

Aula 00 - Profº Alex Lira

*Passo Estratégico de Matemática p/
PM-SP (Oficial) - Pós-Edital*

Autor:
Alex Lira, Allan Maux Santana

26 de Abril de 2020

GEOMETRIA

Sumário

Considerações Iniciais	2
Análise Estatística	3
O que é mais cobrado dentro do assunto?	3
Roteiro de revisão e pontos do assunto que merecem destaque	4
1. Geometria Plana.....	4
2. Geometria Espacial.....	30
Aposta estratégica	39
Questões estratégicas	40
Considerações Finais	49
Lista de Questões Estratégicas	50
Gabarito	53



CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Olá, você!

É muito bom estar contigo para darmos continuidade à nossa revisão completa, em uma preparação estratégica rumo à sua aprovação!

Nesta aula, revisaremos a **Geometria**, que é uma área da matemática que estuda as formas geométricas desde comprimento, área e volume. O vocábulo geometria corresponde à união dos termos “geo” (terra) e “metron” (medir), ou seja, a “medida de terra”.

Dividiremos o estudo da Geometria em duas categorias: Plana e Espacial.

Enquanto a **geometria plana** ou euclidiana reúne os estudos sobre as figuras planas, ou seja, as que não apresentam volume, a **geometria espacial** estuda as figuras geométricas que possuem volume, ou seja, possuem mais uma dimensão.

Muitos concursos não cobram a Geometria Espacial, somente a Plana, então fique atento ao seu edital.

Focaremos no que é mais importante do ponto de vista da cobrança do tema em provas de concursos públicos. Muitas bancas costumam exigir este assunto em seus certames sob o chamado **Raciocínio Geométrico**, abrangendo o conhecimento das figuras planas e espaciais aliado à estratégia para soluções de problemas aritméticos.

Espero que, por meio desta aula, você tenha as informações mais preciosas – e de forma objetiva – sobre o assunto abordado.

Em caso de dúvidas, não se esqueçam de acessar o nosso fórum de dúvidas, aguardo você lá!

Agora vamos ao que interessa. Bons estudos!



ANÁLISE ESTATÍSTICA

Primeiramente, convém destacar os percentuais de incidência nos últimos anos do assunto desta aula em relação ao volume de questões de todos os temas analisados na respectiva matéria – quanto maior o percentual de cobrança de um dado assunto, maior sua importância:

Assunto	% de cobrança
	FGV
Geometria	6,76%

Veja que o tópico possui um grau de incidência de **6,76%** nas questões colhidas da sua banca, possuindo importância **alta**.

O que é mais cobrado dentro do assunto?

Considerando os tópicos que compõem o nosso assunto, possuímos a seguinte distribuição percentual:

Assunto	% de cobrança
	FGV
Geometria Plana	80,00%
Geometria Analítica	20,00%
Geometria Espacial	0,00%



ROTEIRO DE REVISÃO E PONTOS DO ASSUNTO QUE MERECEM DESTAQUE

A ideia desta seção é apresentar um roteiro para que você realize uma revisão completa do assunto e, ao mesmo tempo, destacar aspectos do conteúdo que merecem atenção.

1. Geometria Plana

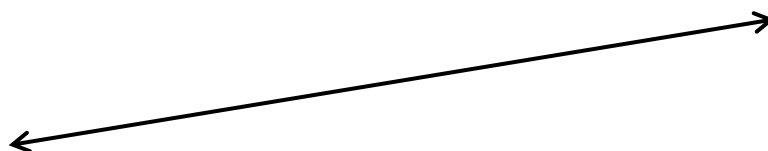
A **geometria plana** é a parte da matemática que estuda as figuras que **não possuem volume**, pois as que possuem volume fazem parte da **geometria espacial**.

1.1. Ponto

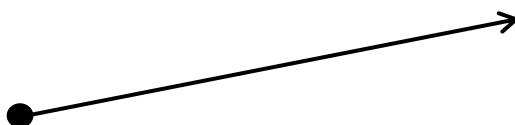
O conceito de **ponto** é um conceito primitivo, pois **não existe uma definição aceita** de ponto, temos nesse caso que aceitar sua existência e indicaremos um ponto por uma letra maiúscula do alfabeto (A, B, C, P, ...).

1.2. Reta, Semirreta e Segmento de Reta

Podemos definir uma **reta** como sendo um **número infinito de pontos em sequência**. É possível perceber que sobre um ponto passa um número infinito de retas, basta mudar a inclinação da reta, porém sobre dois pontos distintos passa apenas uma reta distinta, a qual passaremos a chamar por uma letra minúscula do alfabeto (s, t, q, r, ...). Assim, a reta representa a **menor distância entre quaisquer dois pontos pertencentes a ela**.



Além disso, chama-se de **semirreta** aquela que **começa em um ponto qualquer de uma reta e não tem fim**.



Já o **segmento de reta** é aquele que **começa em um ponto qualquer da reta e termina em outro ponto** dessa mesma reta.



Perceba que quando a reta inicia em um ponto, usamos um círculo para simbolizá-lo. Já quando algum lado da reta não termina em um ponto, indicamos com uma seta.



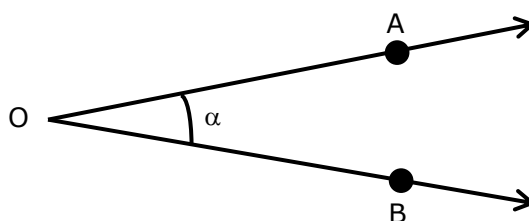
1.3. Plano

O **plano** será definido por **três pontos não-colineares** (que não estão na mesma reta). Todas as retas que passam por dois desses pontos que definem o plano estão contidas nele. Denominaremos o plano por uma letra grega minúscula qualquer (α , β , γ , ...).

Pense em uma folha de papel. Com quaisquer três pontos que você desenhar nela, você terá o plano que passa por elas, que é a própria folha. Se mexer qualquer um dos três pontos para fora do papel, ou seja, acima ou abaixo da folha, estabelecerá um outro plano.

1.4. Ângulos

Ângulo é o nome que se dá à **abertura formada por duas semirretas que partem de um mesmo ponto**.



Em que:

- A medida $\widehat{AOB}$ corresponde a α .
- As medidas OA e OB são os lados do ângulo;
- O é o **vértice** do ângulo.

Os ângulos podem ser medidos em **graus** ($^\circ$) ou **radianos** (rad). A relação entre essas unidades de medida é a seguinte: **$180^\circ = \pi \text{ rad}$** .

Por exemplo, digamos que estamos diante de um ângulo de 60° . Para obtê-lo em radianos, podemos usar uma **regra de três simples**:

$$\begin{array}{lcl} x \text{ rad} & \text{-----} & 60^\circ \\ \pi \text{ rad} & \text{-----} & 180^\circ \end{array}$$

Multiplicando na diagonal, temos:

$$180 \cdot x = 60 \cdot \pi$$

$$x = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

Mais adiante, vamos ver com mais detalhes essa conversão de um ângulo de graus para radianos e vice-versa.



1.4.1. Ângulos - Classificação quanto à medida

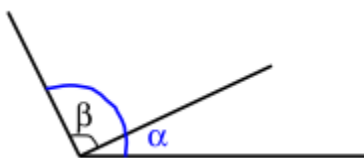
Em relação à sua **medida**, os ângulos podem ser assim classificados:

- **Nulo:** O ângulo nulo é aquele que mede 0° (ou 0 radianos).
- **Agudo:** O ângulo será agudo se sua medida valer mais que 0° (ou 0 radianos) e menos que 90° (ou 2π radianos).
- **Reto:** O ângulo reto é aquele que mede exatamente 90° (ou 2π radianos).
- **Obtuso:** O ângulo será obtuso se sua medida valer mais que 90° (ou 2π radianos) e menos que 180° (ou π radianos).
- **Raso:** O ângulo raso é aquele que mede 180° (ou π radianos).

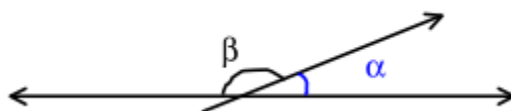
1.4.2. Ângulos - Classificação quanto à posição

Por sua vez, referente à sua **posição**, os ângulos possuem a seguinte classificação:

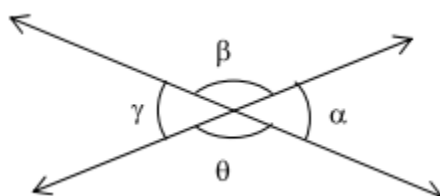
- **Congruentes:** Dois ângulos são classificados como congruentes quando possuem a mesma medida.
- **Consecutivos:** Dois ângulos são chamados consecutivos se um dos lados de um deles coincide com um dos lados do outro ângulo. Nesta figura, alfa (α) e beta (β) são consecutivos. Perceba que o ângulo beta está dentro de alfa. É como se você mantivesse um dos lados fixo e fosse inclinando cada vez mais o outro lado. Cada um dos novos ângulos formados seria consecutivo com os outros.



- **Adjacentes:** Dois ângulos são classificados como adjacentes quando são consecutivos e não possuem pontos internos comuns. Nesta figura, α e β são adjacentes.



- **Opostos pelo vértice:** São ângulos formados por duas retas concorrentes e que possuem seus dois lados nas mesmas retas. Nesta figura, α (alfa) e γ (gama) são opostos pelo vértice e β (beta) e θ (theta) também são opostos entre si.

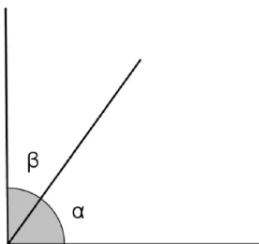


É muito importante deixar claro que **dois ângulos opostos pelo vértice têm medidas iguais**, ou seja, são congruentes.

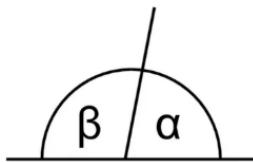
1.4.3. Ângulos - Classificação quanto à complementação

Já em relação à **complementação**, os ângulos apresentam a seguinte divisão:

- **Complementares:** Dizemos que α e β são complementares quando a soma de suas medidas é igual a 90° . Assim, dizemos que α é o complemento de β e vice-versa.



- **Suplementares:** Dizemos que α e β são suplementares quando a soma de suas medidas é igual a 180° . Assim, dizemos que α é o suplemento de β e vice-versa.



Por exemplo, vamos calcular o suplemento e o complemento de 30° .

Complemento:

$$90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Os ângulos de 60° e 30° são **complementares**, pois a **soma de ambos é 90°** .

Suplemento:

$$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

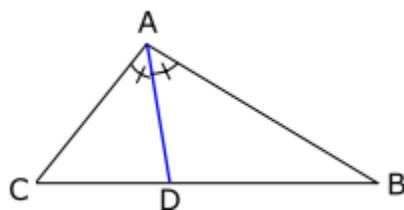
Os ângulos 150° e 30° são **suplementares**, pois a **soma de ambos é 180°** .

1.4.4. Bissetriz de um ângulo

Bissetriz de um ângulo é uma **semirreta de origem no vértice do ângulo que o divide em dois ângulos congruentes (iguais)**.

Nesta figura, vemos o desenho da bissetriz interna do ângulo A, que é a semirreta AD.

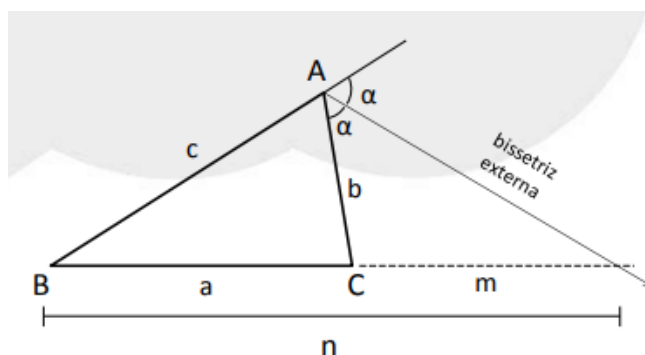




Além disso, faz-se necessário destacar o **Teorema da bissetriz interna**, o qual afirma que a bissetriz do ângulo interno de um triângulo determina sobre o lado oposto dois segmentos **proporcionais** aos outros dois lados. Assim, temos:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Por fim, apresentamos o conceito da **Bissetriz Externa**, que corresponde à **reta que divide o ângulo externo em duas partes iguais**. Na figura a seguir, é apresentada a bissetriz externa do ângulo A, dando origem a dois ângulos congruentes (α):



1.5. Circunferência

A **circunferência** é uma figura constituída de infinitos pontos, em que a **distância de qualquer ponto dela até o seu centro C é sempre igual ao seu raio R**. O segmento de reta que passa pelo centro e une dois pontos da circunferência é chamado de **diâmetro (D)**. Esse diâmetro vale o **dobro do raio (R)**:

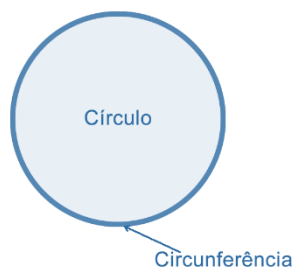
$$D = 2 \cdot R$$

Circunferência



Inclusive, é importante percebermos que **círculo** é a **parte interna da circunferência**, ou seja, é a figura plana determinada por ela. Por sua vez, circunferência é o contorno (linha curva) que limita o círculo. Veja na figura:





O **comprimento da circunferência (C)**, ou **perímetro (P)**, é igual a:

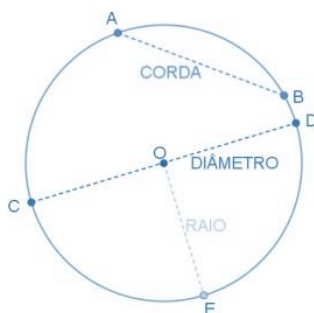
$$C = 2 \cdot \pi \cdot R$$

Ou:

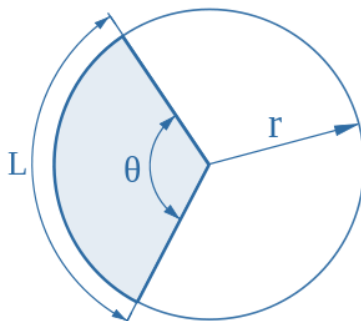
$$C = \pi \cdot D$$

Também temos a **corda**, que corresponde ao segmento de reta que une dois pontos da circunferência. E ainda temos o **arco**, que é qualquer pedaço de uma circunferência delimitado por dois pontos situados nela.

Na figura a seguir, a corda corresponde à medida AB e o arco ao trecho da circunferência delimitada pelos pontos A e B. Pense em um arco e flecha e correlacione o arco e a corda com os de um arco e flecha. Daí que surgiram esses nomes.



Um **setor circular** é uma região do círculo delimitada por dois de seus raios e um arco. Basta pensar em um pedaço de pizza, como no trecho preenchido nesta figura:



Geralmente, podemos chamar um setor circular de “fatia de pizza”, pelo seu formato. O ângulo θ é chamado de ângulo central e L corresponde ao comprimento do arco formado.

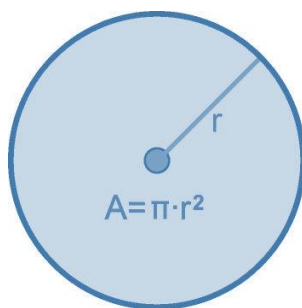
Dependendo do valor de seu ângulo central, um setor pode ser classificado como **metades** (180°), **quadrantes** (90°) e **oitantes** (45°).

Por fim, a **área** de uma circunferência é dada pela seguinte expressão:

$$\text{Área} = \pi \cdot R^2$$

Ou:

$$\text{Área} = \pi \cdot \frac{D^2}{4}$$



Para exemplificar, suponha que as rodas de um automóvel têm 40 cm de raio. Sabendo-se que cada roda deu 20.000 voltas, então qual a distância percorrida pelo automóvel, em quilômetros?

Foi informado que o **raio** das rodas do automóvel é de 40cm = 0,4m. Nesse sentido, sabemos que o comprimento ou **perímetro** de uma circunferência é dado por:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot R$$

$$C = 2 \cdot \pi \cdot 0,4 = 0,8\pi$$

Já a **distância** percorrida em 20.000 voltas corresponde a:

$$d = 0,8\pi \cdot 20000 = 16.000\pi \text{ metros}$$

Fazendo a conversão para quilômetros, temos:

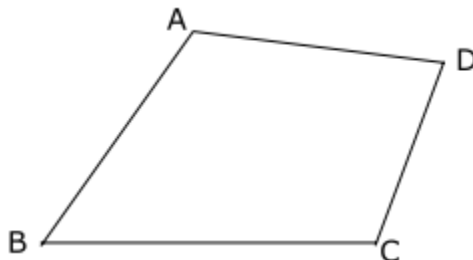
$$d = 16\pi \text{ km}$$

1.6. Polígonos

O **polígono** é uma figura plana fechada formada por três ou mais segmentos de reta que se interceptam dois a dois. Os segmentos de reta são denominados **lados** do polígono. Os pontos de interseção são denominados **vértices** do polígono.



Por exemplo, considere o polígono desta figura:



Em que:

- A, B, C e D são os vértices do polígono.
- AB, BC, CD e DA são os lados do polígono.

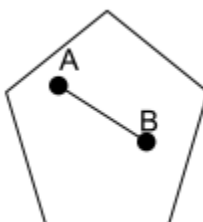
Repare que, para ser um polígono, a figura tem que ser fechada e formada somente por retas que não se cruzam. Logo, não pode ter nenhum lado aberto ou algo que não seja uma reta formando um dos lados, como nestes desenhos, que não representam polígonos:



As figuras A, B e C não são polígonos, pois A possui um lado que não é uma reta, B possui um lado que não é fechado e C possui retas que se cruzam.

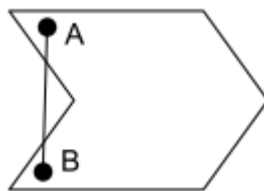
Quanto à sua classificação, os polígonos podem ser: **convexo** ou **côncavo**.

O **Polígono Convexo** é aquele construído de modo que os **prolongamentos dos lados nunca ficarão no interior da figura original**. Se dois pontos pertencem a um polígono convexo, então todo segmento de reta tendo estes dois pontos como extremidades, estará inteiramente contido no polígono.



O **Polígono Côncavo** é aquele construído de modo que **existem dois pontos contidos no polígono para que o segmento de reta com esses dois pontos nas extremidades possua pontos fora do polígono**.

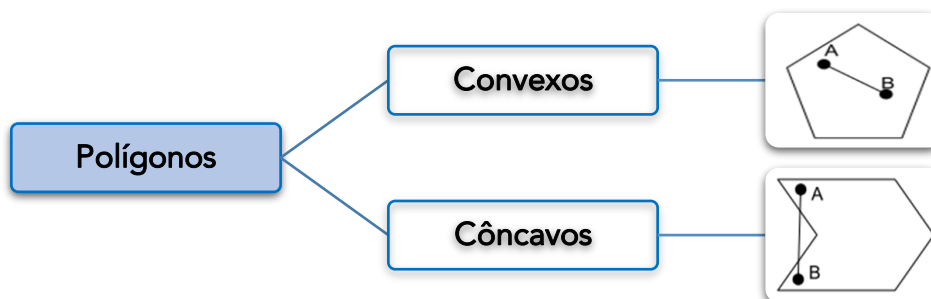




Repare que mesmo no caso do côncavo não há lados que se cruzam, logo, é sim um polígono.

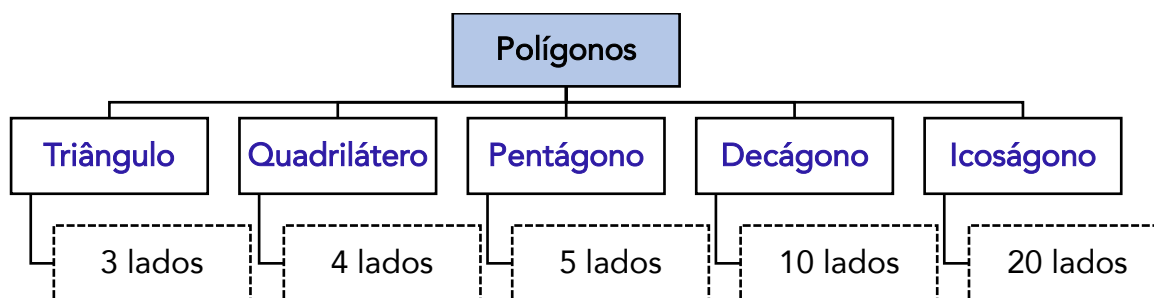
Até o Roberto Carlos gravou uma música chamada “O côncavo e o convexo”, que diz assim: “Cada parte de nós tem a forma ideal quando juntas estão, coincidência total do côncavo e convexo, assim é nosso amor, no sexo.”. Cabe a você entender quem é o côncavo e quem é o convexo nessa analogia, afinal, aprender Geometria também é cultura!

Resumindo, temos:

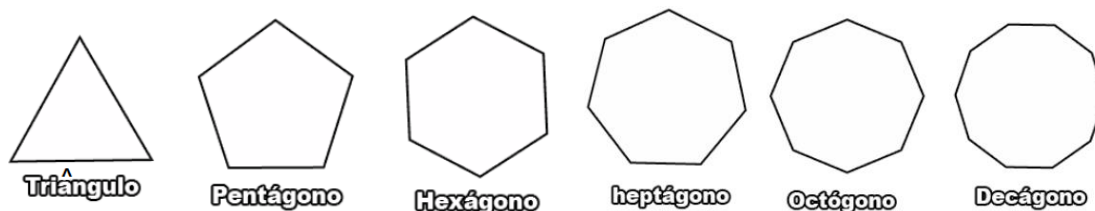


Os polígonos côncavos não vão ter muito interesse para nós, pois não caem em prova, de forma que daqui para a frente, se falamos em polígono, fica implícito que são os convexos.

Em relação à **quantidade de lados**, os polígonos podem ser (alguns tipos apenas):



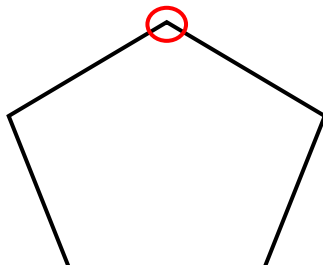
Alguns outros tipos comuns são: hexágono (6 lados), heptágono (7 lados), octógono (8 lados), eneágono (9 lados), dodecágono (12 lados) e pentadecágono (15 lados). Eis alguns deles:



1.6.1. Número de diagonais de um polígono

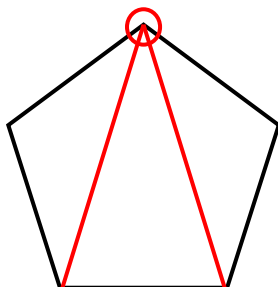
É essencial termos em mente o conceito de diagonal, muito embora o senso comum nos indique esse conhecimento. Assim, **diagonal** é **qualquer segmento de reta que liga dois vértices não adjacentes de um polígono**.

Como exemplo, considere este polígono de cinco lados (pentágono), tomando como referência o vértice superior.



A partir dele, quantas diagonais podem ser traçadas? Ora, as diagonais devem ligar esse vértice aos demais. Não podemos ter diagonais ligando-o aos dois vizinhos, pois aí teríamos lados e não diagonais. Além disso, não podemos ter diagonal ligando este vértice a ele próprio.

Assim, dos cinco vértices do pentágono, o vértice em destaque só pode formar diagonal quando ligado a dois dos demais vértices. Ou seja, **só é possível construirmos duas diagonais a partir dele, que estão indicadas nesta figura:**



ATENÇÃO
DECORE!

O número de diagonais que partem de um vértice do polígono de “n” lados é dado por $n - 3$.

E por que diminuimos “n” de três? Porque dois são lados e o outro é o próprio vértice.

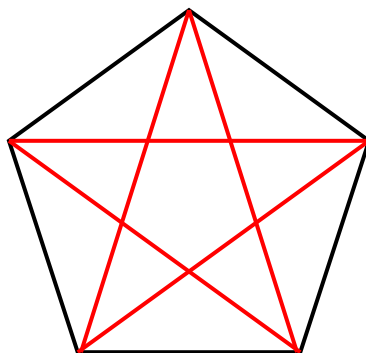
No entanto, se desejássemos saber a quantidade de diagonais do pentágono acima, usaríamos a fórmula que vimos anteriormente:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$



$$d = \frac{5 \cdot (5 - 3)}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$$

Eis as cinco diagonais do pentágono:



Sendo assim, o **número de diagonais (d)** de um polígono de **n** lados é dado por:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Para exemplificar, suponha um polígono de **n** lados, o número de diagonais determinadas a partir de um de seus vértices é igual ao número de diagonais de um hexágono. Desse modo, qual é o valor de **n**?

Inicialmente, queremos calcular quantas diagonais existem em um hexágono. Ora, um **hexágono possui 6 lados**. Logo, o número de diagonais fica:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2} = \frac{6 \cdot (6 - 3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

Assim, fica claro que um hexágono apresenta **9 diagonais**.

O polígono indicado no exemplo apresenta **n** lados. O enunciado informa que a partir de um de seus vértices é possível traçar 9 diagonais.

Ora, sabemos que, para qualquer polígono de **n** lados, o número de diagonais que é possível traçar a partir de cada um de seus vértices é dado por "**n - 3**":

Logo:

$$n - 3 = 9$$

$$n = 12$$



Agora, considere um polígono regular possui 48 diagonais que não passam pelo seu centro. A partir desta informação, pode-se concluir que o número de lados desse polígono é igual a quanto?

Precisamos ter em mente que **apenas os polígonos regulares com número par de lados apresentam diagonais que passam pelo centro**. Desenhe em um rascunho alguns polígonos comuns (triângulo, quadrado, pentágono) que você perceberá isso.

Nesse sentido, vamos imaginar quantas diagonais passam pelo centro. De cada vértice sai uma diagonal que passa pelo centro e encontra o vértice oposto, logo, seriam n diagonais que passariam pelo centro, mas se fizéssemos somente isso, contaríamos duas vezes cada diagonal, então temos que dividir n por 2. Assim, num polígono regular de n lados, temos que $n/2$ diagonais passam pelo centro.

Ademais, já sabemos que o número de diagonais é dado por:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Se do total de diagonais subtrairmos as que passam pelo centro, restam as 48 diagonais fornecidas pelo enunciado. Logo:

$$\frac{n \cdot (n - 3)}{2} - \frac{n}{2} = 48$$

Multiplicando todos os termos por 2, temos:

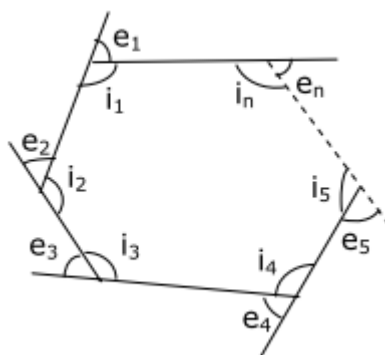
$$n \cdot (n - 3) - n = 96$$

$$n^2 - 4n - 96 = 0$$

Resolvendo essa equação de 2º grau, encontramos as raízes: **12** e -8 (descartamos por ser negativa).

1.6.2. Soma das Medidas dos Ângulos Internos e Externos

Considere o polígono a seguir com os ângulos descritos:



A **soma dos ângulos internos** de um polígono é dada por:

$$S_i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$$



Por sua vez, a soma dos ângulos externos de um polígono pode ser obtida por meio da seguinte fórmula:

$$S_e = e_1 + e_2 + \dots + e_n = 360^\circ$$

Note que a soma dos ângulos externos não depende de n , logo, a soma será 360° para qualquer polígono, sempre.

Ainda, se o polígono for regular, ele tem todos os lados e os ângulos congruentes, logo:

- ângulo interno de um polígono de n lados:

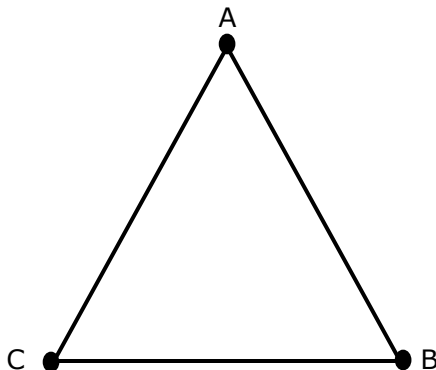
$$\frac{S_i}{n}$$

- ângulo externo de um polígono de n lados:

$$\frac{360^\circ}{n}$$

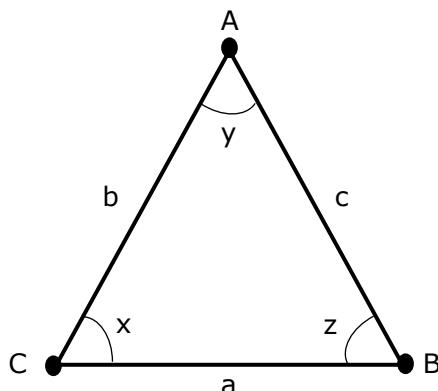
1.7. Triângulos

Considere três pontos A, B e C que não estejam ao longo de uma mesma reta (ou seja, pontos não colineares). Se ligarmos esses pontos, obteremos a figura denominada **triângulo**:

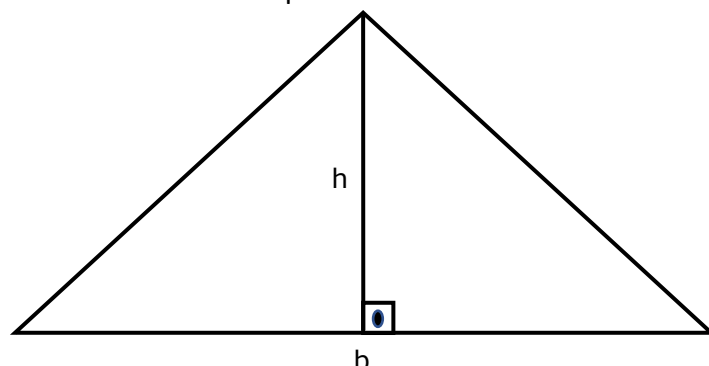


1.7.1. Elementos do Triângulo

Considere o triângulo abaixo.



Os pontos A, B e C são os **vértices** do triângulo. Já os segmentos a, b e c são os **lados** do triângulo. Além disso, temos os **ângulos internos** do triângulo (ângulos x, y e z). Por sua vez, a **altura** do triângulo é um segmento que parte da reta suporte de um dos lados (chamado de base, representada pela letra b), sendo perpendicular a ela, e termina no vértice oposto.



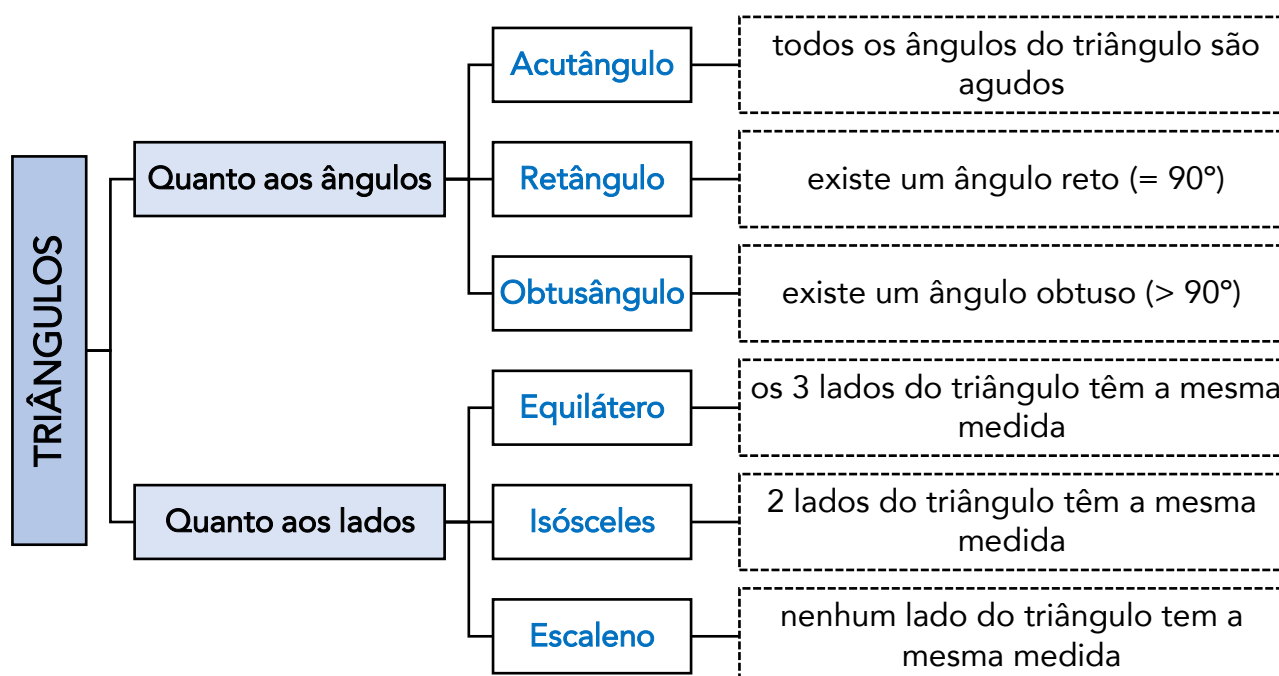
Nessa figura, o segmento **h** é a altura em relação à base **b**. Perceba que existem ainda outras duas alturas, pois depende da base que você tome como referência.

1.7.2. Soma dos ângulos internos de um triângulo

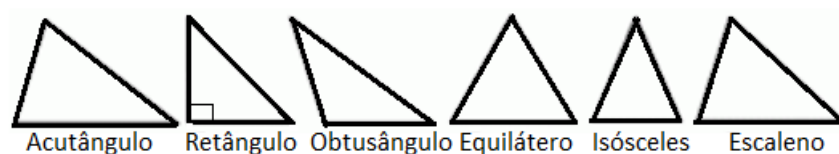
Neste tópico, precisamos ter em mente que **a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°** . Afinal, $S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ = (3 - 2) \cdot 180^\circ = 180^\circ$.

1.7.3. Classificações dos triângulos

Os ângulos podem ser classificados tanto em relação aos ângulos que possuem quanto aos lados presentes na sua constituição.

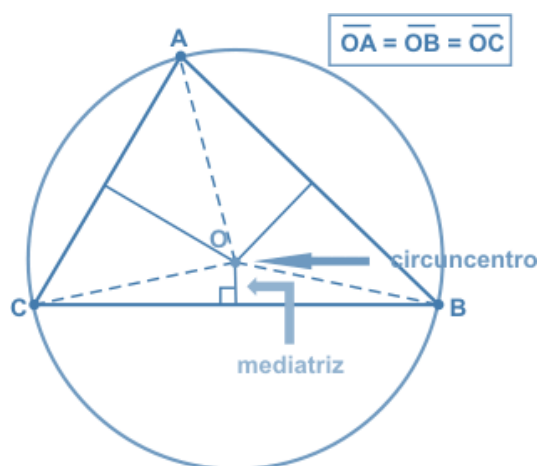


Esta figura facilitará a diferenciação entre os tipos de triângulos:

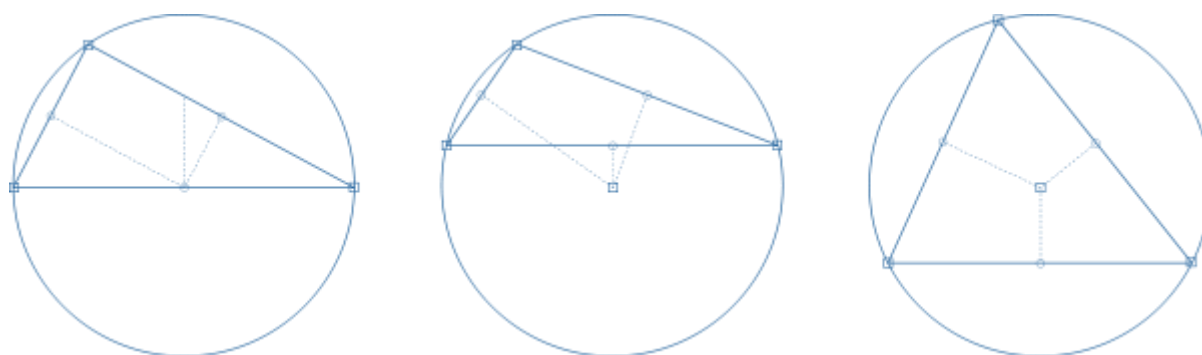


1.7.4. Mediatrix, Mediana e Altura e seus Pontos Notáveis

A **mediatrix** de um triângulo é a **semirreta perpendicular a um lado do triângulo, traçada a partir do seu ponto médio**, conforme pode ser observada nesta figura:

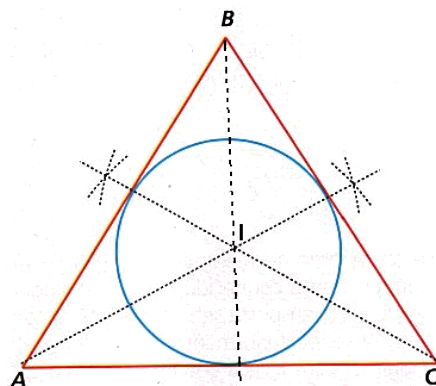


As três mediatrizes de um triângulo se encontram em um único ponto, chamado de **circuncentro**, que é o **centro da circunferência circunscrita ao triângulo** (o triângulo fica dentro da circunferência). O circuncentro pode ficar dentro ou fora do triângulo, como nestas figuras:

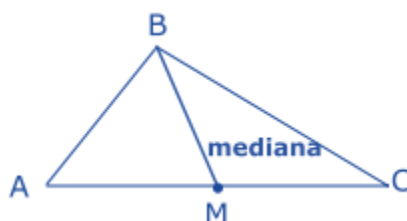


Já o **incentro** de um triângulo é o **ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo**. Ele é o centro da circunferência inscrita no triângulo, sendo que qualquer triângulo possui um incentro.

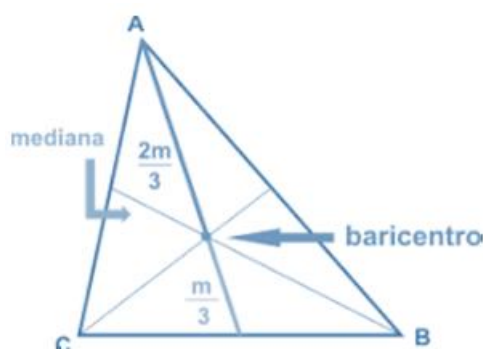




A **mediana** de um triângulo é o segmento de reta que une o vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto.



O **ponto de encontro das três medianas** é chamado de **baricentro** do triângulo, ou **centro de gravidade** do triângulo. Ele divide a mediana em dois segmentos e localiza-se a $\frac{2}{3}$ do vértice. O segmento que une o vértice ao baricentro vale o dobro do segmento que une o baricentro ao lado oposto deste vértice. Esta figura representa isto:

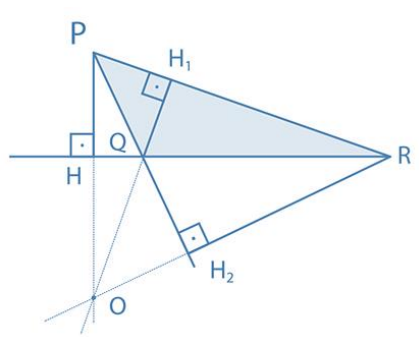


Como curiosidade, também chamamos o baricentro de um triângulo de centro de gravidade porque se esticarmos uma corda perpendicular ao triângulo a partir do baricentro, o triângulo ficará equilibrado, sem balançar.

O **ponto de encontro das três alturas de um triângulo** denomina-se **ortocentro**. No triângulo acutângulo, o ortocentro é interno ao triângulo; no triângulo retângulo, é o vértice do ângulo reto; e no triângulo obtusângulo, é externo ao triângulo.

Para encontrarmos o ortocentro de um triângulo obtusângulo, precisamos prolongar dois lados, assim como está desenhado na figura a seguir, na qual encontramos o ortocentro "O" do triângulo PQR:



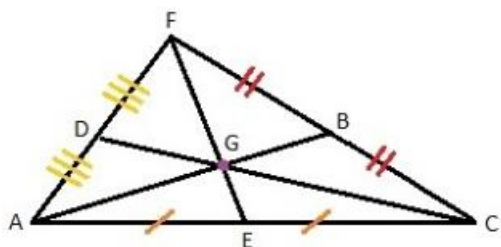


Perceba que, para encontrarmos a altura relativa ao vértice P (H), precisamos prolongar o lado QR para fora, assim como fizemos no caso da altura relativa ao vértice R (H_2), em que prolongamos o lado PQ.

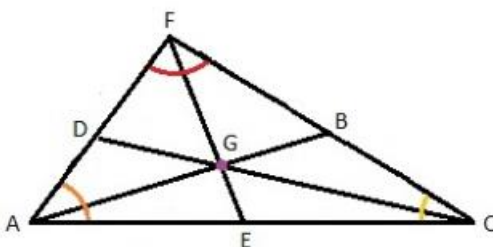


RESUMINDO

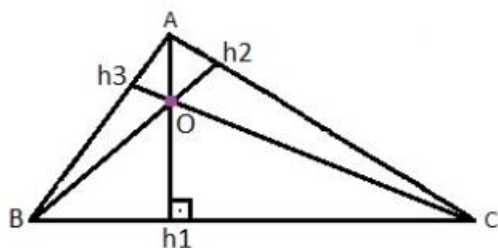
• Baricentro



• Incentro

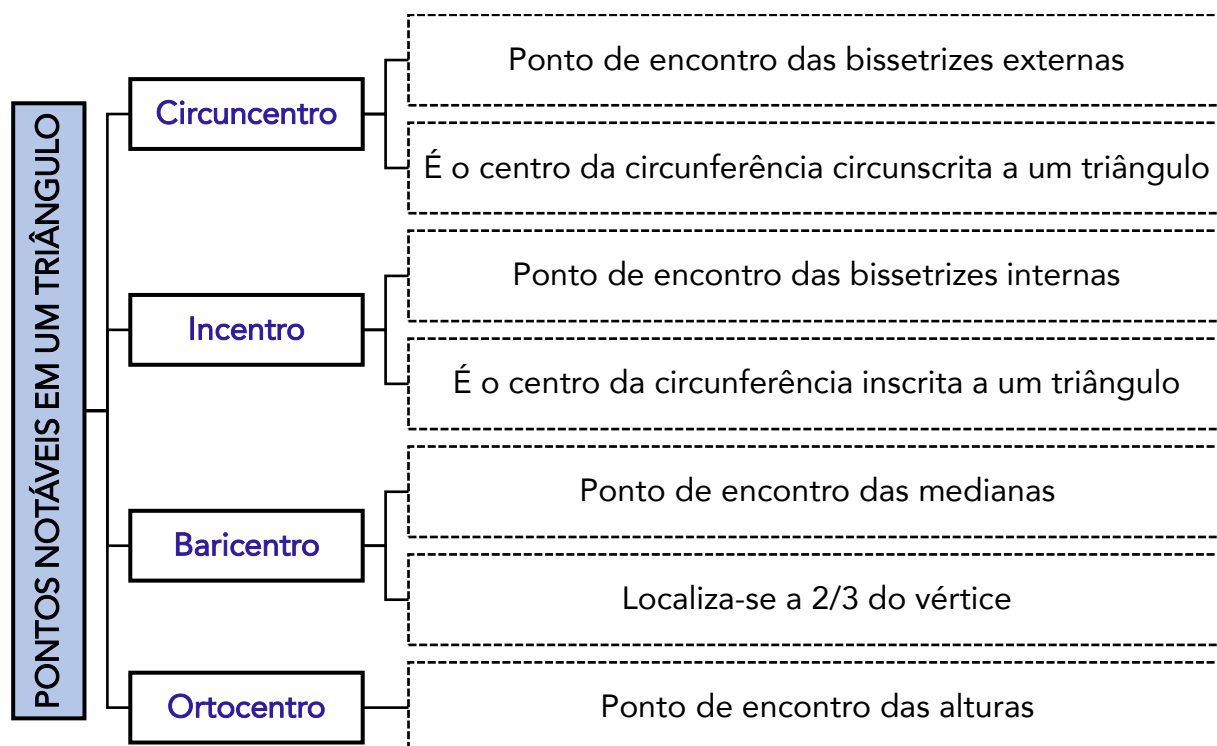


• Ortocentro



• Circuncentro





1.7.5. Congruência de triângulos

Dois triângulos são **congruentes** (iguais) quando seus lados correspondentes apresentam **medidas iguais**.

Para que dois triângulos sejam congruentes, é suficiente que:

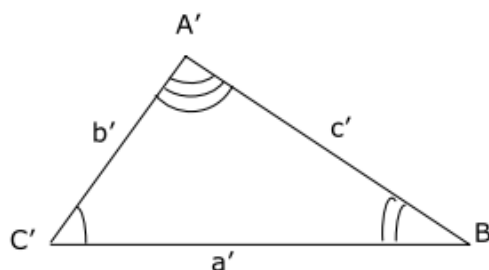
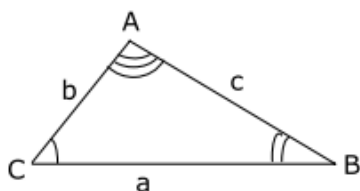
- ✓ **Tenham três lados congruentes** (caso LLL – lado, lado, lado).
- ✓ **Tenham dois lados congruentes, assim como o ângulo entre ambos** (caso LAL – lado, ângulo, lado).
- ✓ **Tenham um lado e dois ângulos congruentes** (casos ALA – ângulo, lado, ângulo; LAA – lado, ângulo, ângulo).

Se qualquer um desses casos ocorrer, já podemos garantir que os dois triângulos serão idênticos entre si.

1.7.6. Semelhança de triângulos

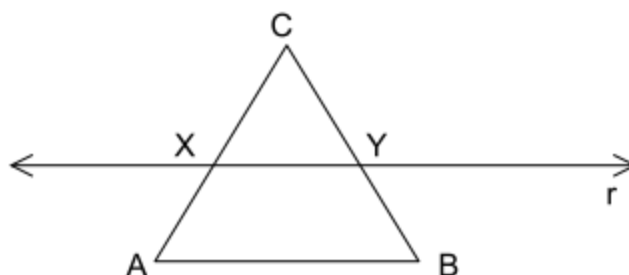
Dois triângulos ABC e A'B'C' são ditos semelhantes se:

- ✓ Os ângulos correspondentes forem congruentes ($\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$).
- ✓ Os lados correspondentes forem proporcionais ($\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$).



Usamos o símbolo $\sim$ para indicar que dois triângulos são semelhantes.

Teorema fundamental: Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em dois pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

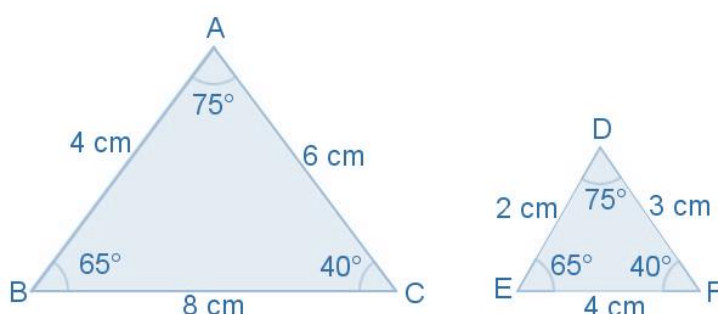


Considerando que a reta r é paralela ao lado AB , os triângulos ABC e XYC são **semelhantes**.

A razão entre dois lados homólogos (correspondentes) ou entre dois triângulos semelhantes (k) é chamada de **razão de proporcionalidade**.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$$

Por exemplo, os triângulos a seguir são semelhantes:



Os ângulos são congruentes (iguais) e os lados homólogos são proporcionais. Note que:

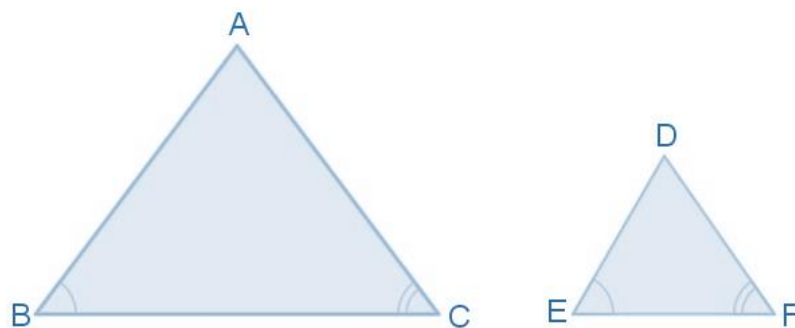
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = 2.$$

A razão de proporcionalidade será $k = 2$. Podemos dizer que o triângulo ABC é duas vezes maior que DEF ou que DEF é duas vezes menor que ABC .

Para se verificar que dois triângulos são semelhantes, não é necessário conferir se todos os lados correspondentes são proporcionais e que todos os ângulos são congruentes. Há alguns **casos de semelhança** em que a detecção da semelhança é facilitada.

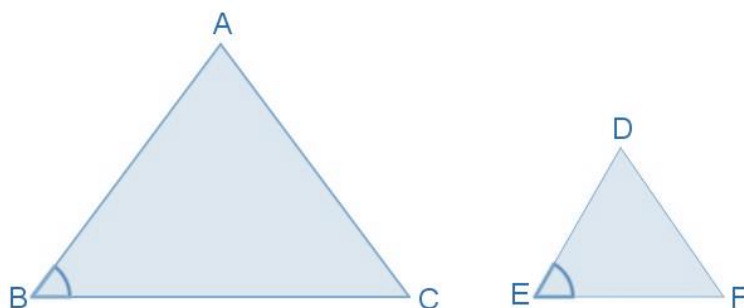
1) Caso AA (Ângulo, Ângulo): Sejam dois triângulos ABC e DEF . Eles serão semelhantes se, e somente se, dois de seus ângulos forem congruentes.





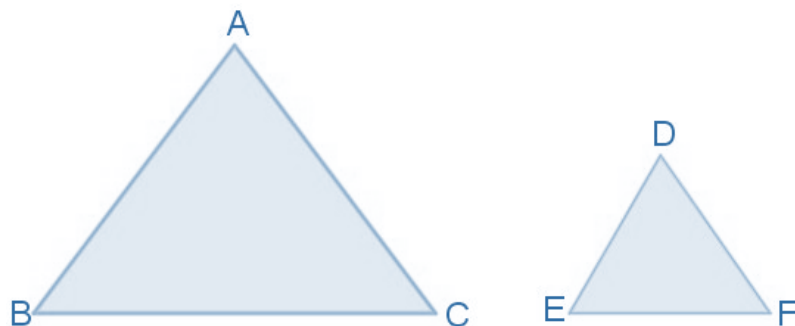
$$\begin{cases} \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \end{cases} \iff \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

2) Caso LAL (Lado, Ângulo, Lado): Dois triângulos serão semelhantes se, e somente se, eles tiverem dois lados respectivamente proporcionais e se os ângulos formados por esses lados forem congruentes.



$$\begin{cases} \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \end{cases} \iff \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

3) Caso LLL (Lado, Lado, Lado): Dois triângulos serão semelhantes se, e somente se, eles tiverem os três lados respectivamente proporcionais.



$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \iff \triangle ABC \sim \triangle DEF$$



1.7.7. Área do triângulo

A **área do triângulo** é dada pelo **produto entre a medida da base e da altura, dividido por 2**:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Outra forma de calcular a área de um triângulo é por meio da medida de seus lados. Assim, um triângulo de lados a , b , e c e **semiperímetro** s possui a seguinte **área**:

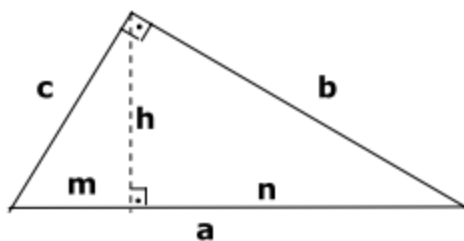
$$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

Em que:

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

1.7.8. Relações métricas no triângulo retângulo

Considere o triângulo a seguir:



Em que:

- a – hipotenusa
- b e c – catetos
- h – altura relativa à hipotenusa
- m e n – projeções dos catetos sobre a hipotenusa

As relações métricas que podemos estabelecer são:

1) $b \cdot c = a \cdot h$

2) $c^2 = a \cdot m$

3) $b^2 = a \cdot n$

4) $h^2 = m \cdot n$



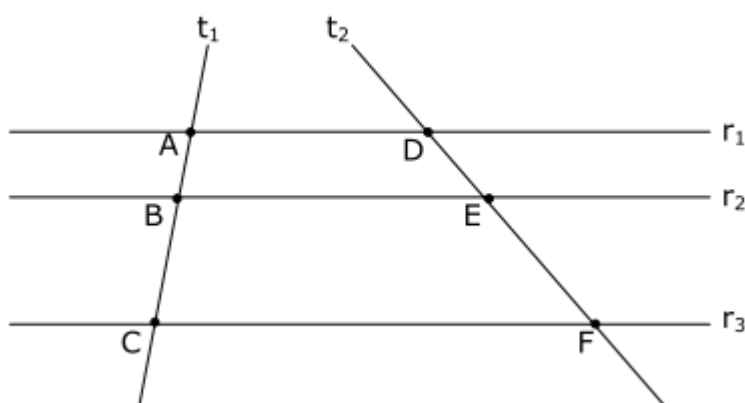
5) Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

1.8. Teorema de Tales

O Teorema de Tales nos diz que:

Um feixe de retas paralelas cortado por duas transversais forma segmentos de retas proporcionais.

Na figura a seguir, temos três retas horizontais (r_1 , r_2 e r_3) paralelas entre si, sendo cortadas por duas retas transversais (t_1 e t_2).



O Teorema de Tales nos diz que **segmentos correspondentes são proporcionais**. Daí:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

1.9. Quadriláteros

O **quadrilátero** é o polígono que possui **quatro lados** e a soma de seus ângulos internos vale **360°**. As diagonais do quadrilátero são segmentos de reta que unem seus vértices opostos.

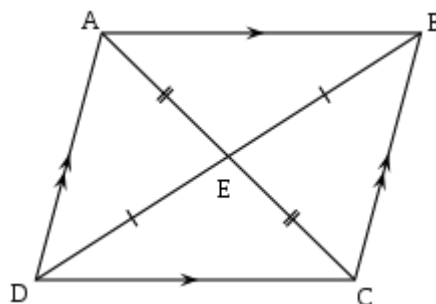
Uma característica interessante dos quadriláteros é que **sempre que um quadrilátero for circunscrito a uma circunferência, a soma de seus lados opostos é igual**. Você entenderá isso melhor na questão a seguir.

1.9.1. Paralelogramo

É o quadrilátero cujos **lados opostos são paralelos** e suas **diagonais se encontram no ponto médio**. Além disso, os ângulos opostos do paralelogramo são congruentes e os lados opostos são iguais.

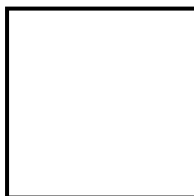
Perceba que na figura a seguir os lados AD e BC são iguais entre si, assim como os lados AB e CD, e que o ponto E divide as diagonais ao meio. Logo, ela representa um paralelogramo.





1.9.1.1. Quadrado

É o paralelogramo que tem os **quatro lados e os quatro ângulos iguais entre si**.



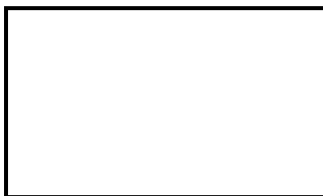
Cada ângulo mede 90° , ou seja, um quadrado é formado por quatro ângulos retos. Assim, cada diagonal divide o quadrado em dois triângulos retângulos isósceles, com dois ângulos medindo 45° e o terceiro, 90° .

Algo que é cobrado com certa frequência é saber como calcular a **diagonal do quadrado** de lado l :

$$d = l\sqrt{2}$$

1.9.2. Retângulo

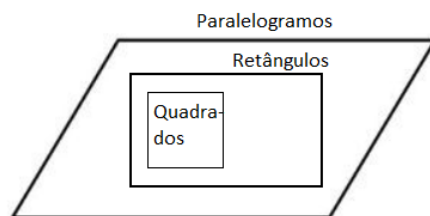
É um quadrilátero que possui todos os **ângulos iguais a 90°** e seus **lados paralelos possuem o mesmo tamanho**.



Entenda que todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado. Assim como todo retângulo é um caso particular de paralelogramo cujos quatro ângulos são iguais entre si.

Eis uma representação disso em forma de conjuntos, para que você entenda melhor:





1.9.3. Losango

Você está cansado de ver um losango em particular desde criança, basta olhar para nossa querida bandeira nacional, que contém um losango em amarelo.

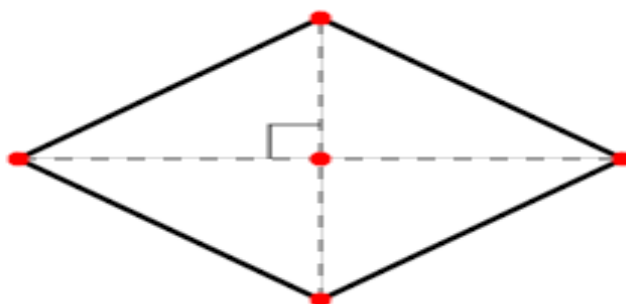
Ele é um quadrilátero que possui **todos os lados de mesmo tamanho** e seus **ângulos opostos com a mesma medida**.

Geralmente seus **ângulos adjacentes possuem medidas diferentes, porque quando possuem medidas iguais, vira um caso particular do losango, nosso querido quadrado**.

Há autores que somente definem um polígono como losango se os ângulos adjacentes forem diferentes, ou seja, para eles um quadrado não seria um losango; já outros autores definem como definimos, podendo ter medidas iguais, formando um quadrado, mas para fins de concursos públicos isso é irrelevante. O que é pacífico é que todo losango é um paralelogramo.

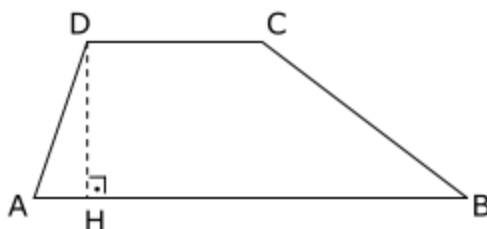
Uma característica dos losangos é que as suas diagonais se cortam formando quatro ângulos retos.

Nas áreas de Engenharia e Física os losangos são mais conhecidos como rombos.



1.9.4. Trapézio

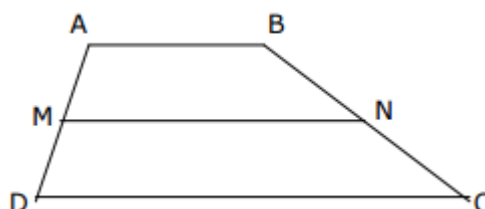
É o quadrilátero no qual **apenas dois lados são paralelos entre si**.



Em que:

- AB é paralela a CD.
- AB é a base maior.
- CD é a base menor.
- DH é a altura.

Há uma propriedade do trapézio que convém conhecermos:

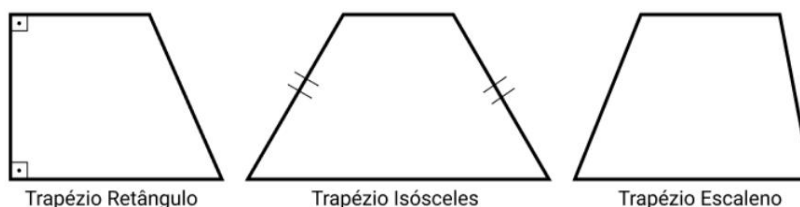


Sendo M o ponto médio de AD e N o ponto médio de BC, a medida do segmento MN, chamada de **base média do trapézio**, é dada por:

$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$

Isto é, em um trapézio, a base média é a média aritmética das bases.

Um trapézio pode ser retângulo, isósceles ou escaleno. Ele será retângulo quando dois ângulos forem iguais a 90º e os outros dois, não. Será isósceles quando os dois lados não paralelos forem iguais. E será escaleno quando os dois lados não paralelos forem diferentes. Eis seus formatos:

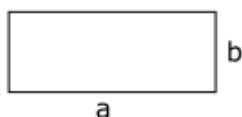


1.10. Áreas das figuras planas

Com relação às áreas das figuras planas, basicamente precisamos saber suas fórmulas:

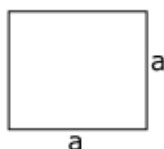


Retângulo:



$$\text{área} = a \cdot b$$

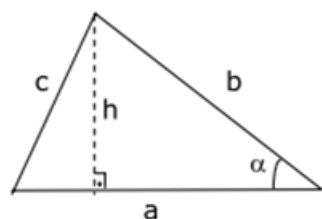
Quadrado:



$$\text{área} = a^2$$

Perceba que como o quadrado é um caso particular do retângulo, se usarmos a mesma forma do retângulo em um quadrado, como todos os lados neste medem “a”, a fórmula da área do quadrado será $a \cdot a = a^2$.

Triângulo:

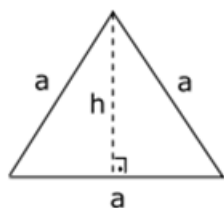


$$\text{área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{a \times h}{2} \quad \text{ou}$$

$$\text{área} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \alpha}{2}$$

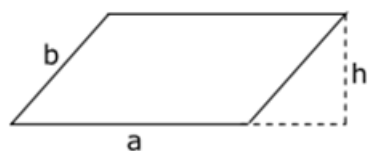
A área também pode ser calculada usando a segunda fórmula se usarmos o outro ângulo formado pelos lados “a” e “c” e substituindo o “b” da fórmula pelo “c”.

Triângulo Equilátero:



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \text{área} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Paralelogramo:

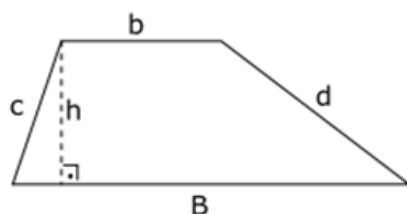


$$\text{área} = \text{base} \times \text{altura} = a \times h$$

A mesma fórmula pode ser usada em relação à outra altura do paralelogramo, trocando “a” por “b”.

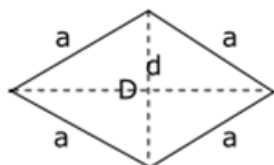


Trapézio:



$$\text{área} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

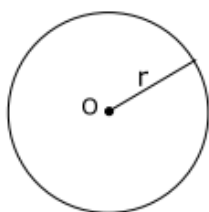
Losango:



$$\text{área} = \frac{D \cdot d}{2}$$

d = diagonal menor
D = diagonal maior

Área do Círculo

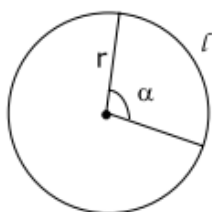


$$\text{área} = \pi r^2$$

Comprimento de uma circunferência:

$$C = 2\pi r$$

Setor Circular:



$$\text{área} = \frac{\alpha \pi r^2}{360^\circ}$$

2. Geometria Espacial

A **Geometria Espacial** é o estudo da geometria no espaço, em que estudamos as figuras que possuem **mais de duas dimensões**. Essas figuras recebem o nome de sólidos geométricos ou figuras geométricas espaciais e são conhecidas como prisma (cubo, paralelepípedo), pirâmide, cone, cilindro e esfera.

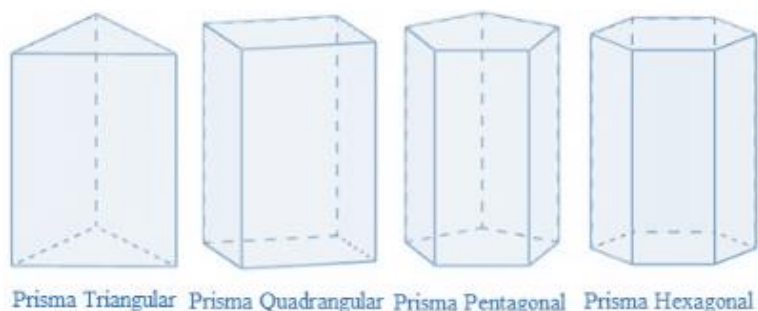
Cada plano do sólido é chamado de **face**. As **arestas** são os segmentos de reta que unem duas faces do sólido. Já os **vértices** são os pontos em que mais de duas arestas do sólido se encontram.



2.1. Prisma

Um **prisma** é um **poliedro** que **apresenta duas faces opostas paralelas**. O prisma cujas bases são paralelogramos é chamado de **paralelepípedo**.

Eis alguns exemplos de prismas:



➤ Altura do prisma:

A **altura** do prisma é a medida da distância entre sua base inferior e sua base superior.

➤ Área Lateral e Área Total:

A **área lateral** do prisma é dada pela soma das áreas de cada quadrilátero de suas faces laterais. Por exemplo, no caso de um prisma com base triangular, teremos que sua área lateral será igual à soma das áreas dos três quadriláteros que formam suas faces laterais.

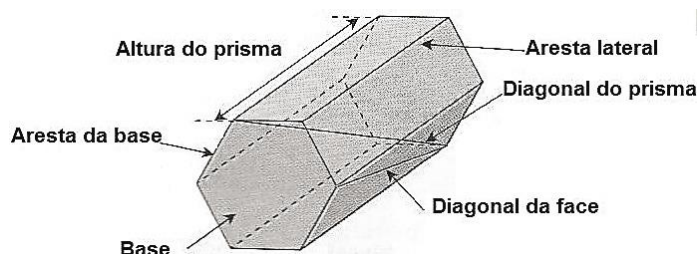
A **área total** do prisma é igual à soma de sua área lateral com a área de suas duas bases (a inferior e a superior).

➤ Volume:

O **volume** do prisma é calculado multiplicando-se a área de sua base pela medida de sua altura:

$$V = \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

Esta figura mostra todas as medidas importantes de um prisma, tomando como exemplo um prisma hexagonal:



2.1.1. Prisma reto

Quanto à inclinação das arestas laterais, os prismas podem ser retos ou oblíquos.

Nos prismas retos, as arestas laterais têm o mesmo comprimento, são perpendiculares ao plano da base e as faces laterais são retangulares. Eis um prisma pentagonal reto:



O **prisma reto** que possui em todas as faces um **quadrado** é chamado de **cubo**. Sabe um dado qualquer utilizado em jogos? Pois bem, eis um cubo.

➤ **Volume do cubo:**

$$V = \text{Área da base} \times \text{Altura} = a^2 \cdot a = a^3$$

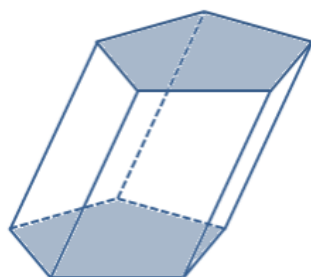
➤ **Área total:**

$$A_{total} = \text{Área da base} \times \text{Altura} = 6 \cdot a^2$$

Essa fórmula é simples de entender. Como cada área de uma das faces é igual à área de um quadrado de lado “a”, ela vale a^2 . Como são seis quadrados que formam um cubo, pois são seis faces, a área total será $6 \cdot a^2$.

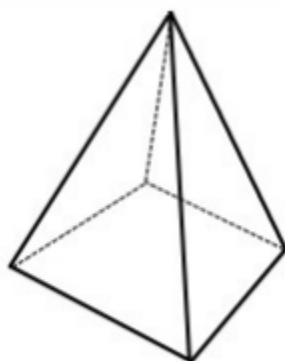
2.1.2. Prisma Oblíquo

Nesse caso, as **arestas laterais têm o mesmo comprimento**, são **oblíquas ao plano da base** e as **faces laterais não são retangulares, são paralelogramos**. Eis um prisma pentagonal oblíquo:



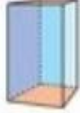
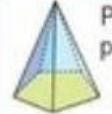
2.2. Pirâmide

Pirâmide é um sólido formado por uma face inferior (base) e um vértice que une todas as faces laterais. As faces laterais de uma pirâmide são regiões triangulares, e o vértice que une todas as faces laterais é chamado de vértice da pirâmide. O número de faces laterais de uma pirâmide corresponde ao número de lados do polígono da base. Eis um exemplo de uma pirâmide quadrangular:



Assim como no caso dos prismas, uma pirâmide pode ser triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal etc.

Veja nesta tabela as diferenças entre esses dois sólidos:

Base	Pirâmides	Prismas
 Triângulo	 Pirâmide triangular	 Prisma triangular
 Quadrilátero	 Pirâmide quadrangular	 Prisma quadrangular
 Pentágono	 Pirâmide pentagonal	 Prisma pentagonal
 Hexágono	 Pirâmide hexagonal	 Prisma hexagonal

➤ Altura da pirâmide:

A **altura** da pirâmide é a medida da distância entre o vértice e sua base inferior.

➤ Área Lateral e Área Total:



A **área lateral** da pirâmide é dada pela soma das áreas de cada triângulo de suas faces laterais. Por exemplo, no caso de uma pirâmide com base quadrada, teremos que sua área lateral será igual à soma das áreas dos quatro triângulos que formam suas faces laterais.

A **área total** da pirâmide é igual à soma de sua área lateral com a área de sua base.

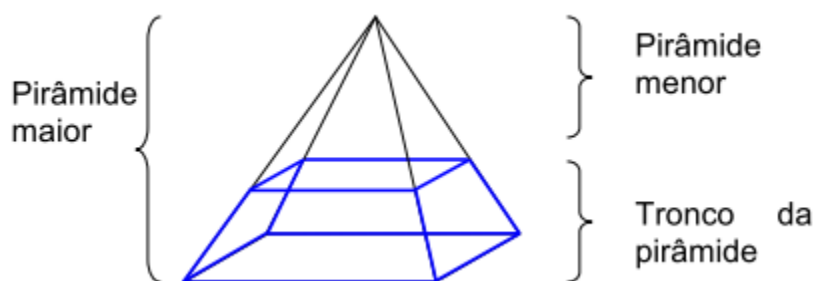
➤ **Volume:**

O **volume** da pirâmide é calculado multiplicando-se a área de sua base pela medida de sua altura e dividindo-se o resultado por 3:

$$V = \frac{\text{Área da base} \times \text{altura}}{3}$$

➤ **Tronco de pirâmide:**

O **tronco de uma pirâmide** é obtido ao se traçar uma seção transversal em uma pirâmide, conforme mostrado a seguir:



Normalmente o que é cobrado em provas é o tronco de pirâmide formado a partir de um corte paralelo à base. Assim, para calcular o **volume do tronco** dessa pirâmide, temos:

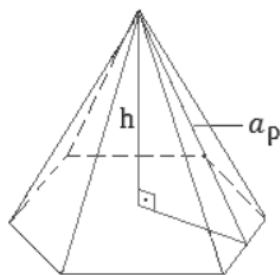
$$V_{\text{tronco}} = V_{\text{pirâmide maior}} - V_{\text{pirâmide menor}}$$

O mesmo serve para a **área lateral do tronco**.

➤ **Apótema:**

O **apótema** é a altura de cada face lateral. Esta figura mostra um dos apótemas de uma pirâmide hexagonal, representado por a_p :



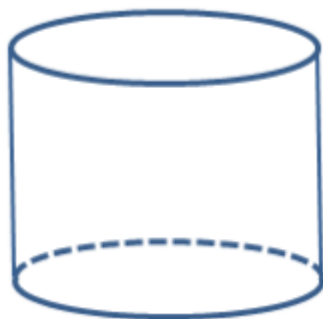


Perceba a diferença entre o apótema e a altura. O apótema é localizado sobre um dos triângulos das faces, formando um ângulo reto com uma das arestas da base, enquanto que a altura está na parte interna da figura, formando um ângulo reto com a superfície da base.

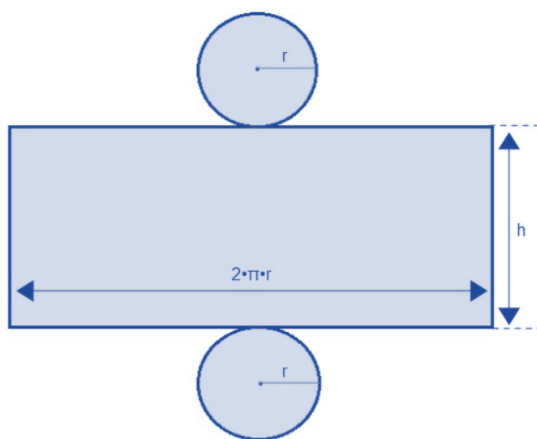
2.3. Cilindro

Pense em uma lata de óleo ou de leite em pó. Eis o cilindro!

O **cilindro** é semelhante a um prisma, mas **sua base é um círculo**. Ele pode ser formado pela rotação de um quadrado ou retângulo em torno de um de seus lados.



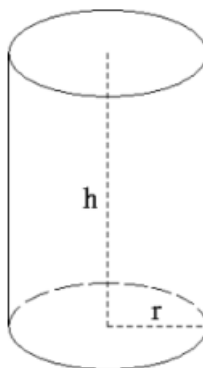
Agora pense em uma lata de óleo. Se você a cortar perpendicularmente na parte comprida e esticar o metal, formará um retângulo, tirando antes a tampa e o fundo, claro. Você terá algo como nesta figura:



➤ **Altura do cilindro:**



A **altura** do cilindro é a medida da distância entre sua base inferior e sua base superior. Nesta figura você verá a altura “h” do cilindro:



➤ Área Lateral e Área Total:

A **área lateral** do cilindro é dada por:

$$A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$$

Vamos entender essa fórmula. A área lateral é a área do tal retângulo que pedimos para você imaginar ao cortar uma lata de óleo. Como a base do retângulo será o comprimento da circunferência, será igual a $2 \cdot \pi \cdot R$. A altura do retângulo é a altura “h” do cilindro. Logo, a área do retângulo será $2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$.

A **área total** do prisma é igual à soma de sua área lateral com a área de suas duas bases, a inferior e a superior. Como a área lateral é igual a $2\pi Rh$ e a área das duas bases corresponde à área de dois círculos, em que cada área é representada por $\pi \cdot R^2$, teremos que:

$$A_{total} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot R^2 = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (h + R)$$

➤ Volume:

O **volume** do cilindro é calculado multiplicando-se a área de sua base pela medida de sua altura, assim como os prismas, só que no caso dos cilindros a base é um círculo:

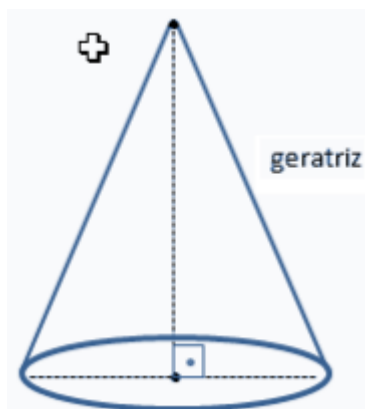
$$V = \text{Área da base} \times \text{Altura} = \pi \cdot R^2 \cdot h$$

2.4. Cone

Um **cone** é semelhante a uma pirâmide, mas sua **base é um círculo**. Ele pode ser formado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.

A **hipotenusa desse triângulo** é chamada de **geratriz** (ou apótema), que é a medida do segmento de reta que liga o vértice do cone à borda da sua base.





➤ **Altura do cone:**

A **altura** do cone é a medida da distância entre o vértice e sua base inferior. Para um cone em que a geratriz é igual ao diâmetro da base (cone equilátero), a altura vale:

$$h = R \cdot \sqrt{3}$$

➤ **Área Lateral e Área Total:**

A **área lateral** do cone é dada por:

$$A_{lateral} = \pi \cdot R \cdot g$$

A **área total** do cone é igual à soma de sua área lateral com a área de sua base.

$$A_{total} = \pi \cdot R \cdot (R + g)$$

➤ **Volume:**

O **volume** do cone é calculado multiplicando-se a área de sua base pela medida de sua altura e dividindo-se esse resultado por 3:

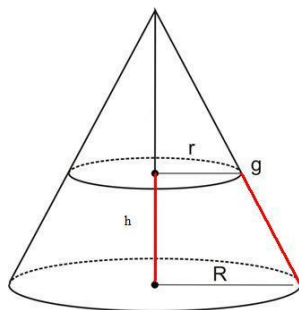
$$V = \frac{\text{Área da base} \times \text{altura}}{3} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$$

Perceba que as fórmulas da pirâmide e do cone possuem denominadores iguais a 3, pois há muita perda de volume pelo fato da parte superior afinar em um vértice só.

Assim como a pirâmide, podem ser cobradas numa prova as medidas de um **tronco de cone**. Nesse caso, utilizaremos os mesmos conceitos vistos anteriormente.

Eis um tronco de cone obtido por um corte no cone original feito por um plano paralelo à base (o tronco é o sólido que existe abaixo do cone menor):





2.5. Esfera

Uma **esfera** é um sólido que parece uma bola de futebol, formado por uma superfície curva na qual todos os seus pontos possuem a mesma distância de um outro ponto denominado **centro**. Ela pode ser formada pelo giro de uma semicircunferência em torno de um eixo.

O **raio** (r) é qualquer segmento de reta que sai do centro da esfera e vai até sua extremidade.

➤ **Área:**

A **área** da superfície de uma esfera é dada por:

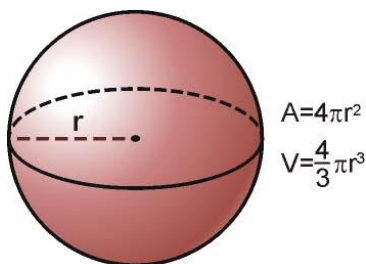
$$A = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

➤ **Volume:**

O **volume** de uma esfera é dado por:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

Eis uma esfera com suas fórmulas mais importantes:



APOSTA ESTRATÉGICA

A ideia desta seção é apresentar os pontos do conteúdo que mais possuem chances de serem cobrados em prova, considerando o histórico de questões da banca em provas de nível semelhante à nossa¹.

Nesse sentido, eu jogaria todas as minhas fichas na cobrança das **áreas das figuras planas**, conforme a revisão que fizemos na aula de hoje.

¹ Vale deixar claro que nem sempre será possível realizar uma aposta estratégica para um determinado assunto, considerando que às vezes não é viável identificar os pontos mais prováveis de serem cobrados a partir de critérios objetivos ou minimamente razoáveis.



QUESTÕES ESTRATÉGICAS

Nesta seção, apresentamos e comentamos uma amostra de questões objetivas selecionadas estrategicamente: são questões com nível de dificuldade semelhante ao que você deve esperar para a sua prova e que, em conjunto, abordam os principais pontos do assunto.

A ideia, aqui, não é que você fixe o conteúdo por meio de uma bateria extensa de questões, mas que você faça uma boa revisão global do assunto a partir de, relativamente, poucas questões.



1. (FGV/CGM-NITERÓI/Auditor Controle Interno/2018) O piso de uma sala quadrada é totalmente coberto por lajotas quadradas, todas exatamente iguais. O número de lajotas contidas nas duas diagonais do piso da sala é 25. O número de lajotas que cobre totalmente o piso da sala é

(A) 121. (B) 169. (C) 225. (D) 289. (E) 361.

RESOLUÇÃO:

Vamos chamar de “n” o número de lajotas contidas em uma diagonal do quadrado.

O enunciado informa que a soma das lajotas que cobrem as duas diagonais é 25. Além disso, temos que a lajota central é comum às duas diagonais, Logo:

$$2 \times n - 1 = 25$$

$$2 \times n = 26$$

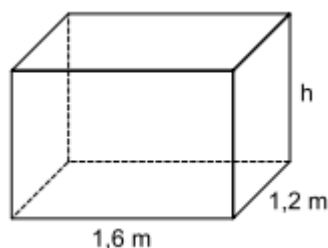
$$n = 13 \text{ lajotas}$$

Note que essa quantidade é a mesma do número de lajotas que cobre uma fileira do piso. Visto que se trata de um quadrado, o número total será de $13 \times 13 = 169$ lajotas.

Gabarito: B.

2. (VUNESP/TJ-SP/Escrevente/2018) Um estabelecimento comercial possui quatro reservatórios de água, sendo três deles de formato cúbico, cujas respectivas arestas têm medidas distintas, em metros, e um com a forma de um paralelepípedo reto retângulo, conforme ilustrado a seguir.





Sabe-se que, quando totalmente cheios, a média aritmética dos volumes de água dos quatro reservatórios é igual a $1,53 \text{ m}^3$, e que a média aritmética dos volumes de água dos reservatórios cúbicos, somente, é igual a $1,08 \text{ m}^3$. Desse modo, é correto afirmar que a medida da altura do reservatório com a forma de bloco retangular, indicada por h na figura, é igual a

- (A) 1,45 m. (B) 1,35 m. (C) 1,55 m. (D) 1,50 m. (E) 1,40 m.

RESOLUÇÃO:

Sabemos que Soma = Média $\times$ quantidade. Assim, a soma dos volumes dos reservatórios cúbicos é dada pela média de seus volumes ($1,08$) multiplicada pela quantidade (3):

$$\text{Soma dos reservatórios cúbicos} = 1,08 \times 3 = 3,24 \text{ m}^3$$

A soma dos 4 reservatórios juntos é dada pela multiplicação da média ($1,53$) pela quantidade (4), isto é,

$$\text{Soma de todos os reservatórios} = 1,53 \times 4 = 6,12 \text{ m}^3$$

Logo, o volume do reservatório da figura é a diferença entre a soma dos cubos e a soma total, isto é,

$$\text{Volume da figura} = 6,12 - 3,24 = 2,88 \text{ m}^3$$

Esse volume é dado pela multiplicação de suas dimensões:

$$2,88 = 1,6 \times 1,2 \times h$$

$$1,5 \text{ m} = h$$

Gabarito: D.

3. (VUNESP/TJ-SP/Escrevente/2018) Inaugurado em agosto de 2015, o Observatório da Torre Alta da Amazônia (Atto, em inglês) é um projeto binacional Brasil-Alemanha que busca entender o papel da Amazônia no clima do planeta e os efeitos das mudanças climáticas no funcionamento da floresta. Construída numa região de mata preservada, dentro da Reserva de Desenvolvimento Sustentável do Uamatã, a torre Atto tem 325 m de altura e é a maior estrutura de pesquisa desse tipo em florestas tropicais no mundo. (O Estado de S.Paulo, 16.10.2017. *Adaptado*)



Considere a torre posicionada perpendicularmente ao solo e admita que o cabo tensionado fixado no solo a uma distância de 75 m da base da torre esteja preso à torre em um determinado ponto, cuja altura, em relação ao solo, seja igual a 100 m. Nesse caso, é correto afirmar que o comprimento desse cabo é igual a

- (A) 135 m. (B) 130 m. (C) 110 m. (D) 125 m. (E) 150 m.

RESOLUÇÃO:

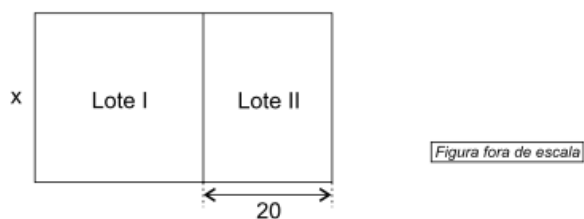
Note que temos um triângulo retângulo com um cateto medindo 75m e o outro medindo 100m (altura). A hipotenusa desse triângulo retângulo é justamente o comprimento do cabo. Assim, ao aplicarmos o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$h^2 = 75^2 + 100^2$$

$$h = \sqrt{5.625 + 10.000} = \sqrt{15.625} = 125$$

Gabarito: D.

4. (VUNESP/PM-SP/Soldado/2018) Um terreno retangular foi dividido em dois lotes, I e II, conforme mostra a figura, sendo que as medidas indicadas estão em metros.



Sabendo que o lote I tem a forma de um quadrado com 900 m² de área, então a área total desse terreno é

- (A) 1400 m². (B) 1500 m². (C) 1200 m². (D) 1100 m². (E) 1300 m².

RESOLUÇÃO:

O enunciado informa que a área do quadrado é de 900 metros quadrados. Logo:

$$x^2 = 900$$

$$x = 30 \text{ metros}$$

Assim, a altura do retângulo é de 30 metros e a base é de 30 + 20 = 50 metros.

Portanto, a área total é 30 x 50 = **1.500 metros quadrados**.

Gabarito: B.



5. (VUNESP/PM-SP/Soldado/2018) Um terreno retangular cujas medidas, em metros, estão indicadas na figura, foi totalmente cercado com um muro.



Sabendo que o perímetro desse terreno é 106 metros, então o seu maior lado mede

- (A) 31 m. (B) 22 m. (C) 27 m. (D) 18 m. (E) 35 m.

RESOLUÇÃO:

O enunciado informa que o perímetro (soma dos lados) do terreno é 106 metros. Logo:

$$x + x + (x + 17) + (x + 17) = 106$$

$$4x + 34 = 106$$

$$4x = 72$$

$$x = 18$$

Portanto, o maior lado mede $18 + 17 = 35$ metros.

Gabarito: E.

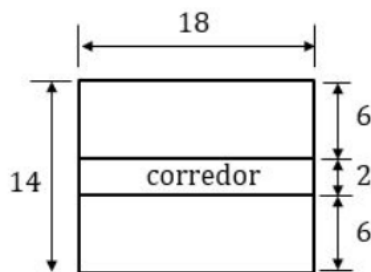
6. (FCC/DETRAN-MA/Ana Trânsito/2018) Um edifício de escritórios possui 8 andares. O piso de cada andar é um retângulo de 14 metros por 18 metros. Em cada andar, há um corredor de 2 metros de largura por 18 metros de comprimento, sendo todo o restante do espaço ocupado por salas, todas retangulares. Nos andares ímpares, as salas têm 6 metros por 6 metros e, nos pares, 6 metros por 9 metros. O total de salas existentes nesse edifício é igual a

- a) 32. b) 36. c) 40. d) 48. e) 56.

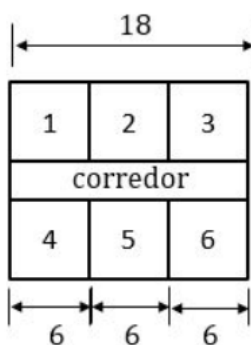
RESOLUÇÃO:

O enunciado informa que cada piso é um retângulo de 14m por 18m, com corredor de 2m por 18m. Podemos visualizar isso na figura a seguir:

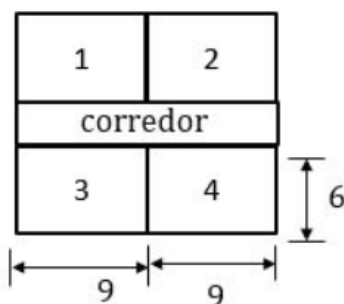




É dito que, nos andares ímpares, as salas têm 6m por 6m. Levando em conta que o comprimento do piso mede 18m, cabem 3 salas de um lado do corredor e 3 salas do outro lado do corredor:



Por sua vez, nos andares pares as salas têm 6m por 9m. Visto que o piso tem 18m de comprimento, cabem duas salas de cada lado do corredor:



Como são 6 salas em cada um dos 4 andares ímpares, são $6 \times 4 = \underline{24 \text{ salas}}$.

Já os andares pares possuem 4 salas em cada um, então são $4 \times 4 = \underline{16 \text{ salas}}$.

Portanto, há um total de $24 + 16 = \mathbf{40 \text{ salas}}$.

Gabarito: C

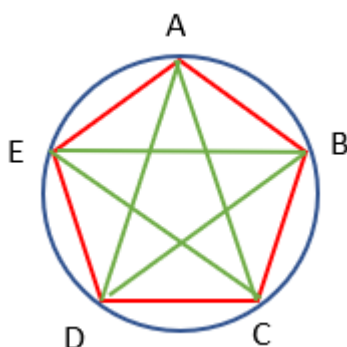
7. (FCC/ISS SÃO LUÍS/Auditor Fiscal Tributário/2018) Uma praça circular possui 5 entradas distribuídas em seu contorno de forma que a distância entre duas entradas consecutivas seja sempre a mesma. Existem 10 caminhos retos espalhados pela praça, todos eles começando em uma entrada e terminando em outra. Esses caminhos dividem o terreno da praça em um total de



A) 10 regiões B) 11 regiões C) 13 regiões D) 15 regiões E) 16 regiões

RESOLUÇÃO:

Podemos imaginar a nossa praça com as 5 entradas e os caminhos retos entre as entradas:



Externamente temos a praça circular. O pentágono indica os 5 caminhos retos, formando seus lados. Internamente temos outros 5 caminhos retos, formando as diagonais do pentágono. Juntos, eles abarcam os 10 caminhos indicados no enunciado.

Temos um total de **16 regiões** delimitadas pelas linhas.

Gabarito: E.

8. (CESPE/CAGE-RS/Auditor Controle Interno/2018) Em um bairro nobre de determinada cidade, uma imobiliária colocou à venda vários terrenos: independentemente do tamanho, o preço do metro quadrado é o mesmo para todos os terrenos à venda. Um terreno retangular de 600 m^2 de área custa R\$ 3.240.000. Em outro terreno, também retangular, um dos lados é 25% maior que o lado equivalente do primeiro terreno; o outro lado é 20% menor que o lado equivalente do primeiro terreno. Nesse caso, o preço do segundo terreno é igual a:

a) R\$1.458.000 b) R\$3.240.000 c) R\$3.402.000 d) R\$3.078.000 e) R\$3.564.000

RESOLUÇÃO:

Sejam a e b os lados do terreno retangular de 600 m^2 . Então, a sua área é dada por:

$$A_1 = a \times b = 600 \text{ m}^2$$

Quanto ao segundo terreno retangular, o enunciado informa que um dos lados é 25% maior que o primeiro ($1,25a$) e o outro lado é 20% menor que o lado do primeiro ($0,80b$). Assim, temos que a área do segundo terreno é dada por:

$$A_2 = 1,25a \times 0,80b = a \times b = 600 \text{ m}^2$$

Portanto, a área do segundo terreno é igual à área do primeiro, de modo que **o preço será igual**.



Gabarito: B.

9. (FGV/CGM-NITERÓI/Auditor Controle Interno/2018) O piso de uma sala quadrada é totalmente coberto por lajotas quadradas, todas exatamente iguais. O número de lajotas contidas nas duas diagonais do piso da sala é 25. O número de lajotas que cobre totalmente o piso da sala é

- (A) 121. (B) 169. (C) 225. (D) 289. (E) 361.

RESOLUÇÃO:

Vamos chamar de “n” o número de lajotas contidas em uma diagonal do quadrado.

O enunciado informa que a soma das lajotas que cobrem as duas diagonais é 25. Além disso, temos que a lajota central é comum às duas diagonais, Logo:

$$2 \times n - 1 = 25$$

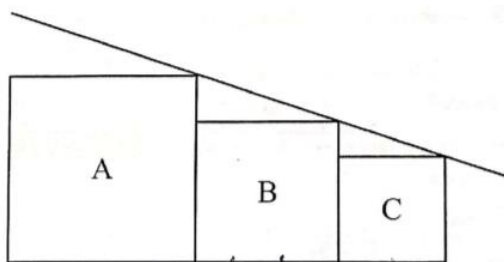
$$2 \times n = 26$$

$$n = 13 \text{ lajotas}$$

Note que essa quantidade é a mesma do número de lajotas que cobre uma fileira do piso. Visto que se trata de um quadrado, o número total será de $13 \times 13 = 169$ lajotas.

Gabarito: B.

10. (CESPE/SEFAZ-RS/Auditor-Fiscal/2019) Os quadrados A, B e C foram colocados lado a lado, de modo que uma reta contém os três vértices superiores, como mostra a figura a seguir.



Se a área do quadrado A for 24 cm^2 , e a área do quadrado C for 6 cm^2 , então a área do quadrado B será igual a

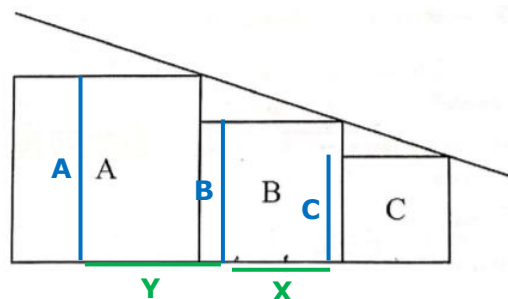
- a) 9 cm^2 b) 10 cm^2 c) 12 cm^2 d) 15 cm^2 e) 18 cm^2

RESOLUÇÃO:

A questão envolve uma aplicação de **semelhança de triângulos**.

Observe a figura a seguir:





Note que podemos estabelecer a seguinte **proporção**, por meio da qual calcularemos a área do quadrado B:

$$\frac{A - B}{Y} = \frac{B - C}{X}$$

Como o lado do quadrado A vale $\sqrt{24}$, então $A = \sqrt{24}$. E o lado do quadrado C é igual a $\sqrt{6}$, de modo que $C = \sqrt{6}$. Logo:

$$\frac{\sqrt{24} - B}{B} = \frac{B - \sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

$$\sqrt{24} \cdot \sqrt{6} - B \cdot \sqrt{6} = B \cdot B - B \cdot \sqrt{6}$$

$$B \cdot B = \sqrt{144}$$

$$B^2 = 12 \text{ cm}^2$$

Gabarito: C.

11. (CESPE/SEFAZ-RS/Auditor-Fiscal/2019) João pretende completar as casas de um tabuleiro 3×3, utilizando as letras A, B ou C. Cada casa é formada por um quadrado, conforme apresentado na figura a seguir.

A	B	
C		

Para completar o tabuleiro, preenchendo cada casa com apenas uma dessas letras, de modo que casas com lados adjacentes não sejam preenchidas com a mesma letra, João deverá escrever na casa destacada na figura

A) somente a letra A.

B) somente a letra B.



- C) somente a letra C.
- D) somente a letra B ou a letra C.
- E) qualquer uma das letras A, B ou C.

RESOLUÇÃO:

O enunciado estabelece que casas com lados adjacentes não devem ser preenchidas com a mesma letra.

Nesse caso, na casa central, devemos ter um A, pois já existem B e C como lados adjacentes.

Por sua vez, as casas vizinhas a essa central podem ter escritas um B e um C, dois B ou dois C.

Assim, se optarmos por colocar dois B, na casa destacada podemos ter A ou C. Todavia, se colocarmos dois C, na casa destacada podemos ter A ou B. E se colocarmos um B e um C, na casa destacada só podemos ter A.

Ou seja, podemos preencher o quadradinho destacado com **A, B ou C**.

Gabarito: E.



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Olá, você!

Concluimos mais uma aula da nossa revisão completa.

Relembramos um assunto que em praticamente todo concurso é cobrado pelo menos uma questão. Portanto, revise com carinho a matéria estudada e tente resolver por si só as questões que foram apresentadas.

Utilizem bastante os esquemas e resumos apresentados. E resolvam mais questões abordando esse assunto.

Então é isso! Obrigado e **aguardo você na próxima aula!**

Um forte abraço e bons estudos!

Alex Lira



<http://www.facebook.com/alexliraprof>

Insta: <http://www.instagram.com/professoralexlira>

YouTube: <youtube.com/professoralexlira>

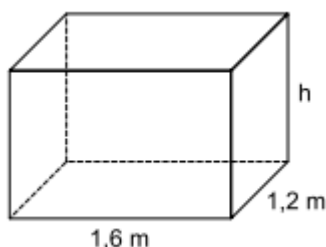


LISTA DE QUESTÕES ESTRATÉGICAS

1. (FGV/CGM-NITERÓI/Auditor Controle Interno/2018) O piso de uma sala quadrada é totalmente coberto por lajotas quadradas, todas exatamente iguais. O número de lajotas contidas nas duas diagonais do piso da sala é 25. O número de lajotas que cobre totalmente o piso da sala é

(A) 121. (B) 169. (C) 225. (D) 289. (E) 361.

2. (VUNESP/TJ-SP/Escrevente/2018) Um estabelecimento comercial possui quatro reservatórios de água, sendo três deles de formato cúbico, cujas respectivas arestas têm medidas distintas, em metros, e um com a forma de um paralelepípedo reto retângulo, conforme ilustrado a seguir.



Sabe-se que, quando totalmente cheios, a média aritmética dos volumes de água dos quatro reservatórios é igual a $1,53 \text{ m}^3$, e que a média aritmética dos volumes de água dos reservatórios cúbicos, somente, é igual a $1,08 \text{ m}^3$. Desse modo, é correto afirmar que a medida da altura do reservatório com a forma de bloco retangular, indicada por h na figura, é igual a

(A) 1,45 m. (B) 1,35 m. (C) 1,55 m. (D) 1,50 m. (E) 1,40 m.

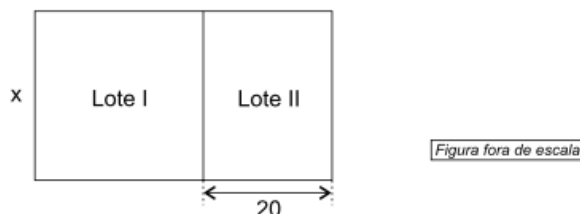
3. (VUNESP/TJ-SP/Escrevente/2018) Inaugurado em agosto de 2015, o Observatório da Torre Alta da Amazônia (Atto, em inglês) é um projeto binacional Brasil-Alemanha que busca entender o papel da Amazônia no clima do planeta e os efeitos das mudanças climáticas no funcionamento da floresta. Construída numa região de mata preservada, dentro da Reserva de Desenvolvimento Sustentável do Uamatã, a torre Atto tem 325 m de altura e é a maior estrutura de pesquisa desse tipo em florestas tropicais no mundo. (O Estado de S.Paulo, 16.10.2017. Adaptado)

Considere a torre posicionada perpendicularmente ao solo e admita que o cabo tensionado fixado no solo a uma distância de 75 m da base da torre esteja preso à torre em um determinado ponto, cuja altura, em relação ao solo, seja igual a 100 m. Nesse caso, é correto afirmar que o comprimento desse cabo é igual a

(A) 135 m. (B) 130 m. (C) 110 m. (D) 125 m. (E) 150 m.



4. (VUNESP/PM-SP/Soldado/2018) Um terreno retangular foi dividido em dois lotes, I e II, conforme mostra a figura, sendo que as medidas indicadas estão em metros.



Sabendo que o lote I tem a forma de um quadrado com 900 m^2 de área, então a área total desse terreno é

- (A) 1400 m^2 . (B) 1500 m^2 . (C) 1200 m^2 . (D) 1100 m^2 . (E) 1300 m^2 .

5. (VUNESP/PM-SP/Soldado/2018) Um terreno retangular cujas medidas, em metros, estão indicadas na figura, foi totalmente cercado com um muro.



Sabendo que o perímetro desse terreno é 106 metros, então o seu maior lado mede

- (A) 31 m. (B) 22 m. (C) 27 m. (D) 18 m. (E) 35 m.

6. (FCC/DETRAN-MA/Ana Trânsito/2018) Um edifício de escritórios possui 8 andares. O piso de cada andar é um retângulo de 14 metros por 18 metros. Em cada andar, há um corredor de 2 metros de largura por 18 metros de comprimento, sendo todo o restante do espaço ocupado por salas, todas retangulares. Nos andares ímpares, as salas têm 6 metros por 6 metros e, nos pares, 6 metros por 9 metros. O total de salas existentes nesse edifício é igual a

- a) 32. b) 36. c) 40. d) 48. e) 56.

7. (FCC/ISS SÃO LUÍS/Auditor Fiscal Tributário/2018) Uma praça circular possui 5 entradas distribuídas em seu contorno de forma que a distância entre duas entradas consecutivas seja sempre a mesma. Existem 10 caminhos retos espalhados pela praça, todos eles começando em uma entrada e terminando em outra. Esses caminhos dividem o terreno da praça em um total de

- A) 10 regiões B) 11 regiões C) 13 regiões D) 15 regiões E) 16 regiões



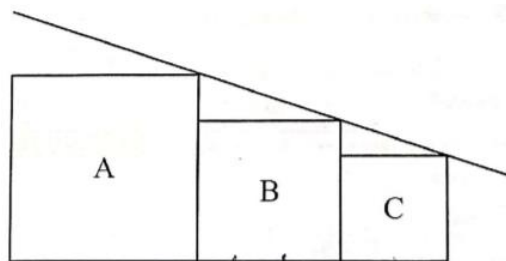
8. (CESPE/CAGE-RS/Auditor Controle Interno/2018) Em um bairro nobre de determinada cidade, uma imobiliária colocou à venda vários terrenos: independentemente do tamanho, o preço do metro quadrado é o mesmo para todos os terrenos à venda. Um terreno retangular de 600 m^2 de área custa R\$ 3.240.000. Em outro terreno, também retangular, um dos lados é 25% maior que o lado equivalente do primeiro terreno; o outro lado é 20% menor que o lado equivalente do primeiro terreno. Nesse caso, o preço do segundo terreno é igual a:

- a) R\$1.458.000 b) R\$3.240.000 c) R\$3.402.000 d) R\$3.078.000 e) R\$3.564.000

9. (FGV/CGM-NITERÓI/Auditor Controle Interno/2018) O piso de uma sala quadrada é totalmente coberto por lajotas quadradas, todas exatamente iguais. O número de lajotas contidas nas duas diagonais do piso da sala é 25. O número de lajotas que cobre totalmente o piso da sala é

- (A) 121. (B) 169. (C) 225. (D) 289. (E) 361.

10. (CESPE/SEFAZ-RS/Auditor-Fiscal/2019) Os quadrados A, B e C foram colocados lado a lado, de modo que uma reta contém os três vértices superiores, como mostra a figura a seguir.



Se a área do quadrado A for 24 cm^2 , e a área do quadrado C for 6 cm^2 , então a área do quadrado B será igual a

- a) 9 cm^2 b) 10 cm^2 c) 12 cm^2 d) 15 cm^2 e) 18 cm^2

11. (CESPE/SEFAZ-RS/Auditor-Fiscal/2019) João pretende completar as casas de um tabuleiro 3×3 , utilizando as letras A, B ou C. Cada casa é formada por um quadrado, conforme apresentado na figura a seguir.

A	B	
C		

Para completar o tabuleiro, preenchendo cada casa com apenas uma dessas letras, de modo que casas com lados adjacentes não sejam preenchidas com a mesma letra, João deverá escrever na casa destacada na figura



- A) somente a letra A.
- B) somente a letra B.
- C) somente a letra C.
- D) somente a letra B ou a letra C.
- E) qualquer uma das letras A, B ou C.

Gabarito

GABARITO



- 1. B
- 2. D
- 3. D
- 4. B
- 5. E
- 6. C
- 7. E
- 8. B
- 9. B
- 10. C
- 11. E



ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE: PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.



1 Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.



2 Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).



3 Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).



4 Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).



5 Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).



6 Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).



7 Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.



8 O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.



Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.