm] \cdot \left[\frac{1m}{1000mm} \right] = 50 [N \cdot m]$$

$$\omega = \frac{P_c}{T_c} = \frac{3000}{50} = 60 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

Note que a unidade do torque foi convertida para [N.m]. Agora convertendo a unidade de velocidade angular para rotações por minuto [rpm] encontramos a rotação no eixo, uma vez que:

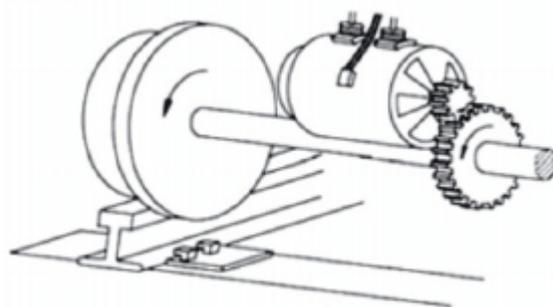
$$1 \text{ rotação} = 2\pi \cdot rad \Rightarrow \omega = 60 \left[\frac{rad}{seg} \right] \cdot \left[\frac{1 \cdot rot}{2\pi \cdot rad} \right] \cdot \left[\frac{60 \text{ segundos}}{1 \text{ minuto}} \right] \Rightarrow \omega = \frac{60 \cdot 1 \cdot 60}{2\pi \cdot 1} \cdot \left[\frac{rot}{min} \right]$$

$$\omega = 600 \text{ rpm}$$



Assim a velocidade de rotação do eixo é de 600 rpm. Logo, a **alternativa A** está CORRETA e é o gabarito da questão.

53. (Instituto AOCP/EUFS-2018) Em uma ponte rolante, o sistema motor de translação é representado pela seguinte figura. A potência de saída do motor é de 50kW e a rotação constante é de 1000 rpm. O raio da engrenagem menor é de 60 mm e da maior é de 100 mm. Diante do exposto, é correto afirmar que a rotação do eixo do motor e do eixo onde está acoplada a roda, em radianos por segundo, é de



- a) $33,3 \pi$ rad/s e 20π rad/s, respectivamente.
- b) 60π rad/s e $33,3 \pi$ rad/s, respectivamente.
- c) 20π rad/s e $33,3 \pi$ rad/s, respectivamente.
- d) 65π rad/s e 20π rad/s, respectivamente.
- e) 21π rad/s e $33,3 \pi$ rad/s, respectivamente.

Comentário:

Para a resolução desta simples questão, precisamos conhecer a relação de transmissão entre duas engrenagens e converter a rotação de RPM para rad/s. A potência do motor foi dada somente para confundir o candidato, pois esta não precisa ser utilizada. Devemos saber também que a rotação no eixo do motor já está fornecida então só basta convertê-la e está é a mesma rotação da engrenagem menor. Além disso, a rotação do eixo onde está acoplada a roda é a mesma rotação da engrenagem maior. Assim temos que:

$$\omega_{mot} = 1000 \text{ rpm} = 1000 \cdot \left[\frac{rot}{min} \right] \cdot \left[\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ seg}} \right] \cdot \left[\frac{2\pi \cdot rad}{1 \text{ rot}} \right] = \frac{2000 \cdot \pi}{60} = 33,33\pi \left[\frac{rad}{seg} \right]$$

Note que analisando as alternativas apenas a letra A possui este valor portanto muito provavelmente seja ela o gabarito da questão. No entanto, para termos certeza, vamos calcular a



velocidade angular na engrenagem maior através da relação de transmissão entre a engrenagem menor de raio (r) e a engrenagem maior de raio (R). Vejamos:

$$\omega_{men} \cdot r = \omega_{maior} \cdot R \quad \Rightarrow \quad \omega_{maior} = \frac{1000 \cdot 60}{100} = 600 \text{ rpm}$$

Convertendo este valor para radianos por segundos, de forma análoga a realizada anteriormente temos que a velocidade angular (rotação) do eixo onde está acoplada a roda é de 20π [rad/s]. Logo, a **alternativa A** está CORRETA e é o gabarito da questão.

54. (CESPE/TJ-CE-2014) Se um caminhão de 16 toneladas se deslocar à velocidade de 2 m/s e colidir com um anteparo elástico cuja constante mola seja $k = 800$ kN/m, então o anteparo poderá, no máximo, sofrer compressão

- a) entre 8 e 13 cm.
- b) entre 13 e 18 cm.
- c) entre 18 e 22 cm.
- d) maior que 22 cm.
- e) menor que 8 cm.

Comentário:

Através do princípio da conservação de energia temos que a energia cinética do caminhão deverá ser igual a energia cinética da mola deslocada após o impacto. Portanto temos que:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

Substituindo as grandezas na equação acima obtemos:

$$\frac{16000 \cdot 2^2}{2} = \frac{1.800000}{2} \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 0,28m \text{ ou } 28cm$$

Portanto o impacto do caminhão com a mola gera uma deformação de 28 cm nesta. Logo, a **alternativa D** está CORRETA e é o gabarito da questão.



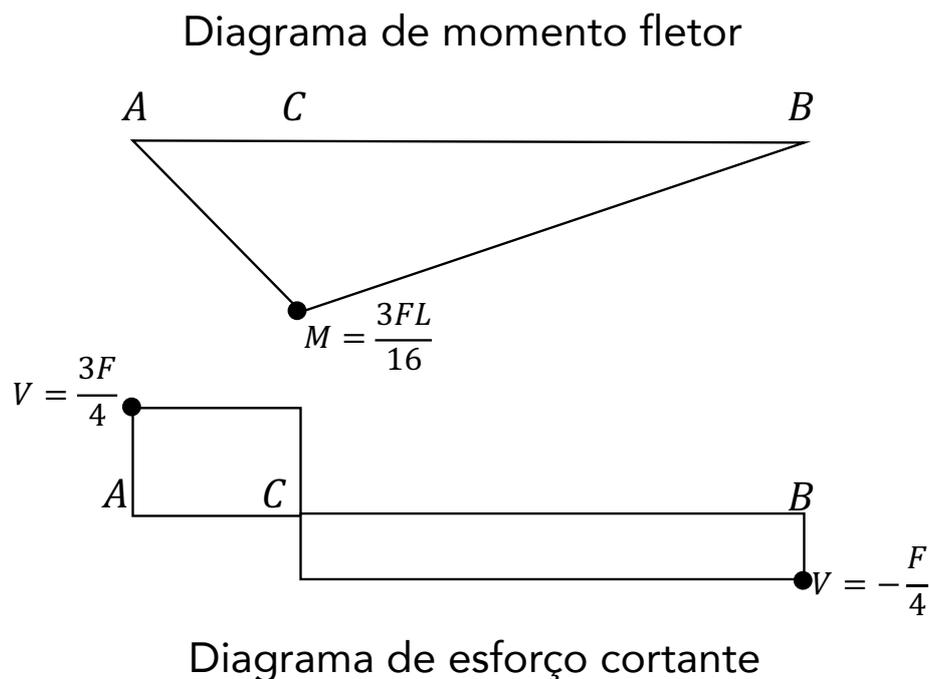
LISTA DE QUESTÕES

CESGRANRIO

1. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) Uma viga biapoiada de comprimento L está sujeita a uma força concentrada F atuante a uma distância $L/4$ de uma de suas extremidades.

O momento fletor máximo e a força cisalhante máxima atuantes na viga são expressos, respectivamente, por

- a) $FL/4$ e $F/4$
- b) $FL/4$ e $3F/4$
- c) $3FL/4$ e $F/4$
- d) $3FL/16$ e $F/4$
- e) $3FL/16$ e $3F/4$



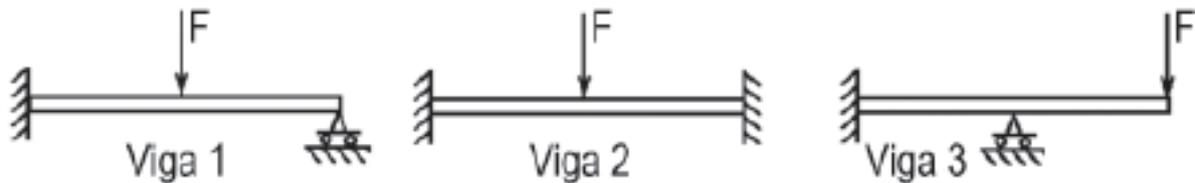
2. (CESGRANRIO/UNIRIO-2016) Uma das importantes etapas do projeto estático de um componente estrutural é a construção do diagrama de corpo livre do componente.



No diagrama de corpo livre de uma viga engastada, sujeita a um carregamento distribuído ao longo de seu comprimento, são representados(as)

- a) o carregamento externo e as reações de apoio
- b) o carregamento externo e a distribuição de momentos fletores
- c) o carregamento externo e a distribuição dos esforços cisalhantes
- d) os carregamentos externos, apenas
- e) as distribuições de esforços cisalhantes e de momentos fletores

3. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Considere as três vigas planas, estaticamente indeterminadas, mostradas na Figura a seguir.



Ao retirar-se uma das restrições de apoio de cada uma dessas vigas, aquela(s) que se tornará(ão) estaticamente determinada(s) é(são), APENAS, a(s) viga(s)

- a) 1
- b) 2
- c) 1 e 3
- d) 1 e 2
- e) 2 e 3

4. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Uma viga engastada em uma de suas extremidades e livre na outra é solicitada por uma força F , concentrada no meio de seu comprimento.

Se a distância entre as extremidades da viga é L , o momento fletor atuante na extremidade engastada é calculado pela expressão

- a) $F.L$
- b) $F.L/2$



- c) $F.L/4$
- d) $F.L2/2$
- e) $F.L2/4$

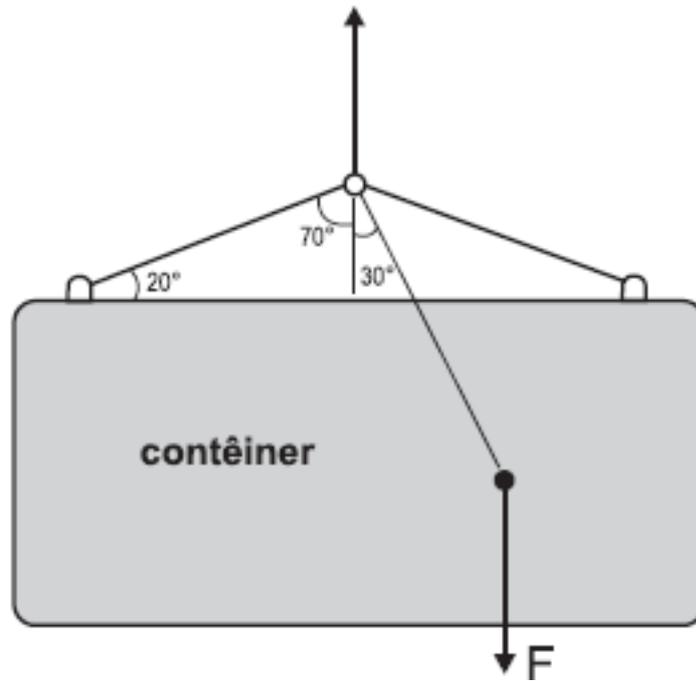
5. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2017) Uma viga de aço e seção retangular igual a 20 mm x 10 mm e comprimento igual a 500 mm falhou ao receber seu carregamento de trabalho. Sabe-se que essa viga teve uma de suas extremidades soldada perpendicularmente à superfície de uma coluna vertical de perfil H, enquanto a outra extremidade permaneceu em balanço. Um técnico, ao analisar as condições de carregamento dessa viga, para identificar as razões de sua falha, precisou calcular o momento fletor ao longo da viga. A viga trabalha sob uma carga uniformemente distribuída de 25 N/mm.

Qual o valor do momento fletor no engastamento, em Nm?

- a) 7.500
- b) 6.250
- c) 5.000
- d) 4.750
- e) 3.125

6. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2014) Um contêiner é suspenso por um sistema de cabos, conforme ilustrado na Figura abaixo.

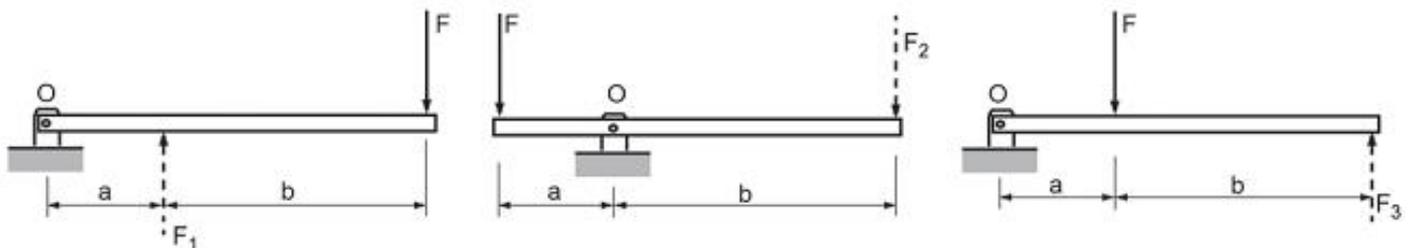




Se a força F resultante do peso do contêiner e da carga em seu interior é posicionada conforme indicado, o ângulo de inclinação em relação à horizontal, quando o sistema estiver em equilíbrio estático, será igual a

- a) 20°
- b) 30°
- c) 45°
- d) 60°
- e) 70°

7. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2014) A Figura abaixo mostra três sistemas de alavanca nos quais a força F é a força aplicada, F_1 , F_2 e F_3 são as forças resistentes e $b > a$.



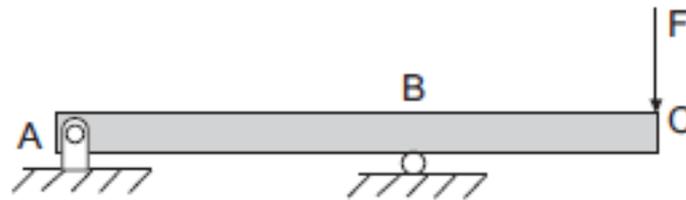
De modo a se determinar a configuração que apresenta a maior força resistente, avaliou-se o equilíbrio de cada alavanca. Essa análise resultou na relação entre F_1 , F_2 e F_3 , expressa por

- a) $F_1 = F_2 = F_3$



- b) $F_1 < F_2 < F_3$
- c) $F_1 > F_2 > F_3$
- d) $F_1 = F_2$ e $F_3 < F_2$
- e) $F_1 = F_2$ e $F_3 > F_2$

8. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2012)



O diagrama que representa a distribuição dos momentos fletores atuantes ao longo da viga biapoiada, mostrada na figura, é

- a)

The diagram shows a horizontal line with points A, B, and C. Below the line, there are two triangular regions shaded gray. The first triangle is between A and B, with its vertex pointing downwards at B. The second triangle is between B and C, with its vertex pointing downwards at B. The maximum moment is at B.
- b)

The diagram shows a horizontal line with points A, B, and C. Below the line, there are two parabolic regions shaded gray. The first parabola is between A and B, with its vertex pointing downwards at B. The second parabola is between B and C, with its vertex pointing downwards at B. The maximum moment is at B.
- c)

The diagram shows a horizontal line with points A, B, and C. Below the line, there are two parabolic regions shaded gray. The first parabola is between A and B, with its vertex pointing downwards at B. The second parabola is between B and C, with its vertex pointing downwards at B. The maximum moment is at B.
- d)

The diagram shows a horizontal line with points A, B, and C. Below the line, there are two shaded regions. The first region is between A and B, with a linear shape that increases from zero at A to a maximum at B. The second region is between B and C, with a constant rectangular shape.
- e)

The diagram shows a horizontal line with points A, B, and C. Below the line, there are two shaded regions. The first region is between A and B, with a parabolic shape that increases from zero at A to a maximum at B. The second region is between B and C, with a constant rectangular shape.



9. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2012)



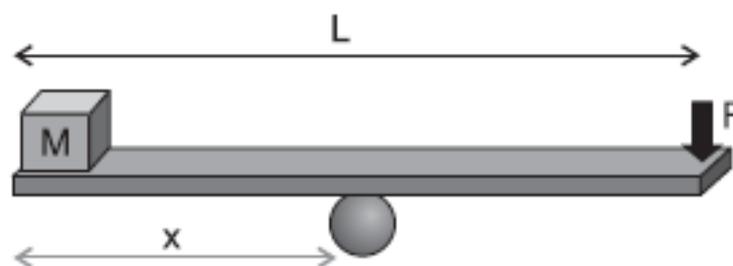
Uma haste homogênea de massa $50,0 \text{ kg}$ é colocada horizontalmente sobre dois suportes, conforme mostra a figura.

O módulo da força exercida pelo suporte (1) na haste, em newtons, é de

Dado: $g = 10,0 \text{ m/s}^2$

- a) 125,0
- b) 187,0
- c) 250,0
- d) 375,0
- e) 500,0

10. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2012)



Uma prancha de madeira de massa desprezível e comprimento $L = 2,8 \text{ m}$ é utilizada para manter em equilíbrio, na horizontal, um cubo pequeno de massa $20,0 \text{ kg}$ ao realizar uma força F de $80,0 \text{ N}$ em uma das extremidades da prancha.

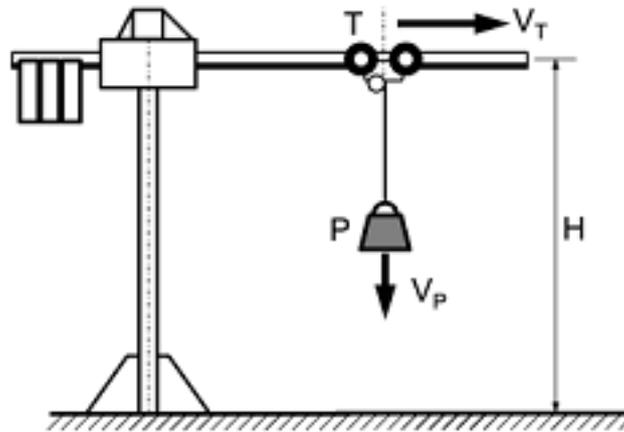
A distância, em metros, entre o ponto de apoio da prancha e a posição onde se encontra o cubo é de

- a) 0,56



- b) 0,80
- c) 1,00
- d) 1,12
- e) 1,40

11. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) A Figura abaixo mostra um guindaste, que consiste em um trilho horizontal indeformável, que está a uma altura H , constante, do solo, por onde se desloca um carro T . Um cabo de aço inextensível sustenta a carga P . O operador do guindaste comanda tanto a velocidade horizontal do carro T quanto a velocidade de descida/subida da carga P .



Sabendo-se que a velocidade V_P da carga P em relação ao trilho e a velocidade absoluta do carro V_T são constantes e respectivamente iguais a $0,4 \text{ m/s}$ e $0,3 \text{ m/s}$, o módulo da velocidade absoluta, em m/s , da carga P , é igual a

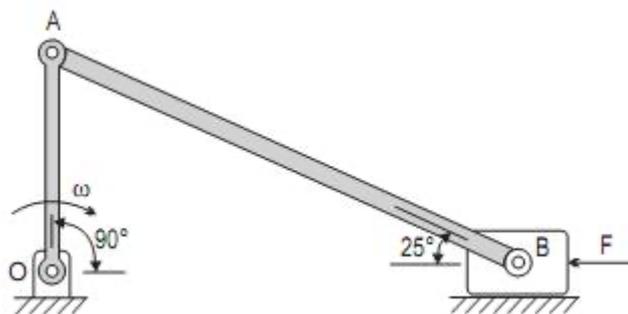
- a) 0,1
- b) 0,5
- c) 0,7
- d) 1,6
- e) 2,5

12. (CESGRANRIO/PETROBRAS-2018) Um veículo de passeio movimenta-se em linha reta a uma velocidade de 36 km/h . Considerando-se que não haja deslizamento entre o pneu e a pista, e que o diâmetro do pneu seja de 50 cm , a rotação da roda, expressa em rad/s , é de



- a) 10
- b) 20
- c) 40
- d) 50
- e) 80

13. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS-2018) O mecanismo mostrado na Figura abaixo é utilizado em um compressor. Ele transforma o movimento de rotação da manivela OA em um movimento de translação do pistão, em B. O movimento da manivela, na fase mostrada, é uniforme, com velocidade de rotação $\omega = 80 \text{ rad/s}$.

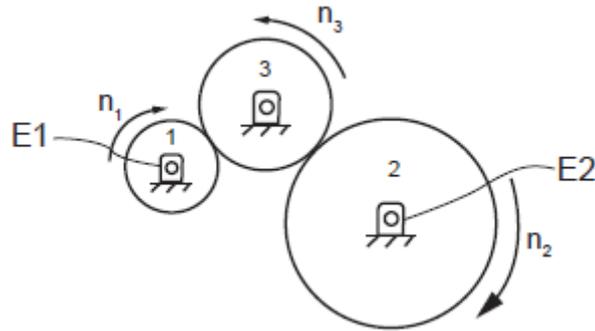


Se o comprimento da manivela é de 20 cm, a velocidade do pistão em B, em m/s, é de

- a) 4,0
- b) 16,0
- c) 128,0
- d) 240,0
- e) 320,0

14. (CESNGRANRIO/PETROBRAS-2018) A transmissão do movimento de rotação entre os eixos E1 e E2 de uma máquina é realizada pelas engrenagens 1, 2 e 3, conforme ilustrado na Figura abaixo.





Os diâmetros das engrenagens são $D_1 = 10 \text{ cm}$, $D_2 = 20 \text{ cm}$ e $D_3 = 15 \text{ cm}$, e a relação de transmissão é tal que $n_2 = 0,5 n_1$.

Se a engrenagem 3 for substituída por outra com 20 cm de diâmetro, a relação de transmissão será

- a) mantida
- b) $n_2 = n_1$
- c) $n_2 = 2 n_1$
- d) $n_2 = 4 n_1$
- e) $n_2 = 8 n_1$

15. (CESGRANRIO/UNIRIO-2016) O sistema de transmissão de uma máquina utiliza um redutor do tipo sem-fim e coroa, com redução de 1:50. O sem-fim é acionado por um motor elétrico de 2.100 W, a uma rotação de 100 RPM (aproximadamente 10,5 rad/s). Desconsiderando-se qualquer perda no sistema, o torque, em kN.m, capaz de ser desenvolvido no eixo de acoplamento da coroa vale

- a) 5
- b) 10
- c) 50
- d) 80
- e) 100

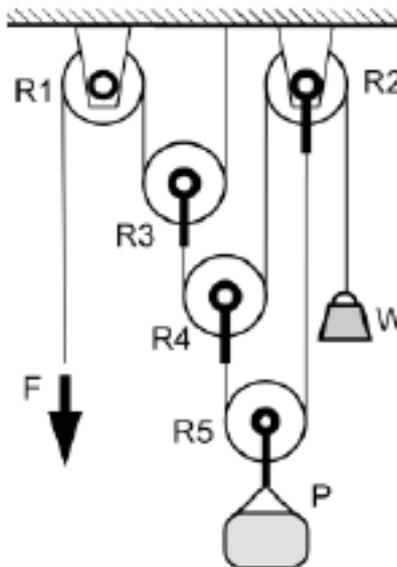
16. (CESGRANRIO/TRNASPETRO-2018) Um veículo percorre uma trajetória retilínea do ponto A ao ponto B acelerado, prossegue com a trajetória retilínea do ponto B ao ponto C com velocidade constante e, finalmente, descreve uma trajetória circular de raio R do ponto C ao ponto



D com velocidade de módulo constante. A segunda Lei de Newton estabelece que esse veículo estará sujeito a uma força aplicada não nula no(s) trecho(s)

- a) A-B, apenas
- b) C-D, apenas
- c) A-B e B-C, apenas
- d) A-B e C-D, apenas
- e) A-B, B-C e C-D

17. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Considere a Figura abaixo:

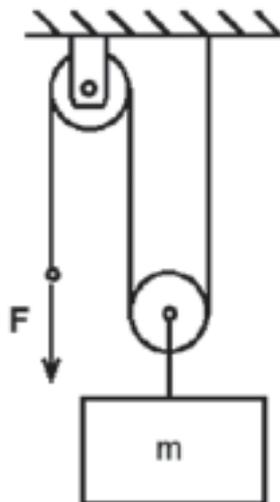


No sistema de roldanas com cordas inextensíveis da Figura, a força F e o contrapeso W que mantêm o sistema em equilíbrio estático são iguais a, respectivamente,

- a) $P/2$ e $P/2$
- b) $P/4$ e $P/2$
- c) $P/8$ e $P/4$
- d) $P/16$ e $P/4$
- e) $P/16$ e $P/8$

18. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Uma carga de massa $m = 200 \text{ kg}$ é içada por meio de um sistema de roldanas, conforme mostrado na Figura abaixo.

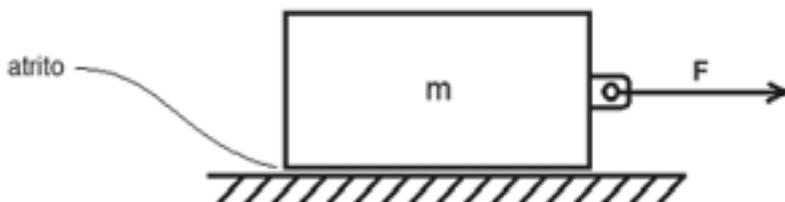




Sabendo-se que a força F aplicada ao cabo vale $1,5 \text{ kN}$, e considerando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, a aceleração da carga, em m/s^2 , será de

- a) $1,0$, orientada para cima
- b) $2,0$, orientada para cima
- c) $4,0$, orientada para baixo
- d) $5,0$, orientada para baixo
- e) $5,0$, orientada para cima

19. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2018) Um engradado com massa de 400 kg é puxado por uma força $F = 2,0 \text{ kN}$, conforme mostrado na Figura abaixo.



Se os coeficientes de atrito estático e cinético do engradado com o piso são, respectivamente, $0,4$ e $0,3$, a aceleração do engradado, em m/s^2 , imposta pela força F , considerando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, é de

- a) $1,0$
- b) $2,0$



- c) 2,5
- d) 4,0
- e) 5,0

20. (CESGRANRIO/LIQUIGÁS-2018) Um técnico teve que resolver um problema envolvendo uma antena parabólica que gira horizontalmente com velocidade angular constante de 80 rpm (rotações por minuto). Para isso, ele precisava saber o valor exato do tempo que essa antena levava para varrer um ângulo de 60 graus.

Ao fazer os cálculos, obteve, como resultado, que esse tempo, em milissegundos, era

- a) 125
- b) 100
- c) 85
- d) 40
- e) 25

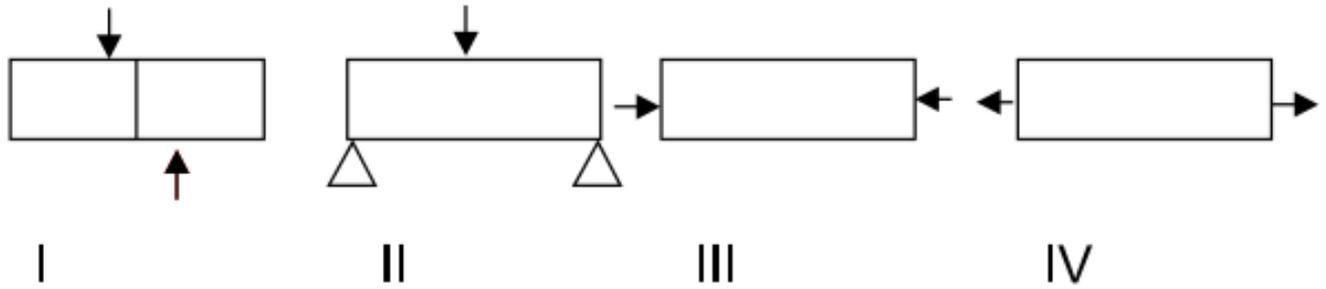
21. (CESGRANRIO/TRANSPETRO-2012) A partir das medidas de velocidade angular e torque no eixo de saída de um motor elétrico, pode-se determinar, diretamente, a

- a) eficiência do motor
- b) potência do motor
- c) tensão de alimentação
- d) consumo do motor elétrico
- e) corrente no sistema elétrico

Outras bancas

22. (VUNESP/Pref. de São Paulo-2018) Observe as figuras.

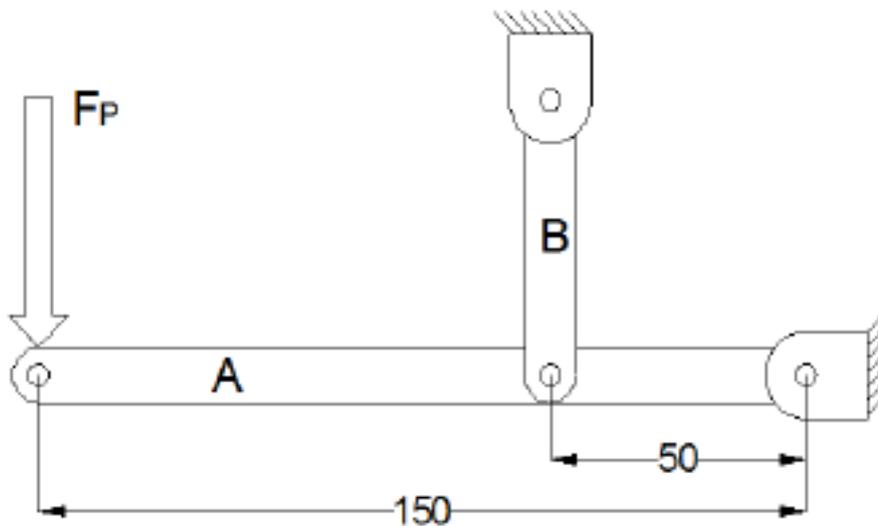




Assinale a alternativa correta.

- a) I Cisalhamento; II Flexão; III Compressão; IV Tração.
- b) I Cisalhamento; II Flexão; III Tração; IV Compressão.
- c) I Tração; II Compressão; III Flexão; IV Cisalhamento.
- D) I Flexão; II Compressão; III Tração; IV Cisalhamento.
- e) I Compressão; II Tração; III Cisalhamento; IV Flexão.

23. (Instituto AOCP/UEFS-2018) A figura a seguir ilustra, de forma esquemática, um suporte para carregamento de cargas em estado de equilíbrio. A Viga A apresenta pontos articulados de fixação por meio de pinos. Considerando uma força F_p de 20 kN aplicada na extremidade da viga A e considerando as dimensões das vigas apresentadas na figura, assinale a alternativa correta.



- a) A viga B estará sujeita a uma força de compressão de 60 kN.
- b) O ponto de fixação da viga A estará sujeito a uma força de 40 kN.
- c) O ponto de fixação da viga A estará sujeito a uma força de 120 kN.



d) A viga B estará sujeita a uma força de compressão de 80 kN.

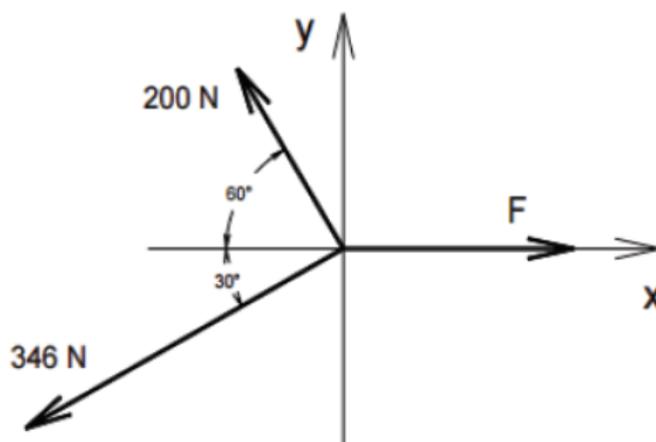
e) Como a viga B possui 2 pontos de travamento, cada ponto estará sob efeito da metade da força recebida pela viga.

24. (Instituto AOCP/UFOB-2018) Um técnico mecânico deve ser capaz de avaliar estruturas e equipamentos quanto à sua resistência mecânica.

Com referência aos conceitos da resistência dos materiais, julgue o item a seguir.

Uma viga apoiada nas extremidades, submetida a uma carga de flexão uniformemente distribuída, possuirá momento fletor máximo no centro da viga e nulo nas extremidades.

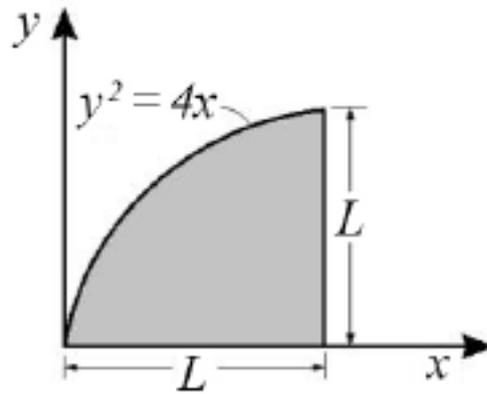
25. (IBFC/SESA-PR - 2016) Analise o sistema de forças apresentado a seguir, e, considerando que o sistema se encontra em equilíbrio, assinale a alternativa que apresente o valor aproximado da força F.



- a) 480 N.
- b) 400 N.
- c) 360 N.
- d) 320 N.

26. (CEBRASPE/IFF-2018)





Na área ilustrada na figura precedente, o momento de inércia em torno do eixo x pode ser calculado pela expressão

a) $I_x = \frac{2.L^{4,5}}{4,5}$

b) $I_x = \frac{L^{4,5}}{10}$

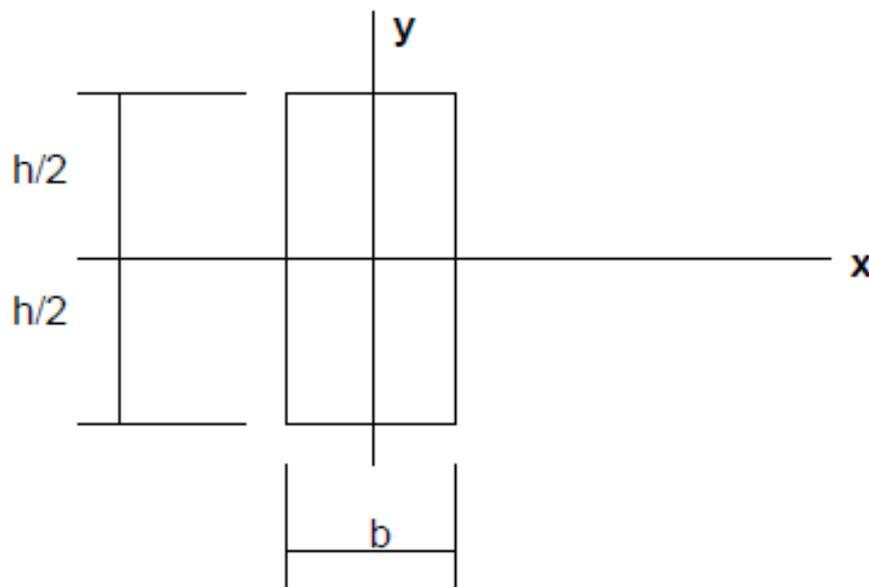
c) $I_x = \frac{L^5}{3} - \frac{L^4}{20}$

d) $I_x = \frac{L^3}{9} - \frac{L^4}{10}$

e) $I_x = \frac{L^4}{3} - \frac{L^5}{20}$

27. (NC UFPR/PCie PR-2007) O momento de inércia da figura abaixo é dado genericamente

por $J_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dS$



Considerando $h = b$, o momento de inércia poderá ser expresso por:

a) $J_x = \frac{h^3}{6}$

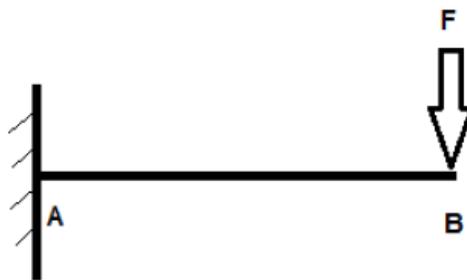
b) $J_x = \frac{b^3h}{2}$

c) $J_x = \frac{h^4}{12}$

d) $J_x = \frac{b^2h^2}{6}$

e) $J_x = bh^3$

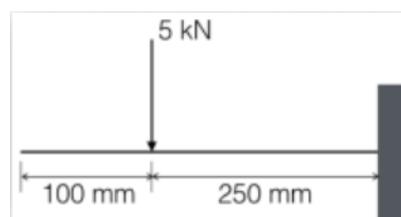
28. (NC-UFPR/ITAIPU-2019) O desenho ao lado representa uma viga carregada:



Com base nos dados apresentados, é correto afirmar que o momento fletor máximo ocorrerá:

- a) no ponto B.
- b) a $\frac{1}{4}$ da distância entre A e B mais próximo do ponto B.
- c) na metade da distância entre A e B.
- d) a $\frac{1}{4}$ da distância entre A e B mais próximo do ponto A.
- e) no ponto A.

29. (COMPERVE/UFRN – 2018) Um segmento de um certo braço robótico é uma barra que pode ser modelada como uma viga engastada submetida à ação de uma força, conforme representado na figura. Nesse caso, o momento fletor na barra é:



- a) 1,25 kNm
- b) 500 Nm



- c) 1 kNm
- d) 1,5 kNm

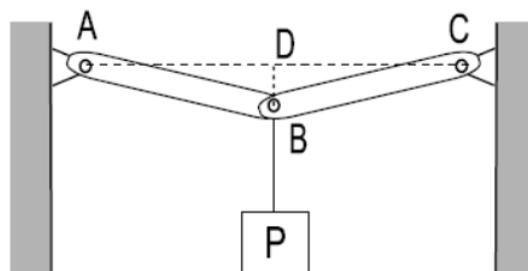
30. (CEPS-UFPA/UNIFESSPA-2018) Considere uma viga horizontal, uniforme, com comprimento de 7 m, peso próprio igual a 1000 N e espessura desprezível. Se a viga encontra-se engastada, e a 3 m do engaste age uma força vertical para baixo de 1500 N, então a reação de momento no engaste vale (em kN.m)

- a) 6,500.
- b) 7,000.
- c) 7,500.
- d) 8,000.
- e) 8,500.

31. (IFSP/IFSP-2016) Uma caixa de massa desconhecida está suspensa por duas cordas que estão sujeitas a ação de duas forças de tração, que medidas por um dinamômetro, resultou em cada uma com o mesmo módulo de 100 N. Essas forças de tração nas cordas formam um ângulo de 120° entre si. Para que esta caixa esteja em equilíbrio, admitindo a aceleração da gravidade como 10 m/s^2 , é preciso que ela tenha uma massa de:

- a) 6 kg
- b) 8 kg
- c) 10 kg
- d) 12 kg

32. (FGV/TJ-RO – 2015) Observe a figura a seguir, na qual um peso P pende do ponto B, no centro das barras sem peso AB e BC de mesmo comprimento.



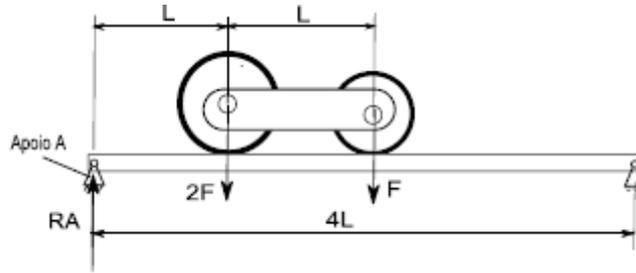
Essas barras são rotuladas no ponto B e têm as outras extremidades presas às rótulas A e C, ambas localizadas na mesma linha horizontal AC. A linha vertical BD é 20 vezes menor que os comprimentos AB e BC ($BD=AB/20$, $AB=BC$). As tensões (forças de tração) nas barras AB e BC para que o peso P seja suportado são expressas por:

- a) $0,05P$;
- b) $0,1P$;



- c) P;
- d) 10P;
- e) 20P.

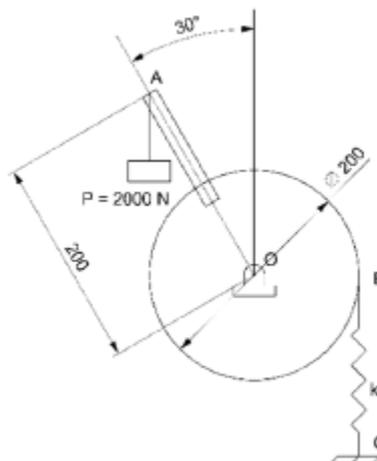
33. (FGV/TJBA-2015) Uma viga bi-apoiada de comprimento $4L$ suporta duas rodas interligadas com distância entre centros L . A roda mais pesada tem peso $2F$ e tem seu centro situado a uma distância L do apoio A. A roda mais leve tem peso F e tem seu centro situado a uma distância $2L$ do apoio A.



A Reação R_A vertical que o apoio A exerce na viga nesse instante é:

- a) $F/2$;
- b) F ;
- c) $3F/2$;
- d) $2F$;
- e) $5F/2$.

34. (FGV/AL-RO-2018) A figura a seguir apresenta um peso de 2000 N ligado a uma alavanca AO que se encontra rigidamente conectada à polia cujo centro é O.



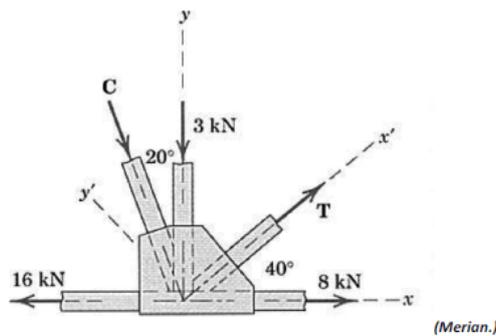
(Dimensões em mm)

Assumindo $\pi = 3$, a constante k da mola BC, para que o sistema esteja em equilíbrio, vale



- a) 10 kN/m
- b) 20 kN/m
- c) 30 kN/m
- d) 40 kN/m
- e) 50 kN/m

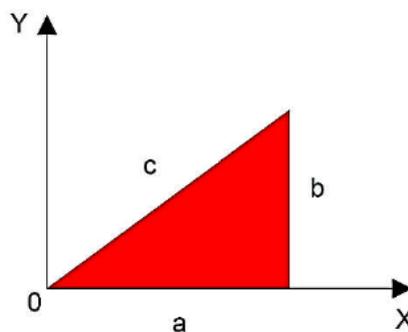
35. (CONSULPLAN/CBTU-2014) Em uma estrutura metálica treliçada, atuam no nó as seguintes forças:



Com base nos dados apresentados, os módulos das forças C e T são, respectivamente, em kN, iguais a

- a) 2,1 e 2,1.
- b) 3,03 e 2,4.
- c) 3,03 e 9,09.
- d) 9,09 e 2,4.

36. (CEV-UECE/Pref. de Sobral-2018) Um triângulo de lados a, b e c é apresentado no plano cartesiano conforme a figura a seguir.



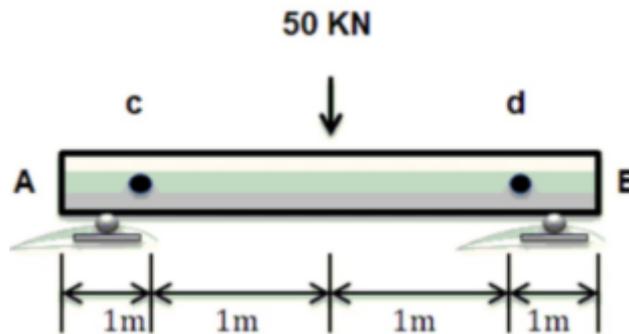
Considerando que o triângulo seja homogêneo em sua composição e espessura, as coordenadas "XCM" e "YCM" do seu centro de massa são dadas por

- a) $X_{CM}=3a; Y_{CM}=3/2b$
- b) $X_{CM}=2/3a; Y_{CM}=1/3b$



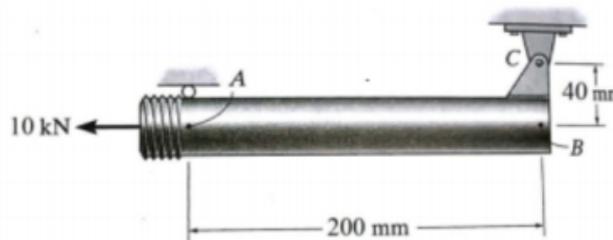
- c) $X_{CM} = 3/2a; Y_{CM} = b$
- d) $X_{CM} = 1/3a; Y_{CM} = 2/3b$

37. (Instituto Acesso/SEDUC-AM-2018) Em uma viga biapoiada, calculando-se as reações nos apoios, obtém-se o seguinte resultado:



- a) 80kN
- b) 50kN
- c) 25kN
- d) 10kN
- e) 85kN

38. NUCEPE/PC-PI/2018 Para o tubo da figura abaixo a extremidade rosqueada está sujeita a uma força horizontal de 10 kN. A força cortante no ponto A é:



- (A) 0,5 kN
- (B) -0,5 kN
- (C) 2 kN
- (D) 1 kN
- (E) -1 kN

39. (CEPS UFPA/UNIFESSPA – 2018) Um helicóptero militar com massa M transporta uma carga com massa m para baixo, com aceleração a . Sendo g a aceleração da gravidade no local, a força de empuxo nas hélices do helicóptero vale

- a) $(M+m).(g-a)$.

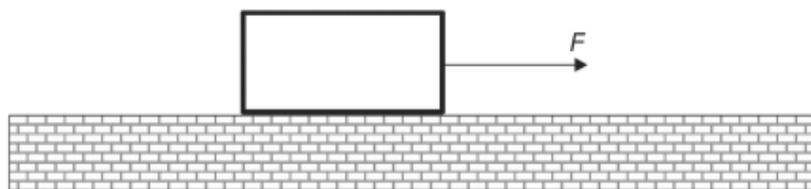


- b) $(M-m).(g-a)$.
- c) $(M+m).(g+a)$.
- d) $(M-m).(g+a)$.
- e) $(M+m).(g/a)$.

40. (CEPS-UFGA/UNIFESSPA-2018) Dois veículos colidem de modo completamente inelástico (permanecem unidos após a colisão), passando a deslizar juntos. O módulo da velocidade final, V , do conjunto, se um veículo tem 800 kg e velocidade de 50 km/h de oeste para leste, enquanto que o outro possui 500 kg e velocidade igual a 80 km/h de sul para norte, é

- a) $(300.\sqrt{2})/11$ km/h.
- b) $(400.\sqrt{2})/13$ km/h.
- c) $(100.\sqrt{3})/9$ km/h.
- d) $(400.\sqrt{3})/17$ km/h.
- e) $(200.\sqrt{5})/7$ km/h.

41. (FCC/EMAE-2018) O bloco de massa m da figura abaixo desliza com velocidade constante sobre um plano horizontal, sob a ação de uma força constante F . Considere g a aceleração da gravidade local, μ_e e μ_c os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco e o plano, respectivamente. O valor de F é



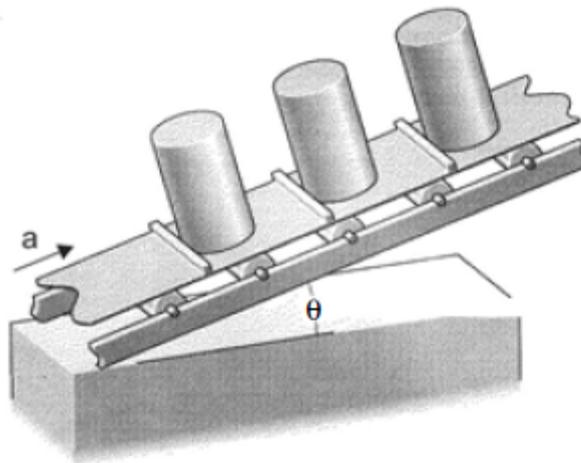
- a) $mg\mu_c$.
- b) $mg\mu_e$.
- c) mg .
- d) zero.
- e) $mg(\mu_e - \mu_c)$.



42. (FCC/SABESP-2018) Uma peça de massa m está em repouso sobre uma base plana em um local onde a aceleração da gravidade vale g . Se o coeficiente de atrito estático entre a peça e a base é μ , a força necessária para iniciar o movimento de deslizamento da peça sobre a base é

- a) mg/μ
- b) $mg\mu$
- c) $m/g\mu$
- d) $2mg\mu$
- e) $mg\mu/2$

43. (FCC/CLDF-2018) Uma esteira com ressaltos transporta cilindros sólidos para cima em uma rampa de inclinação θ . Os cilindros são homogêneos, com raio r e altura h . A aceleração máxima que a esteira pode ter sem que os cilindros tombem é:



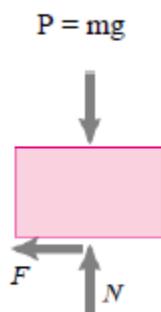
a: aceleração da esteira

(Disponível em: Mecânica para Engenharia – Dinâmica.
Meriam e Kraige. ed. LTC – cap. 6. RJ)

- a) $g \left(\frac{2r}{h} \cdot \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \right)$
- b) $g \left(\frac{2r}{h} \cdot \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \right)$
- c) $g \operatorname{sen} \theta$
- d) $g \operatorname{sen} \theta \frac{2r}{h}$
- e) $-g \left(\frac{\operatorname{sen} \theta + 2r}{h} \cdot \cos \theta \right)$



44. (NC-UFPR/UFPR-2018) Sobre a figura abaixo e o seu diagrama de corpo livre, considere as seguintes afirmativas:



1. A força normal (N) sempre será perpendicular à força peso do corpo.
2. Quando a força de atrito for máxima, ela será dada por $F = \mu \cdot N$, apenas para o caso estático. No caso dinâmico, a força de atrito não será mais proporcional à força normal.
3. A força de atrito é sempre paralela à direção do movimento.
4. Os coeficientes de atrito no caso estático e dinâmico são diferentes, sendo o coeficiente de atrito estático menor que o coeficiente de atrito dinâmico.

Assinale a alternativa correta.

- a) Somente a afirmativa 3 é verdadeira.
- b) Somente as afirmativas 2 e 4 são verdadeiras.
- c) Somente as afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.
- d) Somente as afirmativas 1, 3 e 4 são verdadeiras.
- e) As afirmativas 1, 2, 3 e 4 são verdadeiras.

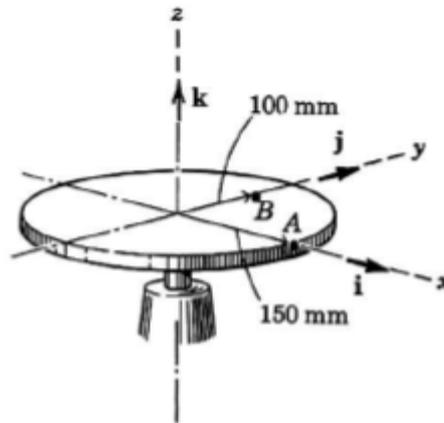
45. (NC-UFPR/UFPR-2018) Um ciclista pedala à razão de 1 pedalada por segundo. O pedal tem 300 mm de comprimento, a coroa possui diâmetro de 300 mm e o diâmetro do pinhão é de 100 mm. O diâmetro das rodas é de 700 mm. Considerando pi aproximadamente igual a 3, a bicicleta se desloca a uma velocidade de:

- a) 11,3 km/h.
- b) 15,3 km/h.
- c) 18,5 km/h.



- d) 22,7 km/h.
- e) 27,4 km/h.

46. (NC-UFPR/UFPR-2018) O disco mostrado na figura acima gira em torno de um eixo vertical. Em determinado instante, a velocidade do ponto B é $V_B = 0,4i \text{ m/s}$ e a componente tangencial de aceleração do ponto A é $A_{tA} = 1,8j \text{ m/s}^2$. Para esse instante, a rotação ω do disco está no sentido:

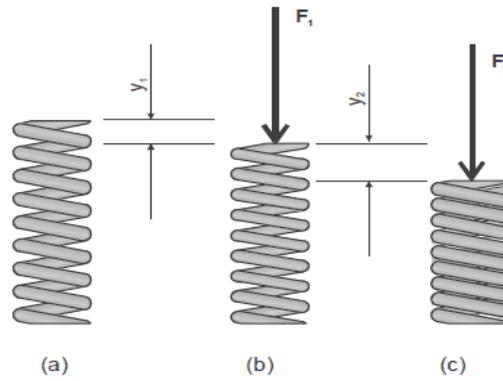


- a) positivo de k, e a aceleração angular α do disco está no sentido positivo de k.
- b) positivo de k, e a aceleração angular α do disco está no sentido negativo de k.
- c) negativo de k, e a aceleração angular α do disco está no sentido positivo de k.
- d) negativo de k, e a aceleração angular α do disco está no sentido negativo de k.
- e) negativo de k, e a aceleração angular α do disco é nula.

47. (COPERVE-UFSC/UFSC-2016) Assinale a alternativa CORRETA.

As molas são elementos mecânicos utilizados na absorção de energia sob a forma de deformação mecânica elástica. Entre os modelos mais usuais estão as molas helicoidais de compressão, representadas abaixo. Na figura são mostradas três etapas da operação com uma mola de compressão. No instante (a), a mola está em seu comprimento livre, sem carregamento. No instante (b) existe uma pré-carga F_1 , desconhecida, que promove uma deflexão y_1 de 10 mm. No instante (c) é aplicada uma carga F_2 de 630 N, e temos uma deflexão de trabalho y_2 de 11 mm. Assim, qual o valor da carga F_1 ?





- a) 572,7 N
- b) 63 N
- c) 300 N
- d) 682 N
- e) 57,3 N

48. (CEV-UECE/Pref. de Sobral - 2018) Uma partícula com massa de 3 kg presa a uma haste de massa desprezível exerce uma trajetória circular de 2 metros de raio. Sabendo que a velocidade angular da partícula é de 3 rad/s, a energia cinética de rotação da partícula é de

- a) 54 J.
- b) 2 J.
- c) 18 J.
- d) 4,5 J.

49. (CEV-EUCE/Pref. de Sobral/2018) O eixo do motor a diesel de um grupo gerador gira a uma velocidade de 200 rad/s e fornece um torque de 3,25 kN.m ao alternador. Sabendo que a potência elétrica medida na saída do alternador é de 520 kW, e desprezando as perdas de potência na transmissão do motor para o alternador, a eficiência do alternador é de

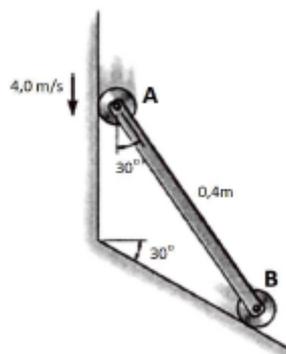
- a) 85%.
- b) 80%.
- c) 90%.
- d) 75%.



50. (FEPESE/DEINFRA-SC-2019) Considere um sistema de transmissão com duas polias onde a polia motora possui um diâmetro 100 mm girando a 1000 RPM. Sabendo-se que o diâmetro da polia movida é de 200 mm, a rotação da polia movida é de:

- a) 250 RPM
- b) 320 RPM
- c) 500 RPM
- d) 1000 RPM
- e) 2000 RPM

51. (FGV/AL-RO-2018) Em um dado instante, o rolete A apresenta a velocidade indicada na figura a seguir. Nesse mesmo instante, a velocidade no rolete B vale



- a) 0,5 m/s.
- b) 1,0 m/s.
- c) 2,0 m/s.
- d) 3,0 m/s.
- e) 4,0 m/s.

52. (VUNESP/UFABC-2019) Tanto na mecânica automotiva como na industrial, é de fundamental importância o domínio dos conceitos de Torque, Potência, rotação e suas relações. Decisões de projeto e de manutenção podem exigir tal domínio. Para dimensionamento ou análise de um eixo e suas chavetas, será necessário analisar o valor do torque a ser transmitido. Num dos elementos de máquinas acoplados a um eixo por meio de chaveta, a potência a ser transmitida será de 1/3 da potência total recebida pelo eixo, que é de 9 kW e sabe-se que o torque transmitido pela chaveta será de 50000 N.mm.



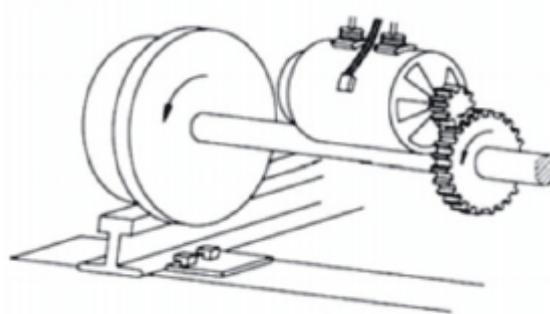
Dado: Potência = P; Torque = T; n = rotação.

$\omega = 2\pi \cdot n$; $P = T \cdot \omega$; Unidades devem ser conhecidas.

Considerando $\pi = 3$, pode-se afirmar que a rotação do eixo é de

- a) 600 rpm
- b) 30 rpm.
- c) 180 rpm.
- d) 1,8 rpm.
- e) 0,6 rpm.

53. (Instituto AOCP/EUFS-2018) Em uma ponte rolante, o sistema motor de translação é representado pela seguinte figura. A potência de saída do motor é de 50kW e a rotação constante é de 1000 rpm. O raio da engrenagem menor é de 60 mm e da maior é de 100 mm. Diante do exposto, é correto afirmar que a rotação do eixo do motor e do eixo onde está acoplada a roda, em radianos por segundo, é de



- a) $33,3 \pi$ rad/s e 20π rad/s, respectivamente.
- b) 60π rad/s e $33,3 \pi$ rad/s, respectivamente.
- c) 20π rad/s e $33,3 \pi$ rad/s, respectivamente.
- d) 65π rad/s e 20π rad/s, respectivamente.
- e) 21π rad/s e $33,3 \pi$ rad/s, respectivamente.

54. (CESPE/TJ-CE-2014) Se um caminhão de 16 toneladas se deslocar à velocidade de 2 m/s e colidir com um anteparo elástico cuja constante mola seja $k = 800$ kN/m, então o anteparo poderá, no máximo, sofrer compressão



- a) entre 8 e 13 cm.
- b) entre 13 e 18 cm.
- c) entre 18 e 22 cm.
- d) maior que 22 cm.
- e) menor que 8 cm.

GABARITO

- | | | |
|-------|-------------|-------|
| 1. E | 20. A | 39. A |
| 2. A | 21. B | 40. B |
| 3. C | 22. A | 41. A |
| 4. B | 23. B | 42. B |
| 5. E | 24. CORRETA | 43. A |
| 6. B | 25. B | 44. A |
| 7. C | 26. E | 45. D |
| 8. A | 27. C | 46. C |
| 9. A | 28. E | 47. C |
| 10. B | 29. A | 48. A |
| 11. B | 30. D | 49. B |
| 12. C | 31. C | 50. C |
| 13. B | 32. D | 51. E |
| 14. A | 33. D | 52. A |
| 15. B | 34. D | 53. A |
| 16. D | 35. C | 54. D |
| 17. C | 36. B | |
| 18. E | 37. C | |
| 19. B | 38. C | |



RESUMO

Para lhe ajudar, preparei um apanhado com as **principais fórmulas** abordadas nesta aula. É muito importante que você tenha conhecimento de **todas** elas!

Estática

TEMA	FÓRMULA
Momento	$M = F \cdot d$
Equações de equilíbrio	$\sum F = 0 \text{ e } \sum M = 0$
Treliça estável	$b \geq 2 \cdot n - 3$



<p>Centro de massa</p>	$\bar{X} = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum m} \quad \bar{Y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m} \quad \bar{Z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m}$ $\bar{X} = \frac{m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + m_3\bar{x}_3 \dots}{(m_1 + m_2 + m_3 \dots)}$ $\bar{Y} = \frac{m_1\bar{y}_1 + m_2\bar{y}_2 + m_3\bar{y}_3 \dots}{(m_1 + m_2 + m_3 \dots)}$
<p>Centróide</p>	$\bar{x} = \frac{\int x \cdot dA}{A} \rightarrow \bar{X} = \frac{\sum \bar{x} \cdot A}{\sum A}$ $\bar{y} = \frac{\int y \cdot dA}{A} \rightarrow \bar{Y} = \frac{\sum \bar{y} \cdot A}{\sum A}$
<p>Momento de Inércia de um retângulo</p>	$I_x = \frac{1}{3}bh^3; \quad I_y = \frac{1}{3}b^3h$
<p>Momento de inércia de um círculo</p>	$I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$
<p>Momento de inércia de um triângulo</p>	$I_x = \frac{1}{12}bh^3$



Teorema dos eixos paralelos

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2; \quad I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2;$$

$$J_o = \bar{J}_c + Ad^2$$

Dinâmica

Tema	Fórmula
Segunda lei de Newton	$F = m \cdot a$
Peso aparente	$W = m \cdot g$
Movimento Retilíneo	$\Delta s = s - s_0$ $v_{méd} = \frac{\Delta s}{\Delta t}; \quad v = \frac{ds}{dt}$ $a_{méd} = \frac{\Delta v}{\Delta t}; \quad a = \frac{dv}{dt}$ $v \cdot dv = a \cdot ds$
Movimento retilíneo com aceleração constante	$v = v_0 + a \cdot t$ $s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ $v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (s - s_0)$
Movimento Curvilíneo Coordenadas Retangulares	$\Delta r = r - r_0; \quad r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $v = \frac{dr}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ $a = \frac{dv}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$
Movimento de um projétil	$(+\uparrow) v_y = (v_0)_y + a_g \cdot t$ $(+\uparrow) y = y_0 + (v_0)_y \cdot t + \frac{1}{2} a_g \cdot t^2$ $(+\uparrow) v_y^2 = (v_0)_y^2 + 2 \cdot a_g \cdot (y - y_0)$ $(+\rightarrow) x = x_0 + (v_0)_x \cdot t$



<p>Movimento curvilíneo coordenadas Tangencial e normal</p>	$\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{e}_t$ $\mathbf{a} = a_t \cdot \mathbf{e}_t + a_n \cdot \mathbf{e}_n$ $a_t = \dot{v} \quad \text{ou} \quad a_t ds = v dv$ $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$
<p>Movimento Circular</p>	$v = r\dot{\theta}$ $a_n = \frac{v^2}{r} = r \cdot \dot{\theta}^2$ $a_t = \dot{v} = r \cdot \ddot{\theta}$
<p>Movimento relativo (eixos de translação)</p>	$r_B = r_A + r_{B/A}$ $v_B = v_A + v_{B/A}$ $a_B = a_A + a_{\frac{B}{A}}$
<p>Força de atrito</p>	$F_a = \mu \cdot F_N$
<p>Força da mola</p>	$F_s = k \cdot s; \quad e \quad s = l - l_0$
<p>Trabalho e Energia</p>	$dU = F \cdot dr$ $U_{1-2} = -W \cdot \Delta y$ $U_{1-2} = F_c \cos \theta (s_2 - s_1)$ $U_{1-2} = -\left(\frac{1}{2}k \cdot s_2^2 - \frac{1}{2}k s_1^2\right)$ <p>Energia cinética $T = \frac{1}{2}mv^2$</p> $\sum T_1 + \sum U_{1-2} = \sum T_2$
<p>Potência e Eficiência</p>	$P = F \cdot v$ $\varepsilon = \frac{\text{Potência de saída}}{\text{potência de entrada}}$ $\varepsilon = \frac{\text{energia de saída}}{\text{energia de entrada}}$
<p>Conservação de energia</p>	$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$
<p>Impulso e quantidade de movimento</p>	$mv_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F \cdot dt = mv_2$



Impacto	$m_p \cdot v_p + m_b v_b = v_f (m_b + m_p)$
Rotação em torno de um eixo	$\omega = \frac{d\theta}{dt}; \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}; \quad \alpha d\theta = \omega d\omega$ $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$ $\alpha_t = \alpha \cdot r$ $\alpha_n = \omega^2 \cdot r$ $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \cdot \mathbf{r}$
Corpos girantes em contato	$\omega_B r_B = \omega_C r_C \quad \Rightarrow \quad \omega_B = \omega_C \left(\frac{r_C}{r_B} \right)$
Movimento plano geral (velocidade)	$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$ $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\frac{B}{A}}$
Centro instantâneo de velocidade nula	<p>Ponto de referência único que possui velocidade nula instantaneamente. Esse ponto está situado no eixo instantâneo de velocidade nula. O centro instantâneo de velocidade nula não é recomendado para a determinação da aceleração, uma vez que ele não apresenta aceleração nula.</p>
Movimento relativo (aceleração)	$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{\frac{B}{A}} - \omega^2 \cdot \mathbf{r}_{\frac{B}{A}}$
Cinética do movimento plano	$I = I_G + md^2$ $I = m \cdot k^2$ $\sum M_G = I_G \cdot \alpha$ $\sum F_x = m \cdot (a_G)_x; \text{ e } \sum F_y = m \cdot (a_G)_y$ $T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_G^2$ $T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_G^2 + \frac{1}{2} \cdot I_G \cdot \omega^2$



ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE: PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.



1 Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.



2 Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).



3 Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).



4 Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).



5 Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).



6 Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).



7 Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.



8 O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.



Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.